

HELVETICA PHYSICA ACTA

SOCIETATIS PHYSICAE HELVETICAE
COMMENTARIA PUBLICA

VOLUMEN XV

BASILEAE • IN AEDIBUS E. BIRKHAEUSER & CIE.
MCMXXXII

HELVETICA
PHYSICA ACTA
SOCIÉTÉ PHYSIQUE SUISSE
SOCIETÀ FISICA SVIZZERA
Schweizerische Physikalische Gesellschaft
Copyright 1942 by: Société Suisse de Physique
Società Fisica Svizzera

Druck von Emil Birkhäuser & Cie., A. G., Basel

Nachweis und Messung geringer Konzentrationen an freiem Sauerstoff (bis $1:10^{10}$) mittels Leuchtbakterien

von **Klaus Peter Meyer.**

(2. X. 1941)

Zusammenfassung.

1. Der seit 1890 bekannte qualitative Nachweis von freiem O_2 mit Hilfe der Lichtemission von Leuchtbakterien (im Folgenden als L.B. bezeichnet) wird zu einer O_2 -Konzentrationsbestimmung ausgearbeitet, deren Empfindlichkeitsschwelle bei einem Mischungsverhältnis des O_2 mit einem Trägergas von $1:10^{10}$ liegt.
2. Die Methodik des Verfahrens wird beschrieben:
 - a) Gewinnung und Unterhalt der L.B.-Kulturen.
 - b) Apparatur zur Beobachtung des Leuchtens.
 - c) Vorrichtungen zur Bestimmung der L.B.-Empfindlichkeit.

Hierbei wird gefunden, dass zu Eichzwecken mittels Elektrolyse beigemischter O_2 nicht im entferntesten in der Menge entsteht, die dem elektrochemischen Äquivalent entsprechen würde. Wegen der kleinen Ströme und Elektrodenabstände wird, wahrscheinlich in Folge Rekombination, viel weniger O_2 frei (bis herunter zu ca. $1\%_{00}$ des Stromäquivalentes).
 - d) Arbeitsgang der Messungen und erreichbare Resultate.
3. Die von EYMERS und SCHOUWENBURG (l. c.) für die Lichtemission durch die L.B. bestimmte Quantenausbeute (in O_2 -Molekülen/ $h\nu$) wurde mit der von uns erzielten Empfindlichkeit des O_2 -Nachweises verglichen. Innerhalb der Fehlergrenze herrscht Übereinstimmung.

I. Einleitung.

Erstmalig wurde von BEYERINK¹⁾ 1890 das Aufleuchten von Leuchtbakterien in Gegenwart von freiem Sauerstoff zum Nachweis dieses Gases verwendet. Das Verfahren wurde späterhin sehr häufig benützt²⁾. Es handelte sich aber stets nur um einen qualitativen Nachweis.

Übereinstimmend wird dieser O_2 -Nachweis mit Leuchtbakterien (im folgenden als L.B. bezeichnet) als das „empfindlichste O_2 -Nachweisverfahren“ bezeichnet³⁾. Quantitative Angaben hierüber finden sich einzig bei HARVEY⁴⁾, der als Schwellenwert O_2

1) M. W. BEYERINK, Bot. Ztg. **48**, 741, 1890.

2) Speziell bei den Untersuchungen über die Assimilation der Kohlensäure.

3) z. B. R. EMERSON, Ergebn. der Enzymforschung **5**, 305, 1936.

4) E. N. HARVEY, Naturwiss. **12**, 165, 1924.

noch im Verhältnis $1 : 1,4 \cdot 10^5$ mit H_2 gemischt nachweisen konnte. Vom gleichen Autor stammt auch ein zusammenfassender Artikel, der eine gute Orientierung über die Leuchtbakterien selbst gibt¹⁾.

In den vorliegenden Versuchen wurde nun anlässlich anderer Untersuchungen²⁾ der O_2 -Nachweis mit Leuchtbakterien weiter ausgearbeitet. Es gelang, aus dem qualitativen Nachweis eine Bestimmung der O_2 -Konzentration zu entwickeln, deren Empfindlichkeitsschwelle bei einem Mischungsverhältnis des O_2 mit dem Trägergas (in der Regel N_2) von $1 : 10^{10}$ liegt.

Zum Vergleich mögen die drei nach KLEMENC³⁾ empfindlichsten O_2 -Nachweisverfahren dienen:

<i>Nachweis mit:</i>	Empfindlichkeitsschwelle bei Verdünnung des O_2 im Verhältnis
Tribenzcatechinsäurem Na	$1 : 7 \cdot 10^4$
Phosphor	$1 : 1 \cdot 10^7$
Fluorescenzlöschung	$1 : 7 \cdot 10^5$

Ausser der höheren Empfindlichkeit hat das L.B.-Verfahren noch den Vorteil, dass es weniger als die rein chemischen und physikalischen Verfahren durch Spuren von Begleitsubstanzen beeinträchtigt wird. Wohl kann durch Substanzen, die als Gift auf irgendeine Funktion der L.B. wirken, bei genügender Dosis eine Herabsetzung der Empfindlichkeit des O_2 -Nachweises auftreten. Dagegen kommt es nicht vor, dass wie bei anderen Nachweisreaktionen durch Spuren von Verunreinigungen die Anwesenheit von O_2 vorgetäuscht werden kann.

II. Methodik des O_2 -Nachweises mit L.B.

1. Gewinnung der L.B.-Stammkulturen.

Diese konnten ohne Schwierigkeiten im physikalischen Laboratorium gezüchtet werden, da Herr Prof. DÜGGELI so freundlich war, uns durch das bakteriologische Institut der Eidgen. Techn. Hochschule jederzeit die nötige Menge an sterilen Petrischalen und Nährböden abzugeben. Die Nährböden⁴⁾ erhielten wir als flüssige Bouillon

¹⁾ E. N. HARVEY, *Ergebn. der Enzymforschung* **4**, 365, 1935.

²⁾ Versuche zum Nachweis der Kohlensäure-Assimilation in vitro, unveröffentlicht.

³⁾ A. KLEMENC, Die Behandlung und Reindarstellung von Gasen. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1938.

⁴⁾ Als Nährsubstrat dient folgende Flüssigkeit: 500 g fettarmes gehacktes Rindfleisch mit 1 Liter Wasser 2 Stunden gekocht und filtriert, dazu 10 g Pepton und 30 g NaCl (Lösung 3%). Die festen Nährböden enthielten zusätzlich im Winter 10, im Sommer 12% Gelatine.

(in Portionen zu 80 cm³ in Kölbchen abgefüllt) und als feste Salzgelatine (in Kulturröhrchen zum Bereiten der Stammkulturen und Verdünnungsreihen). Für seine zuvorkommende Hilfe möchte ich Herrn Prof. DÜGGELI meinen besten Dank aussprechen.

Die Reinkulturen wurden auf die übliche¹⁾ Weise hergestellt. Als Ausgangsmaterial diente gewöhnlicher in Fischhandlungen käuflicher Merlan (Meerfisch). Dieser wurde in Stücke zerschnitten und in 3-proz. Kochsalzlösung in Petrischalen aufgestellt. Die Fischstücke ragen am besten etwas aus der Flüssigkeit heraus. Die Temperatur wird auf ca. 10—12° C gehalten. Nach ca. 20 h leuchtet der Fisch intensiv an einzelnen Stellen, von denen aus nun die Reinkulturen gezüchtet werden. Mit der ausgeglühten Impfnadel²⁾ wird etwas von der leuchtenden Substanz in ein Kulturröhrchen mit Salzgelatine gebracht, die vorher (durch Erwärmen im Wasserbad auf 35° C) verflüssigt worden war. Vermittels einer Drahtöse wird hierauf eine Verdünnungsreihe des Impfmateri als hergestellt, indem man die Öse in die geimpfte Salzgelatine taucht und dann nacheinander damit durch 2—3 weitere Kulturröhrchen fährt. Den Inhalt dieser Röhrchen giesst man in je eine kleine Petrischale und lässt diese zu einer sogenannten „Platte“ erstarren. Nach ca. 1—2 Tagen (bei 10—12° C) sehen die Platten im Dunkeln wie ein Sternenhimmel aus. Überall dort, wo sich eine Leuchtbakterie an der Gelatine-Oberfläche befindet, entsteht eine kreisförmige leuchtende Kolonie, die langsam wächst. Natürlich bilden sich auch Kolonien andersartiger, nichtleuchtender Bakterien. Die einzelnen Bakterien-Kolonien sind aber wegen der hohen Verdünnung des Impfmateri als meist durch ein Stück nicht infizierter Gelatine-Oberfläche voneinander getrennt. Daher gelingt es, mit der Impfnadel eine einzelne leuchtende Kolonie abzuheben³⁾, und diese so gewonnene Leuchtbakterien-Reinkultur⁴⁾ in Form eines Striches auf eine feste Gelatine-Oberfläche einzuritzen. Diese sog. „Striche“ erstellt man ebenfalls in Kulturröhrchen, deren verflüssigter Inhalt (Wasserbad von 35° C) in den schräggelegten Röhrchen zum Erstarren gebracht wurde. Diese Striche leuchten nach ca. 24 h intensiv und bilden die sog. Stammkulturen. Bei ca. 10—12° C

¹⁾ Der dem Bakteriologen wohlbekannte Arbeitsgang wird hier für den Physiker und Chemiker kurz skizziert.

²⁾ Pt- oder Ni-Draht, der mit einem Ende in einen Glasstab (als Griff) eingeschmolzen wird.

³⁾ Von einem gewissen Alter der Platte an, das nach ca. 60 Stunden erreicht wird, lassen sich die Kolonien mit der Impfnadel gut abheben, am besten bei rotem Dunkelkammerlicht, da dann die L.B. noch im eigenen Licht sichtbar sind.

⁴⁾ Sicherheitshalber kann man hier nochmals eine Verdünnungsreihe mit Platten einschalten.

aufbewahrt, halten sie sich ca. 3 Wochen, ohne an Leuchtintensität zu verlieren. Dann ist es notwendig, von diesen Stammkulturen wieder neue Striche zu impfen, da die Bakterien sonst durch ihre eigenen Stoffwechselprodukte geschädigt werden. Auf diese Weise lässt sich ein Bakterienstamm bis zu einem halben Jahr und länger bei unverminderter Leuchtintensität weiterzüchten¹⁾. Früher oder später treten dann Degenerationserscheinungen (Verminderung der Leuchtintensität) der Reinkulturen auf, die eine Neuzucht vom Fisch aus notwendig machen²⁾.

2. *Bereitung der zum O₂-Nachweis selbst verwendeten L.B.-Kulturen.*

Hierfür wurde das flüssige Kulturmedium benützt. In Portionen von 80 cm³ wurde die oben beschriebene Bouillon von einer der Stammkulturen aus geimpft. Nach einer Zeit von 24—48 h (bei 10—12° C) leuchtet dann die ganze Flüssigkeit so intensiv, dass man in ihrem Lichte in unmittelbarer Nähe lesen kann. Das Leuchten tritt nur auf, wenn man das Kölbchen mit den L.B. schüttelt. Bei ruhigem Stehen erlischt es nach wenigen Minuten, ausser in einer dünnen Oberflächenschicht, da dann der gelöste O₂ verbraucht ist. Die Entwicklungszeit von 24—48 h ist für ein und denselben Bakterienstamm und ein und dieselbe Bouillonbereitung sozusagen auf die Stunde konstant. Ca. 6 h später beginnt die Lichtintensität wieder langsam abzunehmen. Während diesen ca. 6 h ist die betreffende Kultur auch für den O₂-Nachweis am empfindlichsten. Für die Messung von kleinsten O₂-Konzentrationen ist daher durch gestaffeltes Impfen der einzelnen Bouillon-Kölbchen dafür zu sorgen, dass stets höchstempfindliche Bakterien zur Verfügung stehen. Dagegen kann man z. B. für O₂-Konzentrationen, die ca. 4 Zehnerpotenzen über der Schwelle liegen, einen ganzen Tag lang mit derselben Bouillon arbeiten.

3. *Apparatur zur Beobachtung des Leuchtens.*

Für die hier beschriebene Anordnung muss der O₂ in Form einer kleinen Beimischung zu einem anderen Gas vorliegen³⁾. Wenn möglich, wählt man ein Trägergas, das (wie z. B. N₂) über-

¹⁾ Alle L.B.-Kulturen sind im Dunkeln aufzubewahren.

²⁾ Es ist nicht gesagt, dass man von jedem Fisch kräftig leuchtende und zur Weiterzucht geeignete Kulturen erhält. Bei Schwierigkeiten fängt man am besten nochmals mit einem neuen Fisch an.

³⁾ Liegt der O₂ in einer Flüssigkeit gelöst vor, so leitet man ein Gas, z. B. N₂ durch diese und untersucht das austretende Gasgemisch.

haupt nicht schädigend auf die L.B. einwirkt. Das zu untersuchende Gasgemisch lässt man in feinen Bläschen durch die L.B.-Bouillon perlen, deren Aufleuchten in einer ausreichend dicken Flüssigkeitsschicht beobachtet wird.

Als zweckmässig erwies sich folgende Anordnung aus Glas (Fig. 1)¹⁾. Durch das Rohr *A* tritt das zu untersuchende Gasgemisch in das eigentliche Beobachtungsrohr *B* ein. Hierbei passiert es eine Siebplatte *C* aus Porzellan (mit 34 je 0,5 mm weiten Löchern), die durch Glasnasen fixiert ist. Das Volumen unterhalb der Siebplatte ist möglichst klein zu halten, damit im Betrieb die L.B.-Flüssigkeit durch den Gasstrom möglichst restlos über diese Siebplatte getrieben wird. Von oben taucht der Beobachtungsstutzen *D* in die leuchtende Flüssigkeit ein, die so in einer Schichtdicke von ca. 12 cm beobachtet wird. Grössere Schichtdicke hat wegen der starken Lichtstreuung in der trüben L.B.-Bouillon keinen Zweck. Seitlich ausgestrahltes Licht wird durch Reflexion an der Glaswandung und an der äusseren Versilberung²⁾ des Rohres *B* zur Hälfte nach unten und zur Hälfte in den Beobachtungsstutzen geworfen. Dieser wird mit Wasser gefüllt, damit beim Eintritt des Lichtes möglichst wenig störende Reflexionen auftreten. Das untere Ende des Stutzens *D* muss abgerundet sein, damit sich die aufsteigenden Gasblasen nicht verfangen und die Sicht behindern. Diese Gasblasen, die an der Oberfläche nicht zerplatzen (relativ grosse Oberflächenspannung der Bouillon!), sind auch der Grund, weshalb der Beobachtungsstutzen in die Flüssigkeitsoberfläche eintauchen muss. Im Betrieb nimmt nun der Gasstrom die Flüssigkeit in Form von Blasen durch das Rohr *E* mit und würde in kurzer Zeit das Beobachtungsrohr weitgehend entleeren. Um dies zu verhindern, ist der Kolben *F* (Volumen 0,6 bis 0,9 Liter) angebracht. Die L.B.-Bouillon, welche in Form von Blasen in den Kolben gelangt, sammelt sich in seinem unteren Teil und fliesst durch das Glasrohr *G* in das Beobachtungsrohr zurück³⁾. Die Blasen selbst füllen den Kolben *F*, werden dabei aber immer dünnwandiger und zerplatzen zum grössten Teil. Ein kleiner Rest, der aber die Flüssigkeitsmenge in keiner Weise störend vermindert, geht weiter in den Zylinder *H* über. Dieser wird in einem Wasserbad auf ca. 80° C erhitzt. Dadurch sinkt die Oberflächenspannung der Bouillon derart, dass nun quantitativ

¹⁾ Die Figur 1 ist in allen wesentlichen Teilen masstäblich.

²⁾ Es genügt auch, das Rohr mit Metallfolie zu umkleiden und zum mechanischen Schutz mit Schellack anzustreichen.

³⁾ Für einwandfreies Arbeiten dieses Kreislaufes ist eine Höhendifferenz von gut 50 cm für das Rücklaufrohr *G* notwendig.

alle Blasen zerspringen³⁾. Der Kolben *F* befindet sich ebenfalls in einem Wasserbad, das aber auf ca. 12–15° C gehalten wird, um

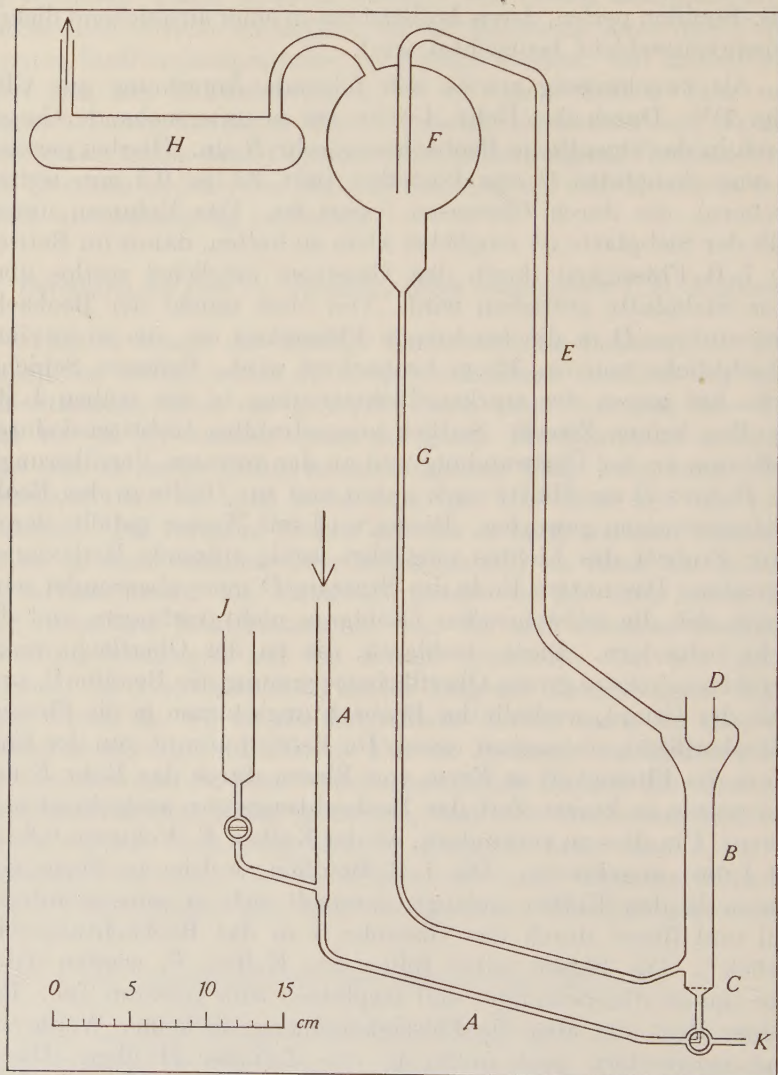


Fig. 1.

Glasapparatur zur Beobachtung des Leuchtens. Alle Verbindungen sind verblasen. Der lichte Durchmesser der weiten Verbindungsrohre ist 6–8, der der engen 4 mm.

³⁾ Diese quantitative Entfernung der Blasen aus dem Gasstrom ist unbedingt notwendig, da sie sonst den Strömungswiderstand in den folgenden Rohren und Hahnen unregelmässig vergrößern, was einen sehr störenden stossweisen Verlauf des Gasstromes zur Folge hat.

die im Kolben befindlichen L.B., die ja wieder in das Beobachtungsrohr *B* zurücklaufen, vor Schädigung durch das benachbarte heisse Wasserbad zu bewahren. Die Entfernung zwischen Kolben *F* und Zylinder *H* muss klein sein, damit der regelmässige Verlauf des Gasstromes nicht durch die im Verbindungsrohr durchlaufenden Blasen beeinträchtigt wird. In der ganzen Nachweis-Apparatur waren zur vollständigen Vermeidung von Schläuchen alle Verbindungen verblasen.

Das aus dem Zylinder *H* austretende Gas kann nun nach Massgabe der speziellen Zwecke weiterverwendet werden. In unseren Versuchen trat es durch einen Hahnen, einen Schliff, eine Waschflasche mit Pyrogallol in Kalilauge (zur Vermeidung der Rückdiffusion des Luft-O₂) und eine Wasser-Wanne in die Luft aus. Die eigentliche Nachweisapparatur (bis und mit Zylinder *H*) war in doppelter Ausführung vorhanden. Durch Drehen von zwei Hahnen konnte der eine oder andere Ast in den Gasstrom eingeschaltet werden. Die Stärke des Gasstromes für normalen Betrieb war ca. 180—220 cm³/Min (1 Atm.). Die L.B.-Flüssigkeit wurde durch den Einfüll-Rohransatz *J* in die Apparatur gebracht. Für eine Füllung des Beobachtungsrohres *B* waren ca. 65 cm³ notwendig.

Die beiden Beobachtungsrohre befanden sich in einem oben offenen Kasten, so dass das Auge unmittelbar über den betreffenden Beobachtungsstutzen *D* gebracht werden konnte. Für Versuche, die die Empfindlichkeit der L.B. auf das Letzte ausnützen wollen, ist eine vollständige Dunkeladaption des Auges notwendig¹⁾.

Sind durch schädigende Gase oder durch allzu langen Aufenthalt in der Apparatur die L.B. in ihrer Empfindlichkeit unter das geforderte Mass gesunken, so stellt man durch einen Hahnen oder Schliff unmittelbar nach dem Zylinder *H* eine Verbindung nach aussen her, lässt bei *K* die unbrauchbar gewordenen L.B. auslaufen und füllt hierauf wie vorher mit frischen L.B. Wenn nötig, wird vorher die Wasserleitung bei *K* angeschlossen und die Apparatur (exkl. Zylinder *H*) einige Male mit Wasser gespült. Nach Abschluss einer Versuchsreihe, auf jeden Fall nach ca. 3 Tagen, wird der Zylinder *H* zur Entleerung und Reinigung abgeschnitten; den Rest schliesst man zum Durchspülen bei *K* an die Wasserleitung an.

¹⁾ Zweckmässig wird der oben offene Kasten in Form eines weiten Schlauches aus schwarzem Tuch fortgesetzt, in den der Beobachter seinen Kopf steckt.

4. Vorrichtungen zur Bestimmung der L.B.-Empfindlichkeit.

Um die Empfindlichkeit der L.B. zu bestimmen, wurde ein N_2 -Strom¹⁾ mit messbar veränderlicher O_2 -Beimischung durch die L.B.-Bouillon geleitet.

Die O_2 -Beimischung erfolgte durch Elektrolyse von Kalilauge. Um trotz der geringen Stromstärke (minimal ca. $3 \cdot 10^{-6}$ Amp.) ein möglichst trägheitsfreies Arbeiten²⁾ der Eichvorrichtung zu erzielen, wurde ein Mikro-Elektrolyseapparat (Fig. 2) hergestellt.

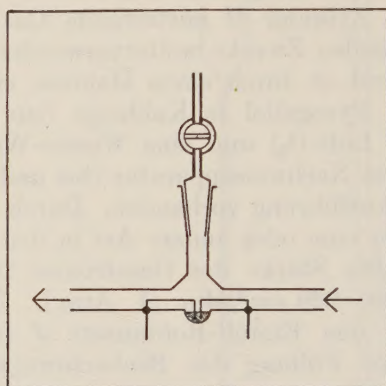


Fig. 2.

Mikro-Elektrolyseapparat aus Glas, dient zur Beimischung messbarer kleiner Sauerstoffmengen zum Trägergas.

Die gesamte Elektrolytmenge sind 5 Tropfen (ca. 150 mm^3), in die als Elektroden zwei Platindrähte in einem Abstand von ca. 3 bis 4 mm eintauchen. Über die Oberfläche des Elektrolyten strömt das Trägergas und nimmt so die O_2 -Beimischung auf³⁾.

¹⁾ Sauerstofffreier N_2 , der also kein Leuchten der L.B. mehr verursachte, wurde durch Überleiten von Bomben- N_2 über glühendes Cu hergestellt. Entgegen H. KAUTSKY und H. THIELE, Ztschr. f. anorg. u. allgem. Chemie **152**, 342, 1926, stört der O_2 -Druck des Cu-Oxydes nicht, wenn man Cu im genügenden Überschuss anwendet. Der N_2 muss über die oxydierte Zone des Cu hinaus noch etwa 30 cm weit durch das mit blankem Cu-Netz vollständig gefüllte Verbrennungsröhr (innerer Durchmesser ca. 17 mm) streichen. Bei einem Gasstrom von ca. $250 \text{ cm}^3/\text{Min.}$ genügt es, das Cu mittels Durchleiten von H_2 alle 4 Stunden zu reduzieren.

²⁾ Siehe Kap. III, Ziff. 4.

³⁾ Der mitentwickelte H_2 strömt auch durch die L.B.-Bouillon und stört weiter nicht. Der Schlifffansatz dient zum Nachfüllen von Elektrolyt, der Hahnen zur Spülung (Entfernung jeglichen O_2) dieses Ansatzes mittels ausströmenden Trägergases.

Die Durchmischung des Trägergases mit dem O_2 ist sicher genügend: Die Elektrolyse findet in einem Röhr von ca. 7 mm lichter Weite statt; dann strömt das Gasgemisch ca. 80 cm weit durch eine Rohrleitung mit der lichten Weite von 7 und 4 mm und passiert dabei 3 Hahnbohrungen, bevor es in die L.B.-Bouillon eintritt. Es wurde demgemäss auch nie ein schlierenförmiges Leuchten der Flüssigkeit beobachtet.

Die Stärke des Trägergas-Stromes wurde durch folgenden Gas-Strommesser angezeigt (Fig. 3): Das mit Wasser gefüllte U-Rohr zeigt eine Niveau-Differenz in den beiden Schenkeln, sobald Gas durch die Kapillare K_1 strömt¹⁾. Die Kapillare K_2 dient zur Dämpfung von Stromstößen. Um den Gasmesser von O_2 frei

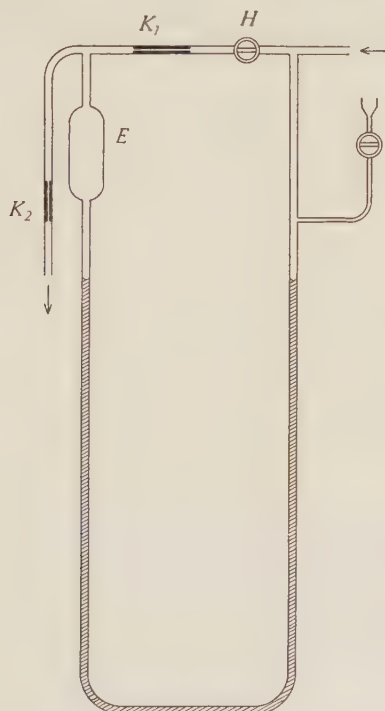


Fig. 3.

Gasmesser aus Glas zur Bestimmung der Stärke des Trägergasstromes.

machen zu können, sind die Erweiterung E und der Hahn H angebracht. Schliesst man letzteren, so wird das Wasser in die Erweiterung E getrieben, wo es bis zur völligen Befreiung von O_2 vom Trägergas durchströmt wird.

¹⁾ Bei der Eichung in $\text{cm}^3/\text{Min.}$ muss in Funktion der Niveaudifferenz auch der Druck p_0 bestimmt werden, der sich vor der Kapillaren K_1 jeweils einstellt. Denn da der Überdruck vor der Kapillaren K_1 wesentlich davon abhängt, was nach dem Gasmesser im speziellen Versuch noch für Strömungswiderstände auftreten, wird bei den Messungen dieser Druck im allgemeinen, bei gleichem Ausschlag des Gasmessers, einen anderen Wert p haben. Die Gasstromstärke in $\text{cm}^3/\text{Min.}$ aus der Eichkurve ist dann einfach mit dem Faktor p/p_0 zu multiplizieren. Diese Korrektur kann ohne weiteres 5–10% ausmachen.

Die Menge des beigemischten O_2 darf keinesfalls einfach mit Hilfe des elektrochemischen Äquivalentes aus der gemessenen elektrischen Stromstärke berechnet werden. Im beschriebenen Mikroelektrolyseapparat wurde nämlich, wahrscheinlich wegen Rekombination, bei der kleinsten Stromstärke (ca. $3 \cdot 10^{-6}$ Amp.) nur etwa 1‰ des Stromäquivalentes an O_2 frei! Die „Ausbeute“ des Elektrolyse-Apparates muss daher in Abhängigkeit von der Stromstärke eigens gemessen werden (Kapitel III, Ziff. 1, Fig. 4).

5. Arbeitsgang der Messung.

Vor jedem Versuch lässt man O_2 -freien N_2 so lange durch alle Teile der Apparatur¹⁾ strömen, bis mutmasslich kein O_2 mehr darin enthalten ist. Hierauf werden die L. B. eingefüllt und mit N_2 durchströmt. Eine halbe Stunde später kontrolliert man mit dunkeladaptiertem Auge, ob die L.B. kein Leuchten mehr zeigen und kann anschliessend irgendwelche Teile der Apparatur auf ihre O_2 -Freiheit prüfen, indem man den N_2 über den betreffenden Zweig der Apparatur in die L.B.-Bouillon eintreten lässt.

A) Empfindlichkeitsmessung der L.B.

Der N_2 strömt über den Elektrolyse-Apparat zu den L.B. Durch Eingabeln wird diejenige Stärke des Elektrolyse-Stromes ermittelt, die eben noch ein wahrnehmbares Leuchten verursacht. Will man von einer Stromstärke, die ein Leuchten hervorruft, das noch über dem Schwellenwert liegt, zu einer kleineren übergehen, so wird der Strom zweckmässig erst bis zum völligen Verschwinden des Leuchtens ganz ausgeschaltet. Aus der Ablesung des Gasstrommessers, der Elektrolyse-Stromstärke und der entsprechenden Ausbeute des Stromäquivalentes (Kap. III, Fig. 4) ergibt sich die von den L.B. eben noch angezeigte O_2 -Konzentration im N_2 .

B) Prüfung eines Gasgemisches auf O_2 -Gehalt.

a) In Bezug auf die L.B.-Empfindlichkeitsschwelle.

Unmittelbar vor und nach dem Durchleiten des zu prüfenden Gases, wird die L.B.-Empfindlichkeit nach A) bestimmt. Diese Messung liefert also nur die Angabe, ob mehr oder weniger als die Schwellenkonzentration der L.B. vorhanden ist.

¹⁾ Diese darf in ihren wesentlichen Teilen natürlich keine Schlauchverbindungen oder dergleichen enthalten. Die Verbindungen wurden durch Verblasen der Glasrohre hergestellt. Sonst enthielt unsere Apparatur nur mit Hochvakuumfett gedichtete Schliffe und Hahnen sowie eine mit weissem Siegelack gekittete Verbindung (Übergang vom Hartglas zum Weichglas beim Ausgang aus der der N_2 -Reinigung dienenden Verbrennungsröhre).

b) Absolutbestimmung.

Zu den unter a) genannten Empfindlichkeitsmessungen tritt hier noch folgendes: Das vom untersuchten Gas verursachte Leuchten wird photometriert, indem eine künstliche Lichtquelle gleicher Farbe auf gleiche Helligkeit eingestellt wird (Glühlampe mit variabler Stromstärke). Anschliessend wird wieder reiner N_2 durch die L.B. geleitet, dem mit der elektrolytischen Eichvorrichtung in dem Masse O_2 beigemischt wird, bis das hierdurch verursachte Leuchten wiederum gleich hell erscheint wie dasjenige der künstlichen Vergleichslichtquelle. Damit lässt sich wie unter A) die O_2 -Konzentration im N_2 und die ihr gleiche im zu untersuchenden Gasmisch angeben.

III. Resultate.

1. Messung der O_2 -Ausbeute (in Bezug auf das Stromäquivalent) bei der Elektrolyse.

Die Ausbeute wurde in Funktion der Stromstärke von $2,6 \cdot 10^{-6}$ bis $134 \cdot 10^{-6}$ Amp. untersucht. Sie stieg in diesem Intervall von gut 1^0_{00} auf ca. 800^0_{00} (Fig. 4). Im Bereich der grösseren Ausbeuten (oberhalb 15^0_{00}) wurde das entstehende Knallgasvolumen auf Grund der horizontalen Verschiebung eines Wasser-Meniscus in einer geeichten Kapillare bestimmt¹⁾. Zur Ermittlung der Messgenauigkeit dienten Nullversuche, bei denen ohne Elektrolyse nur die durch Druck- und Temperaturschwankungen²⁾ verursachten Verschiebungen des Meniscus einerseits beobachtet, andererseits berechnet wurden. Der hieraus ermittelte wahrscheinliche Fehler in der Volumenbestimmung ist, auf die Ausbeute umgerechnet, bei den einzelnen Messpunkten in Fig. 4 angegeben. Bei $10 \cdot 10^{-6}$ Amp. (16^0_{00} Ausbeute) musste bereits eine Versuchsdauer von rund 120 h angewendet werden, um nur eine Genauigkeit von 12% zu erzielen. Für noch kleinere Stromstärken $(2,6-10) \cdot 10^{-6}$ Amp. wurde daher ein anderes Verfahren benützt: Unter Anwen-

¹⁾ Um Störungen durch die relativ grossen Kapillarkräfte zu eliminieren, tauchte der wassergefüllte Teil der Kapillaren in ein weites Becherglas ein. Durch Heben und Senken des Glases konnte der Meniscus in der Kapillaren hin und her geschoben werden. So wurde für gute Benetzung der inneren Kapillarenoberfläche gesorgt, und die störungsfreie reproduzierbare Einstellung des Meniscus kontrolliert.

²⁾ Um starke Temperaturschwankungen zu vermeiden, befand sich der Elektrolyseapparat in einer wärmeisolierten Glaswanne, die mehrere Liter Paraffinöl enthielt. In 24 Stunden änderte sich die Temperatur nur um wenige Zehntelgrade. Sie wurde auf $0,005^0$ genau mit einem Beckmann'schen Thermometer gemessen.

dung des Stokes'schen Gesetzes wurde aus der mikroskopisch gemessenen Steiggeschwindigkeit der entstehenden O_2 -Gasbläschen ihr Volumen ermittelt. Dieses Verfahren führt nur bei äusserst schwacher Gasentwicklung zum Ziel, wenn höchstens an 2—3 aktiven Stellen der Elektrode in regelmässiger langsamer Folge Blasen aufsteigen. In Fig. 4 sieht man, dass sich die nach STOKES's ermittelten Punkte, wenn auch stärker streuend, den andern gut anschliessen. Das berechtigt zu der bereits stillschweigend ge-

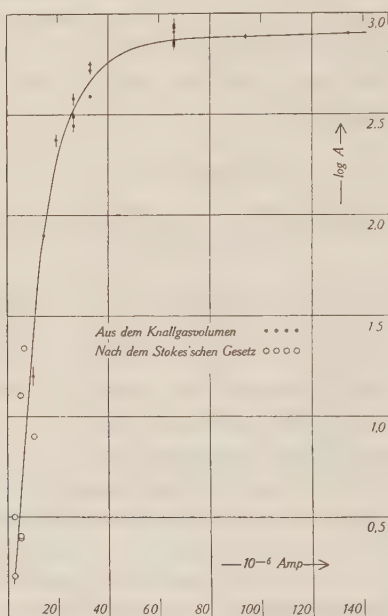


Fig. 4.

Elektrolyse-Ausbeute (A), ausgedrückt in $\frac{0}{100}$ des Stromäquivalentes, in Funktion der Stromstärke. Die durch Messung des Knallgasvolumens ermittelten Punkte sind mit ihrem wahrscheinlichen Fehler eingetragen¹⁾.

machten Annahme, dass das bei der ersten Methode gemessene Knallgasvolumen wirklich zu $\frac{1}{3} O_2$ enthalte.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass diese Ausbeute-Kurve für die Untersuchungen, anlässlich derer wir die L.B. verwendeten, nicht benötigt wurde. Sie wurde lediglich nachträglich zur Orientierung aufgenommen. Mit einem, in Hinblick auf eine genaue Ausbeutebestimmung besonders konstruierten Elektrolyseapparat,

¹⁾ Dort, wo sich die Breite des wahrscheinlichen Fehlers für verschiedene Messpunkte überlappt, ist nur die totale Breite des Intervalls ohne Zuordnung zu den einzelnen Messpunkten angegeben.

wird es wahrscheinlich möglich sein, weniger stark streuende Messpunkte zu erhalten und speziell die Genauigkeit der nach STOKES's bestimmten Punkte wesentlich zu vergrössern¹⁾

2. Bestimmung der Empfindlichkeit des O₂-Nachweises.

Die Maximal-Empfindlichkeit, welche oft mit sehr gut leuchtenden Kulturen erzielt wurde, entsprach einem Mischungsverhältnis des O₂ zum N₂ wie $1 : 1,4 \cdot 10^{10}$, oder einem O₂-Partialdruck von $5 \cdot 10^{-8}$ mm Hg (N₂-Gasstrom $g = 200$ cm³/Min; Elektrolysestrom $i = 2,6 \cdot 10^{-6}$ Amp.; Ausbeute $A = 1,6\%$). Normalerweise entsprach die Schwellen-Empfindlichkeit der L.-B. einem Mischungsverhältnis von $1 : 2,7 \cdot 10^9$ ($g = 200$ cm³/Min; $i = 5,3 \cdot 10^{-6}$ Amp.; $A = 4,0\%$). Diese Anfangs-Empfindlichkeit²⁾ z. B. behalten die in die Apparatur eingefüllten L.B. bis zu 1,5 h, dann sinkt sie mehr oder weniger rasch ab. Nach 4 h Aufenthalt der L. B. in der Apparatur betrug das Mischungsverhältnis bei der Empfindlichkeitsschwelle beispielsweise noch $1 : 1,4 \cdot 10^7$ ($g = 200$ cm³/Min; $i = 20 \cdot 10^{-6}$ Amp.; $A = 200\%$). Im übrigen hängt der zeitliche Verlauf dieser Empfindlichkeits-Abnahme weitgehend davon ab, was für Gase und Dämpfe ausser N₂ durch die L.B.-Flüssigkeit geleitet werden.

Die Genauigkeit der Empfindlichkeitsbestimmung im einzelnen Fall ist naturgemäss nicht sehr gross, da es sich um einen Schwellenwert handelt, der durch Eingabeln festgelegt wird. Lag dieser Schwellenwert im Bereich der Verdünnungen von $1,4 \cdot 10^{10}$ bis $6,5 \cdot 10^8$, so entsprachen die kleinsten Sprünge beim Eingabeln einer Änderung der Elektrolyse-Stromstärke von ca. $1,3 \cdot 10^{-6}$ Amp., was einer Änderung der O₂-Konzentration um den Faktor ca. 2 entspricht.

3. Verhältnisse oberhalb des Schwellenwertes.

Messungen mit Vergleichslichtquelle (nach Kap. II, Ziff. 5 B, b) wurden keine ausgeführt, da bei unseren Untersuchungen das Verfahren nach Ziff. 5, B, a genügte. Dagegen seien noch folgende Anhaltspunkte für die Zunahme der Lichtintensität mit der O₂-

¹⁾ Im Gegensatz zu Fig. 2 müssten die Elektroden von unten her in den Elektrolyten eintreten. Ferner müssten die Blasen statt in einer Flüssigkeitsschicht von ca. 1 mm Höhe durch eine viel höhere Flüssigkeitssäule aufsteigen.

²⁾ Kontrollmessungen gaben für 3 verschiedene Beobachter übereinstimmende Resultate. Den Herren Dr. A. LEEMANN und Dr. F. MÜLLER, die sich hierfür freundlichst zur Verfügung stellten, möchte ich hiermit meinen Dank abstatten.

Konzentration angegeben: Die Lichtintensität nimmt mit wachsender O_2 -Konzentration so gewaltig zu, dass folgende Stufen unmittelbar von Auge erkannt werden können.

Beispiel für L.B. mit *normaler* Schwellenempfindlichkeit; Gasstrom = $200 \text{ cm}^3/\text{Min.}$

Subjektiver Lichteindruck	Korrespondierender Elektrolyse-Strom in Milliamp. <i>i</i>	Mischungsverhältnis $O_2:N_2=1:M$ <i>M</i>	Zunahme der O_2 -Konz. um den Faktor <i>F</i> <i>F</i>
gerade erkennbar: gemessene Schwelle	0,005	$2,7 \cdot 10^9$	13
schwach, aber ohne weiteres sichtbar	0,01	$2 \cdot 10^8$	
sehr hell, die im Rohr <i>E</i> (Fig. 1) aufsteigenden Blasen leuchten	0,05	$1,5 \cdot 10^6$	130
das ganze Innere des Kastens (siehe Kap. II Ziff. 3) ist erleuchtet	0,5	$1 \cdot 10^5$	15

Die Sättigungskonzentration¹⁾ an O_2 , die dieselbe Leuchtintensität hervorbringt wie Luft, ist schon in gewöhnlichem Stickstoff aus Stahlflaschen (0,5—1,0% O_2 -Gehalt) vorhanden.

4. Bei der Anwendung des Verfahrens benötigte Zeiten.

Tritt ein Gasgemisch in die L.B.-Flüssigkeit ein, das diese überhaupt zum Leuchten bringen kann, so leuchtet sie praktisch sofort auf²⁾.

Anders liegen die Verhältnisse bei den O_2 -Beimischungen mit Hilfe der KOH-Elektrolyse. Hier dauert es eine gewisse Zeit, bis Elektrolyt und Elektrode mit Sauerstoff gesättigt sind, und nun wirklich gleichviel O_2 durch die Flüssigkeitsoberfläche in den N_2 -Strom austritt, wie elektrolytisch entsteht. Diese Zeit liegt für Ströme von $(3-10) \cdot 10^{-6}$ Amp., wie sie für die Empfindlichkeitsmessung guter L.B. in Frage kommen, etwa im Intervall von 30 Sec bis 5 Min. Kleinerer Stromstärke entspricht *ceteris paribus*

¹⁾ In diesem Bereich der Sättigungskonzentration normaler L.B.-Kulturen mit der gleichen Anordnung zu arbeiten, wird vielleicht gelingen, wenn man einfach unempfindlichere L.B. verwendet (überalterte oder geschädigte Kulturen).

²⁾ Beim Prüfen einer Flüssigkeit auf gelösten O_2 trat das Aufleuchten z. B. eine Minute nach dem Zeitpunkt auf, zu dem der N_2 durch die betreffenden Waschflasche zu strömen eingesetzt hatte. Dies entspricht etwa der Zeit, die der Gasstrom von $200 \text{ cm}^3/\text{Min}$ bei dem vorhandenen toten Volumen der Zuleitungen (ca. 170 cm^3) braucht, bis er bei den L.B. eintrifft.

längere Verzögerungszeit. Empfindlichere L.B. leuchten bei gleicher Stromstärke rascher auf als unempfindliche.

Bevor man von einer Messung zur nächsten übergeht, muss so lange O_2 freies Trägergas durch die L.B.-Bouillon strömen, bis mit Sicherheit jedes Leuchten verschwunden ist. Die dazu benötigte Zeit ist *ceteris paribus* um so grösser, je intensiver das Leuchten war. Sie beträgt im Bereich unmittelbar über der Schwelle etwa 1—2 Minuten, für 10^5 mal grössere Konzentrationen ca. 5 Minuten. Frisch von aussen in die Apparatur eingefüllte L.B. sind nach ca. 15—20 Minuten dunkel. Diese Zeiten gelten für einen Stickstoff-Strom von $200\text{ cm}^3/\text{Min.}$

5. Träger-Gase und Dämpfe.

A) Minimal benötigte Menge des zu prüfenden Gasgemisches.

Diese hängt nur davon ab, wie lange man braucht, um mit dem Auge das Leuchten sicher zu erkennen und evtl. die Vergleichslichtquelle (nach Kap. II, Ziff. 5, B, b) einzustellen. Für O_2 -Konzentrationen in Schwellennähe sollte hierfür minimal 1 Minute, d. h. 200 cm^3 Gasgemisch zur Verfügung stehen. Für höhere Konzentrationen kann diese Zeit bis auf ca. 10 Sekunden, d. h. das benötigte Volumen auf etwa 35 cm^3 reduziert werden. Handelt es sich nur um den qualitativen Nachweis des O_2 -Gehaltes eines Gasgemisches, der 3—4 Zehnerpotenzen über dem Schwellenwert liegt, so genügen schon eine oder einige wenige Gasblasen, die man durch die L.B.-Flüssigkeit des Beobachtungsrohres aufsteigen lässt.

B) Verwendete Gase und Dämpfe und ihre Schädlichkeit für die L.B.

Stickstoff hat keine spezifisch schädigende Wirkung und wurde in aller erster Linie als Träger für die O_2 -Beimischungen verwendet. Auch für die Empfindlichkeitsmessungen war normalerweise N_2 das Trägergas.

Kohlendioxyd wirkt Empfindlichkeits-verringern auf die L.B. Nach kurz andauernder Kohlendioxyd-Einwirkung (bis zu ca. 5 Min.) lässt sich unmittelbar nachher in N_2 -Atmosphäre allerdings keine Abnahme der Empfindlichkeit feststellen. Auch mehrmalige Wiederholung dieser Einwirkung schädigt nicht. Bei längerer Einwirkung der CO_2 -Atmosphäre tritt jedoch eine deutliche Verminderung der Empfindlichkeit auf, die auch nach Ent-

fernung des CO_2 zum Teil anhält. Als quantitative Angaben seien die Resultate zweier Versuche angeführt:

1. Versuch

Zeit in Minuten	0	von 15 an	35	von 65 an	90
Art des Trägergases	N_2	CO_2	CO_2	N_2	N_2
Mischungsverhältnis	$1,4 \cdot 10^{10}$		$6,5 \cdot 10^6$		$2 \cdot 10^8$

2. Versuch

Zeit in Minuten	0	von 6 an	25	von 28 an	40	von 52 an	ca. 60	von 66 an	ca. 75
Art des Trägergases	N_2	CO_2	CO_2	N_2	N_2	CO_2	CO_2	N_2	N_2
Mischungsverhältnis	$7 \cdot 10^7$		$3 \cdot 10^6$		$1,5 \cdot 10^7$		$6,5 \cdot 10^6$		$6,5 \cdot 10^6$

Wasserstoff. H_2 aus der Bombe (0,5—1% O_2 -Gehalt) bringt die L.B. zu starkem Leuchten. Die schädlichen Einwirkungen des H_2 scheinen nicht gross zu sein¹⁾, da L.B., die 5 h lang mit Bomben- H_2 durchströmt wurden, nachher mit Luft geschüttelt so hell wie eine nicht mit H_2 behandelte Kontrolle leuchteten. Die bei der KOH-Elektrolyse entwickelten kleinen H_2 -Mengen passierten demgemäss die L.B.-Bouillon ohne jede störende Einwirkung.

Wasserdampf. Stört in keiner Weise (trivial, wegen des wässerigen Nährbodens).

Quecksilberdampf. Der in der Apparatur vorhandene Hg-Dampf (herrührend von den Hg-Überdruckventilen und dem Hg-Manometer) hatte keine erkennbare Schädigung der L.B. zur Folge.

Methylalkoholdampf. Die Dämpfe, welche bei Zimmertemperatur von einem Gemisch aus Methylalkohol (1 Teil) und Wasser (2 Teile) an durchströmenden N_2 abgegeben werden, schädigten die L.B. nicht. Derartiger, Metanol-Dampf-haltiger Stickstoff wurde jeweils ca. 5 Minuten lang durch die L.B.-Flüssigkeit geleitet.

IV. Vergleich der erzielten Empfindlichkeit mit der von Eymers und Schouwenburg bestimmten Quantenausbeute.

1. Resultate von Eymers und Schouwenburg.

EYMERS und SCHOUWENBURG²⁾ fanden für das Photobacterium phosphoreum bei $16,1^\circ\text{C}$ eine mittlere Quantenausbeute von 450

¹⁾ Hierfür sprechen auch die Messungen von HARVEY (l. c.).

²⁾ J. G. EYMERS und K. L. VAN SCHOUWENBURG, Enzymologia **1**, 107, 1936/37; **1**, 328, 1936/37; **3**, 235, 1937.

verbrauchten O_2 -Molekülen pro emittiertes Lichtquant¹⁾. Dazu kommt noch der 4-fache Betrag an O_2 , der bei den Atmungsprozessen der L.B. verbraucht wird, die mit der „Lichtatmung“ nichts zu tun haben, so dass sich total eine O_2 -Aufnahme $Q = 2,25 \cdot 10^3$ O_2 -Moleküle pro emittiertes Quant ergibt. Die ebenfalls von obigen Autoren gemessene spektrale Energieverteilung ergab sich als unabhängig von allen äusseren Bedingungen und auch für verschiedene Leuchtbakteriensorten als identisch, woraus dann der berechnete Schluss gezogen wird, dass es sich überall um den gleichen Prozess handelt und die Ergebnisse an verschiedenen Bakterien miteinander vergleichbar sind.

2. Berechnung der Lichtemission in Quanten bei unseren Versuchen.

Die Berechnung basiert auf der Überlegung, dass beim Schwellenwert derjenige Bruchteil (k) des emittierten Lichtes, der effektiv in die Augenpupille gelangt, gerade gleich der kleinsten vom Auge noch wahrnehmbaren Lichtmenge ist. Die Gesamtleistung in erg pro sec, die von unserer Bakterien-Flüssigkeit bei eben noch erkennbarem Leuchten in Form von Licht emittiert wird, sei L . Dann wird $L \cdot k = \frac{p \cdot E}{e} \cdot f$. Hierbei bedeutet p die Anzahl Quanten der Wellenlänge $\lambda = 5050$ Å.E.²⁾, die pro Sekunde, ausgehend von einer punktförmigen Lichtquelle, in unser Auge gelangen müssen, um eben noch einen Lichtreiz zu erzeugen. Nach CHARITON and LEA³⁾ und REEVES⁴⁾ ergibt sich p zu 200 Quanten/sec für Dauerreiz (im Gegensatz zu Lichtblitzen die Bruchteile von Sekunden dauern und total weniger (minimal 17—30) Quanten benötigen). E ist die Energie eines Quants der Wellenlänge $\lambda = 5050$ Å.E. und beträgt $3,9 \cdot 10^{-12}$ erg.

Unter e sei die relative Sichtbarkeit der L.B.-Emission verstanden, was bedeutet, mit welcher relativen Empfindlichkeit das von den L.B. emittierte Spektralband, im Vergleich zur Wellenlänge 5050 Å.E. vom dunkeladaptierten Auge wahrgenommen wird. Diese Grösse e wurde nun mit Hilfe der spektralen Energiever-

¹⁾ Bei $9,1^\circ C$ und $22,0^\circ C$ waren die mittleren Ausbeuten 800 resp. 195 O_2 -Molekel pro Quant. Die Ergebnisse der einzelnen Versuche bei fester Temperatur schwanken; die Autoren sagen hierzu: „... the efficiency of the light emitting process does not only depend on temperature, but also on several other for the greater part unknown factors of which the age and the history of the culture may only be mentioned.“

²⁾ 5050 Å.E. ist diejenige Wellenlänge, für welche das dunkeladaptierte Auge (Stäbchenapparat) maximale Empfindlichkeit besitzt.

³⁾ J. CHARITON and C. A. LEA, Proc. of the Royal Soc. A **122**, 304, 1929.

⁴⁾ P. REEVES, Astrophysical Jour. **46**, 167, 1917; **47**, 141, 1918.

verteilungskurve der L.B.¹⁾ nach EYMERS und SCHOUWENBURG (l. c.) und der relativen Stäbchen-Empfindlichkeitskurve nach KÖNIG²⁾ durch Integration ermittelt und ergibt sich zu $e = 0,656$.

Der Faktor f ³⁾ berücksichtigt die Tatsache, dass die Leuchterscheinung nicht punktförmig, sondern flächenhaft ist. Nach LÖHLE⁴⁾ und REEVES (l. c.) ergibt sich für den bei unserer Anordnung auftretenden Schwinkel von 21° , unter dem die leuchtende Fläche dem Auge erscheint, f zu ca. 40^5).

Die Grösse k endlich gibt von den insgesamt ausgestrahlten Quanten den ins Auge gelangenden Bruchteil an und wurde folgendermassen abgeschätzt: Sie setzt sich zusammen aus $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = k$. Die leuchtende Flüssigkeit im Beobachtungsrohr B strahlt zur Hälfte in den oberen, zur Hälfte in den unteren Halbraum, somit $k_1 = 0,5$. Die Länge des verspiegelten Rohres B war so gewählt worden, dass die resultierende Schichtdicke der leuchtenden Flüssigkeit gerade etwa Sättigung ergab, eine Vergrösserung der Schichtdicke also keine Verstärkung des Leuchtens mehr verursachte⁶⁾. Die obersten Schichten tragen daher voll, die untersten überhaupt nicht mehr zu dem durch die Oberfläche austretenden Lichtstrom bei. Interpoliert man für den dazwischen liegenden Teil in erster Näherung linear, so ist der Beitrag im Mittel $0,5$, somit $k_2 = 0,5$. Schliesslich muss noch abgeschätzt werden, welcher Bruchteil (k_3) des durch die Oberfläche austretenden Lichtstromes auf die Augenpupille fällt. Die Oberfläche strahle nach dem Lambert'schen Gesetz mit der Leuchtdichte s . Über den ganzen Halbraum integriert, emittiert das Flächenelement do den Lichtstrom $P = do \cdot s \cdot \pi$. Die Augenpupille erfüllt, vom Flächenelement do aus gesehen, einen Raumwinkel von $\omega = 0,036^7$). Das Flächenelement sendet somit einen Lichtstrom von $\Delta P = do \cdot s \cdot \cos \varphi \cdot \omega$ auf die Pupille. Hierbei kann $\cos \varphi$ (φ = Winkel des Lichtstrahles

1) Langwelliges Ende 6100 Å.E., Maximum 4900 Å.E., kurzwelliges Ende 4300 Å.E.

2) Handb. der Physik, Band XIX, p. 12; herausgeg. v. H. GEIGER und K. SCHEEL, Berlin 1928, bei J. Springer.

3) Der Faktor f ist folgendermassen definiert: Damit eine leuchtende Fläche, die mit der Wellenlänge $\lambda = 5050$ Å.E. strahlt, dem Auge eben noch sichtbar ist, muss sie $p \cdot f$ Quanten/sec auf unsere Pupille senden, wobei f im wesentlichen eine Funktion des Schwinkels ist, unter dem dem Auge die Fläche erscheint.

4) F. LÖHLE, Z. f. Physik **54**, 137, 1929.

5) Für extrafoveales Sehen.

6) Wegen Streuung und Absorption in der L.B.-Flüssigkeit.

7) Der Querschnitt der voll dunkeladaptierten Pupille ist $0,57 \text{ cm}^2$, der Abstand 4 cm .

mit der Normalen auf do) wegen der geringen Grösse von ω in erster Näherung constant = 1 gesetzt werden. Es wird also

$$k_3 = \frac{\Delta P}{P} = \frac{\omega}{\pi} = 1,15 \cdot 10^{-2}$$

und schliesslich $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 2,9 \cdot 10^{-3}$.

$L = \frac{p \cdot E \cdot f}{e \cdot k}$ ergibt sich damit zu $16,4 \cdot 10^6$ erg pro sec. Hieraus lässt sich nun die Zahl Z der pro sec ausgestrahlten Quanten folgendermassen berechnen: EYMERS und SCHOUWENBURG (l. c.) geben die spektrale Energieverteilung der L.B.-Strahlung als Kurve an, deren Ordinaten aber nur die relativen Intensitäten J_λ geben. Die absolute Intensität in $\text{erg} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ sei $\varepsilon_\lambda = r \cdot J_\lambda$, wobei r eine unbekannte Konstante ist. Dann wird

$$Z = \frac{1}{h} \cdot \int \frac{\varepsilon_\lambda \cdot d\lambda}{v} = \frac{r}{h \cdot c} \int J_\lambda \cdot \lambda \cdot d\lambda.$$

Andererseits ist

$$L = \frac{p \cdot E \cdot f}{e \cdot k} = \int \varepsilon_\lambda \cdot d\lambda = r \cdot \int J_\lambda \cdot d\lambda.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen r , so erhält man

$$Z = \frac{L}{h \cdot c} \cdot \frac{\int J_\lambda \cdot \lambda \cdot d\lambda}{\int J_\lambda \cdot d\lambda}.$$

Die Werte der beiden Integrale wurden aus der Kurve von EYMERS und SCHOUWENBURG (l. c.) ermittelt, indem diese durch eine Treppenkurve mit $\Delta\lambda = 100$ Å.E. approximiert wurde. Es ergibt sich $Z = 4,22 \cdot 10^6$ Quanten pro Sekunde.

3. Vergleich unserer Versuche mit Eymers und Schouwenburg.

Zur Erzeugung dieser $Z = 4,22 \cdot 10^6$ Quanten pro Sekunde braucht es nach EYMERS und SCHOUWENBURG bei $16,1^\circ$ im Mittel $Z \cdot Q = 9,5 \cdot 10^9$ O_2 -Moleküle pro Sekunde. In unseren Versuchen andererseits mussten im Mittel $20 \cdot 10^9$ O_2 -Moleküle pro Sekunde¹⁾ in die L.B.-Flüssigkeit eintreten, um im Bereich normaler Empfindlichkeit eben noch ein merkbares Leuchten hervorzurufen. Der O_2 , welcher in den durch die L.B.-Bouillon aufsteigenden Gas-

¹⁾ Das entspricht einem N_2 -Strom von $200 \text{ cm}^3/\text{Min}$ und 1 Atm. , der in der Verdünnung $1:1,4 \cdot 10^{10}$ bis $1:2,7 \cdot 10^9$ Sauerstoff enthält (resp. $6,4 \cdot 10^9$ bis $33 \cdot 10^9$ O_2 -Moleküle pro sec liefert).

blasen enthalten ist, wird hierbei sicher nicht restlos absorbiert. Um denselben Wert von rund 10^{10} O₂-Molekülen pro Sekunde zu erhalten wie nach EYMERS und SCHOUWENBURG, müsste diese Absorption zu rund 50% angesetzt werden. Die Übereinstimmung ist auf jeden Fall überraschend gut, wenn man bedenkt, dass die Abschätzung von f und besonders von k doch nur recht roh ist.

Für das stetige Interesse, die Ratschläge und die zur Verfügung gestellten Mittel des Institutes möchte ich nicht versäumen, meinem lieben Vater, Herrn Prof. EDGAR MEYER, meinen besten Dank auszusprechen.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quanta

par E. C. G. Stueckelberg.

(18. X. 41.)

Résumé. Une légère modification de la mécanique d'EINSTEIN (remplaçant l'extrémum de $\int m ds - \int m \sqrt{-\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu} d\lambda$ par celui de $\frac{1}{2} \int \dot{q}_\mu \dot{q}^\mu d\lambda$) permet d'établir une nouvelle mécanique relativiste. Ses résultats ne diffèrent pas des résultats obtenus par la forme habituelle, si l'on ne fait intervenir que des champs gravifiques et électromagnétiques. Mais, tout en gardant la covariance de la théorie, on peut introduire des *champs nouveaux* qui ont pour conséquence la *création de particules dans la théorie classique*.

La quantification de la théorie représente l'extension logique de la théorie de Schroedinger aux quatre dimensions de l'espace-temps. Un de ses résultats est la *création de particules par des champs électromagnétiques*.

Exposé général de la théorie¹⁾.

Théorie classique du mouvement d'un point de masse. — Au cours du temps t , le point matériel décrit une courbe troisdimensionnelle, la *trajectoire*. Celle-ci est déterminée par les trois fonctions $x^i = q^i(\tau)$, qui donnent les valeurs des trois coordonnées ($i = 1, 2, 3$) x^i au temps $t = \tau$. Si l'on introduit le temps $t = x^4$ comme une quatrième coordonnée, et si, en plus, on considère $t = \tau(\lambda) = q^4(\lambda)$ comme fonction d'un paramètre λ quelconque, la courbe quadridimensionnelle $x^\mu = q^\mu(\lambda)$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) représente la *ligne d'univers* en termes d'un paramètre quelconque λ .

La théorie d'EINSTEIN (§ 1) donne une loi qui permet de construire ces lignes d'univers, si le *champ de gravitation* $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x)$ et le *champ électromagnétique* $(B^{\mu\nu}(x) = -B^{\nu\mu}(x))$ sont donnés comme fonctions d'espace-temps $(B^{\mu\nu}(x) = B^{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^4))$. Une telle ligne est entièrement déterminée si ^{1°} la position $\vec{x} = \vec{q}$ ($= q^1, q^2, q^3$) et la vitesse $\vec{v} = (dq^1/d\tau, dq^2/d\tau, dq^3/d\tau)$ sont données pour un certain temps initial $t = q^4$ et si ^{2°} un certain nombre e/m (rapport entre la charge électrique et la masse de repos) qui caractérise le point matériel est connu.

Ne sont admises dans la théorie d'EINSTEIN, que les lignes d'univers ayant une *seule intersection* avec un hyperplan $t = x^4 =$

$= \text{const}$ (cf. ligne A en fig. 1)*). En effet, ce ne sont que ces lignes qui correspondent à la conception habituelle de causalité: La seule intersection $x^i = q^i(t = \text{const})$ est l'endroit où l'on trouve la particule au temps t . D'autres lignes (par ex. la ligne B en fig. 1) montrent deux intersections pour des plans $t - x^4 = \text{const} \ll 0$ et aucune intersection pour $t - x^4 = \text{const} \gg 0$. Si, au moment de l'établissement de la théorie d'EINSTEIN, de telles lignes n'étaient pas discutées, c'était parce que le phénomène de la création et de l'annihilation de paires de particules échappait encore aux expérimentateurs et aux théoriciens. Or la ligne B de la fig. 1) décrit une telle annihilation mutuelle de deux particules au moment $t \sim 0$.

Tandis que la mécanique d'EINSTEIN n'admettait donc que des courbes du type A , la mécanique proposée au § 2 se libère de cette restriction. Son résultat sera que, en plus des lignes A , des courbes du type B ou C peuvent apparaître. Les deux partenaires d'une paire ainsi créée ou anéantie ont des charges électriques opposées. Pourtant, les phénomènes B et C ne font apparition que si l'on admet, en plus des champs électromagnétiques et gravifiques, un champ d'un type nouveau $K^\mu(x)$ (§ 3). En l'absence de ce champ, la mécanique proposée ne présente pas de nouveaux phénomènes. Il en sera tout autrement dans la nouvelle mécanique quantifiée.

Théorie quantique du mouvement d'un point de masse. — La mécanique proposée permet une quantification en quatre dimensions analogue à celle introduite par SCHROEDINGER pour les trois dimensions spatiales en théorie non relativiste. Le rapport entre la mécanique classique et la mécanique quantique (§ 5) est alors celui entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire dans le continu quadridimensionnel de l'espace-temps. Pour en donner un exemple, nous considérons le cas où, au temps $t = 0$, un champ électrique homogène très fort E_1 (parallèle à l'axe x^1) apparaît pendant un intervalle très court δt . Cet événement peut être décrit par un potentiel vecteur Φ^μ à une seule composante $\Phi^1 = E_1 \delta t$ pour $t < 0$, qui disparaît pour $t > 0$. L'hypersurface $t = 0$ représente ainsi une surface de discontinuité dans le continu spatio-temporel. Un rayon au sens de l'optique géométrique est *réfracté* sur cette surface (cf. fig. 2). La réfraction n'est pas autre chose que le changement de vitesse dû à l'accélération subie par la particule pendant l'intervalle δt . La ligne d'univers de la mécanique classique correspond à ce rayon réfracté. Mais l'optique ondu-

*) Les figures ont été publiées à l'occasion de l'anniversaire de M. A. HAGENBACH dans le numéro précédent. *Helv. Phys. Acta* **14**, 588 (1941).

toire montre qu'à toute *réfraction* est liée une *réflexion* d'une intensité non nulle. Ce rayon réfléchi est du type *C* (ou *B*) de la fig. 1. Notre nouvelle mécanique montre ainsi que, en théorie des quanta, le champ électromagnétique a la propriété de créer et d'annihiler des paires de particules.

Remarquons, pour terminer cette introduction, que la mécanique d'EINSTEIN ne permettait pas de quantification. L'*électron de Dirac* n'est pas la quantification du point matériel d'EINSTEIN, mais celle d'un *système plus complexe* (point de masse avec des degrés de liberté intérieurs)²⁾. D'autre part, l'équation de SCHROEDINGER-GORDON n'est pas une quantification du point de masse non plus, mais la *théorie d'un continu scalaire* à deux composantes (= une composante complexe). La *quantification de ce continu*, par PAULI et WEISSKOPF³⁾, montre alors le phénomène de la création et de l'annihilation de paires de quanta de charges opposées.

La mécanique ici présentée nous semble donc être la seule mécanique relativiste du point de masse qui permet la quantification directe.

§ 1. La mécanique d'Einstein.

Soit $g_{\mu\nu}(x)$ les composantes covariantes du tenseur fondamental (= potentiel gravifique) et dq^μ les différences de deux événements voisins sur la ligne d'univers $x^\mu = q^\mu(\lambda)$ qui est parcourue par le point matériel. La grandeur $(ds)^2 = g_{\mu\nu}(q) dq^\mu dq^\nu$ peut alors être positive, nulle ou négative. Deux événements sont situés temporellement l'un vis-à-vis de l'autre si $(ds)^2 > 0$. dq^4 ne peut jamais devenir zéro sur une ligne où l'on a partout $(ds)^2 > 0$. Sur une telle ligne, le temps propre est défini par

$$ds = \pm \sqrt{g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu} \text{ suivant que } dq^4 \gtrless 0 \quad (1,1)$$

L'équation fondamentale de la mécanique d'EINSTEIN prend alors la forme « masse au repos » par « accélération propre » égale à « force gravifique plus force électromagnétique ». On définit d'abord la quadri-vitesse normalisée $w^\mu = dq^\mu/ds$; $w_\mu w^\mu = -1$. La loi, pour une particule de masse de repos m et de charge électrique e s'écrit sous forme

$$m \frac{dw^\mu}{ds} = -m \Gamma_{\alpha\beta}^\mu w^\alpha w^\beta + e B^{\mu\nu} w_\nu \quad (1,3)$$

Cette loi dérive d'un principe de variation $\delta I = 0$, où I se compose de deux parties $I = I_{\text{mat}} + I_{\text{int}}$.

$$I_{\text{mat}} = m \int_{q'}^{q''} ds ; \quad I_{\text{int}} = e \int_{q'}^{q''} dq^\mu \Phi_\mu(q) \quad (1,4)$$

Sont à varier les lignes d'univers $q^\mu = q^\mu(\lambda)$ reliant l'événement q' à q'' ($q' = (q^1, q^2, q^3, q^4)$). $B_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ sont les dérivées des potentiels $\Phi_\mu(x)$ et $g_{\mu\nu}(x)$

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} ; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (1,5)$$

évaluées pour $x^\mu = q^\mu$.

§ 2. La mécanique nouvelle.

Nous désignons les dérivées de $q^\mu(\lambda)$ par rapport au paramètre λ par $\dot{q}^\mu = \frac{dq^\mu}{d\lambda}$. Alors les équations fondamentales sont :

$$\frac{d}{d\lambda} \dot{q}^\mu = - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + e B^{\mu\nu} \dot{q}_\nu \quad (2,1)$$

et, pour $\dot{q}_\mu = g_{\mu\nu} \dot{q}^\nu$

$$\frac{d}{d\lambda} \dot{q}_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + e B_{\mu\nu} \dot{q}^\nu \quad (2,2)$$

Elles dérivent d'un principe de variation analogue à celui du § 1. I_{int} a la forme identique à (1,4), mais

$$I_{\text{mat}} = \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \frac{1}{2} \dot{q}_\mu \dot{q}^\mu = \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda L_{\text{mat}}(q^\mu, \dot{q}^\mu) \quad (2,3)$$

On vérifie d'abord que la quantité

$$m^2 = - \dot{q}_\mu \dot{q}^\mu \quad (2,4)$$

est une *constante d'intégration* associée à la ligne d'univers. Donc, pour autant que cette constante est choisie positive ($m^2 > 0$), la ligne est une succession de points situés temporellement les uns relativement aux autres. A une augmentation $d\lambda$ correspond alors une variation $dq^4 \geq 0$ suivant que $\dot{q}^4 \geq 0$. Introduisant le ds de la définition (1,1), on trouve ($m = +\sqrt{m^2}$)

$$ds = \pm m d\lambda \quad \text{suivant que} \quad \dot{q}^4 \geq 0 \quad (2,5)$$

La substitution de (2,5) en (2,1) donne l'équation identique à celle d'EINSTEIN (1,3), mais avec les *deux possibilités du signe de e* , soit les équations d'EINSTEIN pour la *particule* (m, e) et pour l'*anti-particule* ($m, -e$). Notre théorie contient donc les deux charges d'une façon absolument symétrique.

Nous étudions alors les équations décrivant la réaction de la particule sur les champs.

Ce sont les équations de gravitation $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ et les équations de MAXWELL. Pour que les premières soient possibles, il faut démontrer l'existence d'un tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ satisfaisant à

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (2,6)$$

en vertu de l'équation de mouvement (2,1) et des équations de MAXWELL

$$\frac{\partial [H^{\mu\nu}]}{\partial x^\nu} = 4\pi [J^\mu]; \quad \frac{\partial [J^\mu]}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2,7)$$

$[F] = \sqrt{-[g]} F$ est la densité tensorielle associée à un tenseur F . $||g||$ est le déterminant des $g_{\mu\nu}$. La première équation (2,7) dérive d'un principe de variation invariant

$$\delta \iiint\!\!\!\int (dx)^4 [\mathcal{L}] = 0 \quad (2,8)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{él}} = \mathcal{L}_{\text{maxw}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ \mathcal{L}_{\text{maxw}} &= -\frac{1}{16\pi} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}; \quad H^{\mu\nu} = -8\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{\mu\nu}} \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= J^\mu \Phi_\mu \end{aligned} \quad (2,9)$$

Les fonctions $\Phi_\mu(x)$ sont à varier. Pour définir J^μ nous introduisons la fonction singulière de DIRAC $[\varrho(x)]^{(1)}$ ayant la propriété

$$\iiint\!\!\!\int_{\Omega} (dx)^4 [\varrho(x)] f(x) = f(0) \text{ ou } = 0 \quad (2,10)$$

suivant que le point $x^\mu = 0$ est contenu en Ω ou non. Si nous ajoutons à $\mathcal{L}_{\text{él}}$ un \mathcal{L}_{mat} défini par

$$[\mathcal{L}_{\text{mat}}] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda g_{\mu\nu}(x) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu [\varrho(x - q(\lambda))] \quad (2,11)$$

et, si nous définissons en $[\mathcal{L}_{\text{int}}]$ le courant $[J^\mu]$ par

$$[J^\mu(x)] = e \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \dot{q}^\mu [\varrho(x - q(\lambda))] \quad (2,12)$$

*) $[\varrho]$ a en effet les propriétés d'une « densité tensorielle » scalaire. $(dx)^4 = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$.

les équations de la mécanique (2,1) et (2,2) partent du même principe (2,8) avec

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{maxw}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (2,13)$$

En plus, des fonctions $\Phi_\mu(x)$, les fonctions $q^\mu(\lambda)$ sont à varier. La grandeur

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\|g\|}} \left(\frac{\partial[\mathcal{L}]}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \Phi_\mu, \quad q^\mu = \text{const} \quad (2,14)$$

satisfait alors à (2,6). $T^{\mu\nu}$ est, en vertu de l'indépendance de \mathcal{L}_{int} des $g_{\mu\nu}$, la somme $T_{\text{maxw}}^{\mu\nu} + T_{\text{mat}}^{\mu\nu}$. $T_{\text{maxw}}^{\mu\nu}$ a la forme habituelle du tenseur d'énergie-impulsion électromagnétique. La densité d'énergie correspondante T_{maxw}^{44} est donc positive. Il en est de même pour

$$[T_{\text{mat}}^{\mu\nu}] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu [e(x - q(\lambda))] \quad (2,15)$$

pour autant que $\dot{q}^4 \neq 0$. La grandeur

$$\begin{aligned} W(t) &= \int \int \int_V (dx)^3 [T^{44}(x^1, x^2, x^3, x^4 = t)] = \pm \dot{q}^4 = mw^4 \quad (2,16) \\ &= \frac{m}{-\sqrt{1 - |\vec{r}(t)|^2}} \text{ suivant que } \dot{q}^4 \gtrless 0 \end{aligned}$$

est en effet toujours positive. Elle représente l'énergie totale portée par la matière. L'intégrale est à prendre sur un volume spatial V entourant la ligne d'univers à l'instant t .

La charge totale de la particule vaut, à ce même instant:

$$\begin{aligned} e(t) &= \int \int \int_V (dx)^3 [J^4(x^1, x^2, x^3, x^4 = t)] = \pm e \quad (2,17) \\ &\text{suivant que } \dot{q}^4 \gtrless 0 \end{aligned}$$

Remarquons ici une différence fondamentale entre la mécanique habituelle et la nôtre: la particule habituelle est caractérisée par deux constantes m et e . Pour prédire la ligne d'univers, il suffit de mesurer, à un certain moment $t = q^4$, les trois coordonnées q^i et les trois composantes de sa vitesse $v^i = \delta q^i / \delta q^4$. Dans notre modèle, la particule est caractérisée par une seule constante e . Nous mesurons d'abord, comme dans la théorie habituelle, à un certain moment $t = q^4$, les trois coordonnées q^i et, à un moment plus tard $q^4 + \delta q^4$ ($\delta q^4 > 0$), la position $q^i + \delta q^i$. Ensuite, dans une expérience de déflexion, nous observons son e/m ; e étant donné, $m^2 = -\delta q_\mu \delta q^\mu / \delta \lambda^2$ déterminera la valeur absolue de

$\delta\lambda$. Le signe de $\delta\lambda$ est déterminé par le signe de e/m . De cette manière les q^μ et les \dot{q}^μ sont déterminés pour une valeur initiale de λ (par ex. $\lambda = 0$) et la ligne d'univers peut être prédite sous sa forme $x^\mu = q^\mu(\lambda)$ en résolvant l'équation différentielle (2,1).

§ 3. La production de paires de particules par des champs non électromagnétiques en mécanique classique.

Si l'on ajoute aux seconds membres de (2,1) un terme $K^\mu(q)$ dû à un champ $K^\mu(x)$, la valeur de $m^2 = -\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu$ ne reste plus constante*). Ce nouveau champ a donc pour effet de changer « la masse de repos » de la particule. Si, en particulier, on a $K_\mu = \partial U / \partial x^\mu$, la grandeur

$$R = -\frac{1}{2} m^2 + U = \frac{1}{2} \dot{q}_\mu \dot{q}^\mu + U(q) \quad (3,1)$$

jouera le rôle de *constante d'intégration*. La fig. 1 illustre l'exemple où seule la composante K^4 diffère de zéro dans l'intervalle $t_2 - t_1$ avec $U(t > t_2) = 0$ et $U(t < t_1) = \text{const} \neq 0$.

La courbe *A* montre un changement de la masse de repos de la particule, accompagné d'une accélération. Si le champ K^4 est plus fort, la ligne se déforme en la forme *B*. Si le champ est de signe opposé, nous trouverons des lignes du type *C*. Dans les régions où le champ K_4 disparaît et où U reste constant, les lignes *B* et *C* représentent, en vertu de (3,1), des paires de particules de même masse m , mais, comme le démontre (2,17), de charges opposées. Un champ K^μ d'ordre plus général, créera des particules de charges opposées mais de masses différentes. La théorie, complétée par ce nouveau champ K^μ , garde naturellement son invariance relativiste. Mais elle montre des phénomènes qui semblent être *contraires à nos conceptions de causalité*. Pour démontrer ceci, considérons la ligne *B* de la fig. 1: Une mesure de q^μ et \dot{q}^μ pour $\lambda = 0$ a été faite, suivant les indications à la fin du § 2. Cette mesure est marquée comme l'événement (1) dans la fig. 1. Ensuite, je produis, au moment t_1 , le champ K^4 pendant l'intervalle $t_2 - t_1$. La ligne d'univers, que je peux prédire en me basant sur les résultats de la mesure (1) et sur ma connaissance de l'intensité du champ produit, est du type *A* ou *B*. Si elle est du type *B*, je sais que, pour $t < t_1$, il y a toujours existé une *antiparticule* telle qu'elle rencontrera, à l'instant $t \sim 0$, la particule observée pour s'annihiler avec elle. Ces prévisions me semblent être *contraires à nos notions de causalité*. Remarquons enfin que les parti-

*) Voir l'éq. (2) de I.

cules peuvent atteindre des vitesses supérieures à celle de la lumière. Par une transformation de LORENTZ, on vérifie que ce dernier phénomène n'est qu'une description alternative de cette même série d'événements.

Ces considérations d'ordre causal nous semblent ainsi interdire l'existence de tels champs.

§ 4. Forme canonique.

L'équation de mouvement sans le champ K^μ (2,1) dérive d'un principe d'HAMILTON $\delta \int d\lambda L = 0$ avec

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_\mu \dot{q}^\mu + e \Phi_\mu(q) \dot{q}^\mu \quad (4,1)$$

Nous introduisons les variables conjuguées $p_\mu = \partial L / \partial \dot{q}^\mu = \dot{q}_\mu - e \Phi_\mu$ et définissons l'hamiltonienne par

$$R(p, q) = -L + p_\mu \dot{q}^\mu = \frac{1}{2} \pi_\mu \pi^\mu \quad (4,2)$$

avec

$$\pi_\mu(p, q) = p_\mu - e \Phi_\mu(q)$$

La définition habituelle des parenthèses de POISSON $\{F, G\} = (\partial F / \partial p_\mu) (\partial G / \partial q^\mu) - (\partial F / \partial q^\mu) (\partial G / \partial p_\mu)$ fournit les relations

$$\{\pi_\mu, \pi_\nu\} = -e B_{\mu\nu}(q); \quad \{\pi_\mu, f(q)\} = \partial f / \partial q^\mu \quad (4,3)$$

La loi de mouvement

$$\dot{F} = \{R, F\} \quad (4,4)$$

permet d'écrire (2,1) sous forme canonique

$$\begin{aligned} \dot{q}^\mu &= \{R, q\} = \pi^\mu \\ \dot{\pi}_\mu &= \{R, \pi_\mu\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \pi_\alpha \pi_\beta + e B_{\mu\nu} \pi^\nu \end{aligned} \quad (4,5)$$

L'hamiltonienne elle-même est une constante d'intégration et définit la masse: $2R = -m^2$. Le signe de $\pi^4 = \dot{q}^4$ détermine le signe de la charge.

§ 5. La quantification formelle.

En analogie parfaite avec la théorie de SCHROEDINGER, nous introduisons une amplitude de probabilité scalaire et complexe

$$\psi(q^1, q^2, q^3, q^4, \lambda) = \psi(q, \lambda) \quad (5,1)$$

satisfaisant à l'équation

$$R(p, q) \psi = -\frac{\hbar}{j} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \hbar j \dot{\psi} \quad (5,2)$$

$p_\mu = -\hbar j \partial / \partial q^\mu$ est l'opérateur de différentiation. D'un opérateur hermitéique $F(p, q)$ opérant sur ψ et défini par une série de puissances en p_μ et q^μ , on forme l'espérance mathématique

$$\bar{F}(\lambda) = (\psi, F \psi) = \int \int \int \int (dq)^4 \psi^*(q, \lambda) (F \psi(q, \lambda)). \quad (5,3)$$

ψ est normalisé à $(\psi, \psi) = 1$.

On vérifie que $\dot{F} = \partial \bar{F}(\lambda) / \partial \lambda$ est l'espérance mathématique \dot{F} d'un opérateur \dot{F} défini par le commutateur $([A, B] = AB - BA)$:

$$\dot{F} = \frac{j}{\hbar} [R, F] = \{R, F\} \quad (5,4)$$

La dernière égalité suit des lois de commutation de p_μ et q^μ . Elle assure la correspondance entre la mécanique classique et quantique (cf. éq. (4.4)).

Nous nous limitons au cas où les $g_{\mu\nu}$ sont des constantes avec $||g|| = 1$. La différence entre $[F]$ et F disparaît. La fonction singulière $\varrho(x - q)$, définie par la limite d'une série de puissances en q^μ , permet alors de définir les opérateurs

$$S^\mu(x) = \frac{e}{2} (\pi^\mu \varrho(x - q) + \varrho(x - q) \pi^\mu) \quad (5,5)$$

et

$$A^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} (\pi^\mu \varrho(x - q) \pi^\nu + \pi^\nu \varrho(x - q) \pi^\mu) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\pi_\alpha \varrho(x - q) \pi^\alpha - R \varrho(x - q) - \varrho(x - q) R) \quad (5,6)$$

Leurs espérances mathématiques $S^\mu(x; \lambda)$ et $\bar{A}^{\mu\nu}(x, \lambda)$ formées par des intégrations (5,3) dépendent de λ . On en forme les espérances mathématiques indépendantes de λ :

$$\bar{J}^\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \bar{S}^\mu(x, \lambda) \quad (5,7)$$

$$\bar{T}_{\text{mat}}^{\mu\nu}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \bar{A}^{\mu\nu}(x, \lambda) \quad (5,8)$$

qui satisfont aux équations:

$$\frac{\partial \bar{J}^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0 \quad (5,9)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{\text{mat}}^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} (B^{\mu\nu} \bar{J}_\nu(x) + \bar{J}_\nu(x) B^{\mu\nu}) \quad (5,10)$$

Les définitions (5,7) et (5,8), ainsi que les lois (5,9) et (5,10) montrent leur correspondance avec les grandeurs classiques (2,12) (densité du courant électrique) et (2,15) (tenseur d'énergie-impulsion)*).

Remarquons enfin que l'espérance mathématique de la densité de charge

$$\begin{aligned} \bar{J}^4(x) = J^4(\tilde{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{eh}{2j} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi(\tilde{x}, t, \lambda) - \psi^* \frac{\partial \psi(\tilde{x}, t, \lambda)}{\partial t} \right) \\ - e^2 \Phi^4(\tilde{x}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda |\psi(\tilde{x}, t, \lambda)|^2 \end{aligned} \quad (5,11)$$

peut être *positive ou négative*. Elle est partout positive si $\psi(\tilde{q}, \tau, \lambda) = u(\tilde{q}, \lambda) e^{-i\omega\tau}$ avec $\omega > 0$ et si l'«énergie totale» $\hbar\omega$ est partout plus grande que l'«énergie potentielle» $e\Phi^4$.

L'espérance mathématique de la densité d'énergie matérielle peut être exprimée par

$$T_{\text{mat}}^{44}(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \sum_1^4 |\pi^\alpha \psi(\tilde{x}, t, \lambda)|^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \beta |\varphi_\beta(\tilde{x}, t)|^2 \quad (5,12)$$

$\varphi_\beta(q) = \varphi_\beta(\tilde{q}, q^4)$ est le coefficient de FOURIER dans la série

$$\psi(q, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \varphi_\beta(q) e^{-i\beta\lambda}$$

*) La relation classique $\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$ implique en effet que

$$\partial T_{\text{mat}}^{\mu\nu}/\partial x^\nu = -\partial T_{\text{maxw}}^{\mu\nu}/\partial x^\nu = B^{\mu\nu} J_\nu(x).$$

Les relations (5,9) et (5,10) se démontrent de la manière suivant. On a d'abord (a):

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} = -e\dot{q} \quad (a)$$

Si l'espérance mathématique de q disparaît pour $\lambda = \pm \infty$ (ce qui est le cas pour tout événement fini) (5,9) suit immédiatement. Pour démontrer (5,6) on décompose $A^{\mu\nu}$ en deux termes

$$A^{\mu\nu} = A_0^{\mu\nu} + A_1^{\mu\nu} \quad (b)$$

avec

$$\begin{aligned} e A_0^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\pi^\mu S^\nu + S^\nu \pi^\mu) \\ A_1^{\mu\nu} &= \frac{\hbar^2}{4} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \frac{\partial^2 q}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \end{aligned}$$

La divergence $\partial A_1^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$ disparaît identiquement, tandis que en vertu de (a)

$$\frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2} (\pi^\mu \dot{q} + \dot{q} \pi^\mu)$$

L'intégration partielle des espérances mathématiques fournit (5,10), si on se sert de la relation

$$\dot{\pi}^\mu = \frac{1}{2} e (B_{\mu\nu} \pi^\nu + \pi^\nu B_{\mu\nu}).$$

Pour autant que le paquet d'ondes ψ est composé essentiellement d'ondes correspondant à des valeurs propres de $R - \beta = -\frac{m^2}{2} < 0$, c'est-à-dire à des « masses réelles », l'espérance mathématique de la densité d'énergie est partout positive.

Nous avons ainsi démontré que la théorie quantifiée permet d'évaluer les espérances mathématiques de grandeurs physiques associées à la particule par ex. leur charge et leur énergie. On ne trouvera que des particules à *énergie positive*, mais, en général, des *deux charges* $\pm e$. Au paragraphe suivant, nous étudierons un cas particulier, qui permettra une interprétation probabiliste des résultats formels de ce paragraphe.

§ 6. Production de paires de particules (m, e) et (m, -e) par un champ électrique en mécanique quantique.

Nous voulons démontrer qu'un phénomène, très analogue au phénomène classique de production de paires, étudié au § 3, apparaîtra en théorie quantique, sans qu'on introduise un nouveau champ. Pour pouvoir interpréter les résultats du § 5, nous devons d'abord préciser ce que nous appelons une mesure en théorie quantique; la mesure classique a été exposée au § 2.

Dans une région d'espace-temps, où il n'y a pas de champ électromagnétique, les mesures de q^μ et de $\dot{q}^\mu = \pi^\mu$ peuvent être faites avec la seule limite de précision

$$\Delta q^\mu \Delta \dot{q}^\mu \geq h. \quad (6,1)$$

Le résultat de la mesure correspond, comme dans le cas classique, au résultat trouvé pour $\lambda = 0$. Il est représenté par un paquet d'ondes

$$\psi(q, 0) = \psi(\vec{q}, \tau, 0) = (2\pi)^{-2} \iiint (dk)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i(\vec{k}\vec{q} - \omega\tau)} \varphi(\vec{k}, \omega) \quad (6,2)$$

avec

$$\iiint \iiint (dq)^4 |\psi|^2 = \iiint \iiint (dk)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\varphi|^2 = 1. \quad (6,3)$$

ψ ne diffère de zéro que dans un petit volume quadridimensionnel entourant le point q_0^μ (c'est le paquet (ψ_1) en fig. 2). De même, $\varphi(k, \omega)$ ne diffère de zéro que dans un petit volume de l'espace impulsion-énergie autour de $\vec{k} = \vec{k}_0$ et $\omega = \omega_0$ ($\omega_0 < 0$ en fig. 2). Ceci correspond en effet à un paquet ψ donnant des espérances mathématiques $\bar{q}^\mu \sim q_0^\mu$; $\dot{\bar{q}}^\mu = (\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}^4) \sim h(\vec{k}_0, \omega_0)$ avec des incertitudes correspondant à (6,1), qui représente un *électron négatif* si $\omega_0 < 0$.

La fonction $\psi(q, 0)$ étant ainsi trouvée par une première observation, la fonction $\psi(q, \lambda)$ peut être déterminée pour tout λ en résolvant l'équation de SCHROEDINGER (5,2) (l'évolution spatio-temporelle des champs $\Phi_\mu(x)$ étant connue). Ensuite, les espérances mathématiques des grandeurs physiques (par ex. $\bar{J}^4(\vec{x}, t)$) peuvent être prédites.

Regardons de plus près l'exemple illustré par la fig. 2. C'est un champ électrique \vec{E} homogène à composantes $E_1 = B_{14} = -\partial \Phi_1(t)/\partial t$, $E_2 = E_3 = 0$, qui n'existe que pendant l'instant δt . Dans la limite $\delta t = 0$ ce champ peut être décrit par le potentiel discontinu: $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0$; $\Phi_1 = \hbar\gamma/e$ pour $t < 0$, $\Phi_1 = 0$ pour $t > 0$. Les fonctions

$$u_{\vec{k}, \omega}^{\pm}(q, \lambda) = \begin{cases} 1 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{q} - \omega \tau - \beta \lambda)} + A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{q} + \omega \tau - \beta \lambda)} & \dots \text{pour } \tau = q^4 > 0 \\ B e^{j(\vec{k} \cdot \vec{q} - \nu \tau - \beta \lambda)} & \dots \text{pour } \tau = q^4 < 0 \end{cases} \quad (6,4)$$

$$\omega = \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + 2\hbar^{-1}\beta}; \quad \nu = \pm \sqrt{(k^1 - \gamma)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2 + 2\hbar^{-1}\beta} \quad (6,5)$$

$$A(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega - \nu}{\omega + \nu}; \quad B(\vec{k}, \omega) = \frac{2\omega}{\omega + \nu}; \quad \frac{\omega}{\nu} > 0 \quad (6,6)$$

satisfont à (5,2). La somme

$$\begin{aligned} \psi(q, \lambda) &= (2\pi)^{-2} \iiint (dk)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega u_{\vec{k}, \omega}^{\pm}(q, \lambda) \varphi(\vec{k}, \omega) \\ &= \psi_1 + \psi_A + \psi_B \end{aligned} \quad (6,7)$$

est la solution de (5,2) avec les conditions initiales correspondant à la mesure $\psi(q, 0) = \psi_1$. (6,7) représente un paquet d'ondes qui suit (à une certaine dispersion près) le rayon spatiotemporel en fig. 2. Au « moment » $\lambda = A_1$, une partie du paquet (ψ_A) est réfléchi. Son intensité vaut (pour $\lambda \gg A_1$)

$$\iiint (dq)^4 |\psi_A|^2 = W_A = \overline{A^2} \sim A(\vec{k}_0, \omega_0)^2 \quad (6,8 A)$$

Une autre partie suit le rayon réfracté avec l'intensité (pour $\lambda \gg A_1$)

$$\iiint (dq)^4 |\psi_B|^2 = W_B = \overline{B^2} \frac{d\omega}{d\nu} \sim B(\vec{k}_0, \omega_0)^2 \frac{\nu_0}{\omega_0} \quad (6,8 B)$$

$d\omega/d\nu = \nu/\omega$ et (6,6) montrent que

$$W_A + W_B = 1; \quad W_A, W_B \geq 0. \quad (6,9)$$

Passons à l'évaluation de l'espérance mathématique de la charge électrique contenue dans un volume spatial entourant les

rayons (les lignes d'univers de fig. 2) et d'une dimension grande par rapport à la dimension spatiale des paquets ψ_1 , ψ_A et ψ_B , mais petite par rapport aux distances entre les rayons ψ_1 et ψ_A . On trouvera les valeurs suivantes:

\bar{e}_1 , l'espérance mathématique de la charge électrique qui suit la ligne d'univers ψ_1 vaut (pour tout $t \gg 0$) $\bar{e}_1 = -e$.

\bar{e}_B , l'espérance mathématique de la charge totale qui suit la ligne d'univers ψ_B , vaut (pour tout $t \ll 0$) $\bar{e}_B = -eW_B$.

\bar{e}_A , l'espérance mathématique de la charge totale qui suit la ligne d'univers ψ_A , vaut (pour tout $t \gg 0$) $\bar{e}_A = +eW_A$.

Naturellement, l'espérance mathématique de la charge totale pour $t < 0$ est égale à celle pour $t > 0$. L'identité (6,9) n'est pas autre chose que

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_A = -e + eW_A = -eW_B = e_B \quad (6,10)$$

L'interprétation physique semble être la suivante:

1⁰ $|\psi|^2(dq)^4 = dW$ est la probabilité que la particule se trouve, au «moment λ », dans le volume spatiotemporel $(dq)^4$. Il en est de même pour $|\varphi|^2(dk)^3 d\omega$ dans l'espace d'impulsion-énergie.

2⁰ Notre *première mesure* est exécutée pour une valeur déterminée de λ ($\lambda = 0$). Toute autre mesure, que nous proposons de faire ultérieurement, ne peut évidemment pas être associée à une valeur bien définie de λ . C'est là une différence essentielle entre la théorie classique et la théorie quantifiée.

3⁰ Des mesures de grandeurs physiques (par ex. densité de courant $J^\mu(\tilde{x}, t)$, densité d'énergie $T^{\mu\nu}(\tilde{x}, t)$) faites à un endroit \tilde{x} au temps t ne dépendent pas de λ en théorie classique. Les espérances mathématiques J^μ et $T^{\mu\nu}(\tilde{x}, t)$ du § 5 expriment donc les espérances mathématiques correspondant à des mesures de ces grandeurs physiques.

Ceci montre que dans notre problème, il y a une probabilité W_A de trouver un *électron positif* sur n'importe quel point (ou plutôt n'importe quelle région) de la ligne d'univers ψ_A et une probabilité W_B de trouver un *électron négatif* sur la ligne ψ_B . Autrement dit, notre théorie fournit une probabilité W_A que l'électron négatif actuellement observé pour $\lambda = 0$ (ψ_1) soit le partenaire d'une paire (ψ_1 et ψ_A) créée à l'instant $t = 0$ par le champ \tilde{E} et une probabilité $W_B = 1 - W_A$ que l'électron négatif observé ait déjà existé au passé ($t < 0$) et ait été accéléré par le champ \tilde{E} à l'instant $t = 0$.

Cette interprétation n'est pas opposée à nos notions de causalité. W_A n'est autre chose que la probabilité que le champ

considéré ait produite une paire de particules qui suivent les trajectoires ψ_1 et ψ_A . Le résultat numérique correspond à celui de PAULI et WEISSKOPF³⁾⁶⁾. L'exemple contraire « j'observe un électron positif à un instant $t < 0$ » est déjà un peu plus délicat. (Pour son illustration, on a qu'à changer le signe de l'axe t en fig. 2). Il y a alors une probabilité W_A que l'électron positif observé pour $t < 0$ s'anéantisse sous l'influence du champ \vec{E} à l'instant $t = 0$, avec un partenaire ψ_A et la probabilité $W_B = 1 - W_A$ que l'électron observé continue d'exister pour $t > 0$ et poursuive un mouvement accéléré à l'instant $t = 0$ par ce champ \vec{E} . Ce second exemple rappelle un peu l'exemple du § 3, où l'observation d'une particule (1) (ligne B en fig. 1) et l'existence d'un champ K^μ à une période future à l'observation (1) nécessitait l'existence d'une antiparticule, qui poursuit un chemin bien défini pour tout $t < 0$. En effet, l'exemple quantique ci-dessus implique une probabilité bien définie (espérance mathématique $\bar{e}_A = -e W_A$) qu'une *antiparticule* existait au temps $t < 0$. Cet effet n'est autre chose que la *fluctuation* de la densité de charge dans la théorie du champ quantifié.

§ 7. Conclusions.

Il est possible d'établir une mécanique classique covariante par rapport aux transformations de la théorie de relativité générale, qui ne fait pas intervenir la racine carrée $ds = \sqrt{-\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu} d\lambda$. Ses résultats sont identiques à ceux de la mécanique habituelle, pour autant que l'on ne fait pas intervenir de nouveaux champs (§ 3). La quantification de la théorie introduit une densité de probabilité quadridimensionnelle et invariante $|\psi|^2$ normalisée à $\int \int \int \int |\psi|^2 (dq)^4 = 1$. Une interprétation physique est possible (§ 6) et fait prévoir la production de paires de particules. La difficulté de la théorie de DIRAC (énergies négatives) ne se présente pas, la racine carrée étant éliminée.

La réaction des particules sur le champ a été étudiée, elle aussi, et fera l'objet d'une publication ultérieure. Elle n'est possible en théorie quantifiée qu'en suivant les méthodes de WENTZEL⁴⁾ et de DIRAC⁵⁾. Une difficulté d'interprétation physique apparaît alors: Si le champ produit par la particule (m, e) est le *champ retardé habituel d'une charge e* , celui de l'antiparticule ($m, -e$) est le *champ avancé d'une charge $-(-e) = e$* . Les deux champs ont pourtant le même effet de freinage.

Institut de Physique de l'Université de Genève.

Littérature.

¹⁾ cf. Résumé Soc. Suisse de Physique, *Helv. Phys. Acta* **14**, 51 (1941), et l'exposé général de la théorie, *Helv. Phys. Acta* **14**, 588 (1941), mentionné comme I.

²⁾ Une étude à ce sujet est en préparation pour la publication dans les *Helvetica Physica Acta*.

³⁾ PAULI et WEISSKOPF, *Helv. Phys. Acta* **7**, 709 (1934).

⁴⁾ WENTZEL, *Ztschr. f. Phys.* **86**, 479 et 635 (1934).

⁵⁾ DIRAC, *Ann. Inst. Henri Poincaré* (1939).

⁶⁾ Pour démontrer ceci dans la théorie du champ quantifié de PAULI et WEISSKOPF on doit faire des considérations analogues à celles que fait M. F. HUND (*Ztschr. f. Phys.* **117**, 1 [1940]).

Der Wirkungsquerschnitt für die Materialisation der 2,62 MeV γ -Strahlung in Argon

von K. Zuber.

(13. XI. 41.)

Zusammenfassung: Mit einer automatischen Wilsonkammer-Anordnung wird die Paarbildung und der Comptonprozess in Argon untersucht. Die Zahl der Paare wird mit der Anzahl Comptonelektronen, die eine Mindestenergie von 2,09 MeV besitzen, verglichen. Der Wirkungsquerschnitt für den Comptonprozess wird unter Berücksichtigung des durch die Vielfachstreuung bedingten Fehlers in der Energiebestimmung berechnet. Es ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt der Materialisation von 2,62 MeV-Quanten für das Argonatom $\sigma_p = (1,31 \pm 0,12) \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$. Die Materialisation im Coulombfeld der Atomelektronen, wie sie von PERRIN behandelt worden ist, konnte nicht beobachtet werden.

1. Die Bildung von Elektronenpaaren durch Materialisation von γ -Strahlung ist für die Wechselwirkung von energiereichen Quanten mit Materie von grosser Bedeutung. Um so überraschender ist es, dass für diesen Prozess relativ nur wenige Bestimmungen des Wirkungsquerschnittes in der Literatur zu finden sind, welche zum Teil auch voneinander stark abweichen.

Die erste Angabe über den Wirkungsquerschnitt findet sich in der für die Paarzeugung durch γ -Strahlen grundlegenden Arbeit von CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI¹⁾. Diese Autoren verglichen mit Hilfe einer Wilsonkammer-Anordnung die von der γ -Strahlung des Ra-Th aus einer Bleifolie ausgelöste Anzahl von Positronen mit der der Elektronen. Sie kamen zu dem Schluss, dass für die intensive γ -Strahlung von 2,62 MeV die Wahrscheinlichkeit der Paarbildung 20—30% derjenigen für den Comptonprozess ist. Dies stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit dem später von BETHE und HEITLER²⁾ berechneten Wert überein.

Aus der Grösse der totalen Absorption der γ -Strahlung in Absorbern von verschiedener Ordnungszahl ist von JACOBSON³⁾ auf den Wirkungsquerschnitt für die Paarbildung geschlossen worden. Auch hier stimmt der experimentelle Wert mit dem theoretischen Werte von BETHE und HEITLER sehr gut überein. Allerdings musste JACOBSON die Inhomogenität der γ -Strahlung durch eine

¹⁾ J. CHADWICK, P. M. S. BLACKETT und G. P. S. OCCHIALINI, Proc. Roy. Soc. (A) **144**, 235, 1933.

²⁾ H. BETHE und W. HEITLER, Proc. Roy. Soc. (A) **146**, 83, 1934.

³⁾ J. C. JACOBSON, Z. f. Phys. **103**, 747, 1936.

das Resultat sehr stark beeinflussende und recht beträchtliche Korrektur berücksichtigen. Auch stimmen die Schlussfolgerungen, die JACOBSON aus seinen Messungen in bezug auf den Wirkungsquerschnitt des Photoeffektes zieht, mit dem von HULME und Mitarbeitern¹⁾ berechneten Wert nicht überein.

Mit einer Wilsonkammer-Anordnung ist von GROSHEV²⁾ der Wirkungsquerschnitt für die Paarbildung im Stickstoff und Krypton bestimmt worden. Die Proportionalität mit dem Quadrate der Ordnungszahlen ist erfüllt, dagegen findet er zu kleine Absolutwerte. So findet GROSHEV z. B. für Krypton $\sigma_p = 2,5 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$, wogegen nach der Theorie $\sigma_p = 4,8 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ sich ergibt.

Die theoretischen Werte von BETHE und HEITLER sind unter Annahme der BORN'schen Näherung berechnet. Wie JAEGER³⁾ gezeigt hat, ergeben sich bei genauerer Rechnung für eine Quantenenergie, wie sie in allen experimentellen Untersuchungen verwendet worden ist, im Falle des Blei recht beträchtliche Abweichungen gegenüber dem Wert von BETHE und HEITLER. Dagegen stimmt die exaktere Rechnung mit den Ergebnissen der BORN'schen Näherung bei Elementen, für die $Z \leq 54$ ist, überein.

Im Hinblick auf die Bedeutung des Paarbildungsprozesses schien es am Platze zu sein, die Bestimmung des Wirkungsquerschnittes nochmals aufzunehmen und dabei die Bedingungen derart zu wählen, dass ein Vergleich mit den Ergebnissen von BETHE und HEITLER statthaft ist.

2. Verwendet wurde das Plattenmaterial, welches zur Untersuchung des Materialisationsprozesses in einer mit Argon gefüllten Wilsonkammer früher aufgenommen worden war⁴⁾. Die Zahl der im Gas gebildeten Elektronenpaare wurde verglichen mit der Anzahl der im gleichen Volumen ausgelösten Comptonelektronen, die eine bestimmte Mindestenergie besitzen. Dies Verfahren ist ähnlich dem von CHADWICK und Mitarbeitern angewandten, doch tritt an Stelle der Folie, in der immer Energieverluste stattfinden, das Füllgas der Wilsonkammer selbst. Ferner ist die Ordnungszahl von Argon klein genug, um einen Vergleich mit den theoretischen Ergebnissen von BETHE und HEITLER zu ermöglichen.

Die Wilsonkammer-Anordnung ist in früheren Arbeiten⁴⁾⁵⁾

¹⁾ H. R. HULME, J. McDONGALL, R. A. BUCKINHAM und R. H. FOWLER, Proc. Roy. Soc. (A) **153**, 131, 1935.

²⁾ L. V. GROSHEV, C. R. Moskau **26**, 419, 1940.

³⁾ J. C. JAEGER, Nature **148**, 86, 1941.

⁴⁾ K. ZUBER, Helv. Phys. Acta **11**, 207, 1938.

⁵⁾ K. ZUBER, Helv. Phys. Acta **11**, 366, 1938.

beschrieben worden. Verwendet wurde eine schwach gefilterte Ra-Th-Quelle, von der ein γ -Strahlbündel ausgeblendet worden war, das in der Mitte der Wilsonkammer einen Durchmesser von ungefähr 2,5 cm besass. Der beleuchtete Teil der Kammer war etwas über 4 cm hoch. In dieser Arbeit werden nur Elektronen mit einer Mindestenergie von 2,09 MeV betrachtet. Dieser Comptonenergie entspricht ein Winkel zwischen der Anfangsrichtung des Elektrons und dem γ -Strahl von etwas weniger als 12° . Dies hat unter den gegebenen geometrischen Bedingungen zur Folge, dass die Spuren eine Länge von mindestens 5 cm aufweisen, was für die Bestimmung der Elektronenenergie als ausreichend angesehen werden kann. Die Beschränkung auf kleine Winkel erlaubt es auch, dass man bei der Energieberechnung die eventuelle Neigung der Spur gegen die Normalebene des magnetischen Feldes vernachlässigen darf.

Die γ -Strahlung des Ra-Th setzt sich zusammen aus der sehr intensiven Linie von 2,62 MeV, einer schwachen Linie von 3,2 MeV und zwei weicheren Komponenten bei 1,7¹⁾ und 2 MeV²⁾. Da nur Elektronen mit einer Mindestenergie von 2,09 MeV betrachtet wurden, haben die weicheren Komponenten keine störende Wirkung.

Aus technischen Gründen wurden nur Startpunkte von Paaren und Comptonelektronen gezählt, die in einem mittleren Teil von 4 cm Länge des γ -Strahlbündels liegen. Damit wird einerseits erreicht, dass die mittlere Spurlänge nicht zu klein wird, andererseits sind die an der Eintrittsstelle des γ -Strahlbündels ausgelösten Elektronen durch das Magnetfeld so weit abgelenkt worden, dass sie das Erkennen von Startpunkten im kritischen Teil der Kammer nicht zu sehr erschweren.

3. Da die Energie eines Elektrons mit der Wilsonkammer nicht exakt bestimmt werden kann, wird die zu erwartende Energieverteilung der Comptonelektronen von der aus der KLEIN-NISHINA-Formel berechneten abweichen. Doch lässt sich die Verteilung der beobachtbaren Energien angeben, wenn man die Grösse des wahrscheinlichen Fehlers bei der Energiemessung kennt.

In früheren Arbeiten³⁾⁴⁾ ist darauf hingewiesen worden, dass mit einem Gas wie z. B. Argon in der Wilsonkammer, die Genauigkeit der Energiebestimmung zur Hauptsache durch die Vielfachstreuung der Elektronen bestimmt wird. Ferner ist gezeigt worden,

¹⁾ J. C. Jacobson, l. c.

²⁾ D. SKOBELTZIN, C. R. **194**, 1486, 1932.

³⁾ L. SIMONS und K. ZUBER, Proc. Roy. Soc. (A) **159**, 383, 1937.

⁴⁾ K. ZUBER, Helv. Phys. Acta **11**, 207, 1938.

dass sich der wahrscheinliche Fehler berechnen lässt, indem man von einer von BOTHE¹⁾ angegebenen Formel ausgeht. Man findet²⁾

$$\Delta E = 0,49 \frac{E + 0,51}{E + 1,02} \cdot Z \cdot \sqrt{\frac{d}{e \cdot A}} \cdot e$$

Hier bedeutet E die Energie, ΔE den wahrscheinlichen Fehler, beide ausgedrückt in MeV., Z , d und A die Ordnungszahl, die Dichte und das Atomgewicht des Kammergases, l und ϱ die Länge und den Krümmungsradius der Spur. Der experimentell beobachteten Fehler stimmte sehr gut mit dem aus der Formel berechneten überein²⁾. Nun hat auch kürzlich WILLIAMS³⁾ die Frage der durch Vielfachstreuung begrenzten Genauigkeit der Energiemessung von Elektronen mit der Wilsonkammer theoretisch behandelt. Es mag erwähnt werden, dass die Formel von WILLIAMS im fraglichen Energiegebiet zu praktisch den gleich grossen Fehlern führt wie unsere Formel. So findet sich zum Beispiel nach WILLIAMS für eine Elektronenenergie von 2,35 MeV, einer Spurlänge von 7,5 cm und den bei dieser Untersuchung in Frage kommenden Bedingungen als wahrscheinlicher Fehler $\Delta E = 0,152$ MeV. Rechnet man dagegen nach der in dieser Arbeit verwendeten und auch experimentell bestätigten Formel, so findet sich in sehr guter Übereinstimmung mit WILLIAMS $\Delta E = 0,146$ MeV.

Zur Berechnung der beobachtbaren Energieverteilung der Comptonelektronen wurde zunächst nach KLEIN-NISHINA bestimmt, wieviele Elektronen in Energieintervalle von je 0,1 MeV Breite fallen würden, wenn die Energie der Elektronen exakt bestimmt werden könnte. Mit der angegebenen Formel wurde für jedes Intervall der wahrscheinliche Fehler und die Gauss'sche Fehlerkurve berechnet, und die Beiträge aller Fehlerkurven an ein bestimmtes Energieintervall addiert. Durch Integration wurde zuletzt noch bestimmt, wieviele Elektronen mit einer beobachteten Energie, die grösser als ein vorgegebener Wert ist, erwartet werden.

Die Resultate dieser Rechnungen sind zusammen mit den experimentellen Werten in der Tabelle 1 zusammengestellt. Es wurden drei Fälle in Betracht gezogen: A) Die γ -Strahlung besteht nur aus 2,62 MeV-Quanten. B) Auf 100 Quanten von 2,62 kommen 9 Quanten von 3,2 MeV. Dieses Quantenverhältnis ist, allerdings

¹⁾ W. BOTHE, Hdb. d. Phys., 2. Aufl., 22/I, 20, 1933.

²⁾ In der früheren Arbeit ist als Zahlenfaktor 0,54 angegeben worden. Es wurde darauf hingewiesen, dass die experimentellen Fehler um rund 10% geringer ausfallen. Dies ist nun durch den Faktor 0,49 berücksichtigt worden.

³⁾ E. J. WILLIAMS, Phys. Rev. **58**, 292, 1940.

mit einem recht beträchtlichen Fehler, in der früheren Arbeit als wahrscheinlich angegeben worden. C) Auf 100 Quanten von 2,62 MeV kommen 6 Quanten von 3,2 MeV.

Tabelle 1.

	E	2,09	2,19	2,29	2,40	2,51	2,62	2,73	2,84	2,95	3,06
A	$\sigma \cdot 10^{25}$	5,87	4,40	3,08	1,83	0,90	0,37	0,12	0,03	0,01	0,00
	N	326	244	171	114	62	33	18	11	6	2
	$\sigma_{\text{exp}} \cdot 10^{25}$	5,87	4,40	3,08	2,05	1,12	0,69	0,32	0,20	0,11	0,04
	Δ	0,00	0,00	0,00	+0,22	+0,22	+0,23	+0,20	+0,17	+0,10	+0,04
B	$\sigma \cdot 10^{25}$	6,66	5,10	3,73	2,41	1,40	0,80	0,46	0,27	0,18	0,10
	N	326	244	171	114	62	33	18	11	6	2
	$\sigma_{\text{exp}} \cdot 10^{25}$	6,66	4,98	3,50	2,33	1,27	0,67	0,37	0,22	0,12	0,04
	Δ	0,00	-0,12	-0,23	-0,08	-0,13	-0,13	-0,09	-0,05	-0,06	-0,06
C	$\sigma \cdot 10^{25}$	6,39	4,87	3,51	2,22	1,23	0,65	0,34	0,20	0,12	0,07
	N	326	244	171	114	62	33	18	11	6	2
	$\sigma_{\text{exp}} \cdot 10^{25}$	6,39	4,78	3,36	2,22	1,22	0,65	0,35	0,22	0,12	0,04
	Δ	0,00	-0,09	-0,15	0,00	-0,01	0,00	+0,01	+0,02	0,00	-0,03

In der Tabelle bedeutet E die gemessene Energie in MeV, σ ist die Ordinate der Energiekurve und bedeutet im Falle A nichts anderes als den Wirkungsquerschnitt für einen Comptonprozess, bei dem das Elektron eine Mindestenergie E besitzt, berechnet pro Argonatom. N ist die experimentell gefundene Anzahl Spuren mit der scheinbaren Mindestenergie E . Die N wurden in σ -Werte umgerechnet, indem bei $E = 2,09$ die entsprechenden Werte einander gleichgesetzt wurden. Auf diese Weise sind dann die σ_{exp} -Werte erhalten worden. Die Differenz $\Delta = \sigma_{\text{exp}} - \sigma$ ist für jeden Fall auch noch angegeben.

Wie ersichtlich, ist im Fall C) die Übereinstimmung zwischen σ und σ_{exp} am besten, bei B) immer noch etwas besser als bei A). Obschon aus diesem Ergebnis keine zu weitgehenden Schlüsse gezogen werden dürfen, scheint die Verteilung der Comptonelektronen eher für eine grössere Intensität der 3,2 MeV-Strahlung zu sprechen, als dies aus Beobachtungen des Kernphotoeffektes nach ELLIS¹⁾ und STETTER und JENTSCHKE²⁾ folgt (1—2 Quanten der Energie 3,2 MeV auf 100 Quanten von 2,62 MeV³⁾).

¹⁾ C. D. ELLIS, Proc. Phys. Soc. (2) **50**, 213, 1938.

²⁾ G. STETTER und W. JENTSCHKE, Phys. Z. **40**, 104, 1939.

³⁾ Es sei noch darauf hingewiesen, dass man der experimentellen Verteilung nicht Genüge leisten kann durch Annahme des alleinigen Vorkommens der 2,62 MeV-Linie unter gleichzeitiger Erhöhung des wahrscheinlichen Fehlers.

Die weicheren γ -Strahllinien liefern zu vernachlässigende Beiträge an die Elektronenverteilung. Die 2 MeV-Strahlung erzeugt Comptonelektronen mit einer Maximalenergie von 1,72 MeV und würde mit der von Skobeltzin angegebenen Intensität weniger als 3 Spuren mit einer beobachteten Energie von mehr als 2 MeV erwarten lassen. Der Beitrag der 1,7 MeV-Strahlung ist noch kleiner.

Der Photoeffekt ist in Argon für diese Quantenenergie sehr klein. Nach der Formel von HULME und Mitarbeitern¹⁾ sind weniger als zwei Photoelektronen zu erwarten. Auch sie spielen daher für die Energieverteilung keine Rolle.

4. In dem gleichen Gebiet der Wilsonkammer, in dem die 326 Comptonelektronen mit einer Mindestenergie von 2,09 MeV festgestellt wurden, konnten 73 Elektronenpaare beobachtet werden. Leider war es nicht möglich, bei allen die Energie zu bestimmen, da nicht immer beide Partner eine genügende Spurlänge aufwiesen. Da aber gleichzeitig in der ganzen Wilsonkammer 98 ausmessbare Paare erhalten wurden, ist es zulässig, deren Energieverteilung auch auf die 73 Paare zu übertragen. Von den 98 Paaren wurden 6 mit Energien unterhalb 1,2 MeV, 81 mit Energien zwischen 1,2 und 2,4 MeV und 11 mit Energien grösser als 2,0 MeV festgestellt. Die 6 Paare mit den kleinsten Energien sind wohl sicherlich den weichen γ -Strahlkomponenten zuzuordnen. Es sollen für die Berechnung des Wirkungsquerschnittes die drei früheren Fälle diskutiert werden.

A) Die 3,2 MeV-Strahlung hat die Intensität null. Dann sind von 98 ausmessbaren Paaren $92 = 94\%$ der 2,62 MeV-Strahlung zuzuordnen. Von den 73 Paaren stammen somit 68,5 Paare von dieser Strahlung. Da 326 Comptonprozesse einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 5,87 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ (Tab. 1 A) entsprechen, ergibt sich als Wirkungsquerschnitt für die Paarbildung $\sigma_p = 1,23 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ pro Argonatom.

B) Die 3,2 MeV-Strahlung besitze die Intensität von 9 Quanten auf 100 der 2,62 MeV-Strahlung. Von den 98 Paaren sind dann 11 der 3,2 MeV und 81 der 2,62 MeV-Energie zuzuordnen oder 87,3%, somit von den 73 Paaren 60,3. Unter den 326 Comptonelektronen mit mehr als 2,09 MeV sind in diesem Fall 42 der 3,2 MeV-Strahlung zuzuschreiben. Es folgt ein Wirkungsquerschnitt von $1,24 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$.

C) Der Wirkungsquerschnitt, der sich unter Annahme von 6 Quanten der 3,2 MeV-Strahlung auf 100 der 2,62 MeV-Strahlung

¹⁾ l. c.

ergibt, ist wieder $\sigma_p = 1,24 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$. Für das Resultat ist es somit ziemlich belanglos, welche Intensität die 3,2 MeV-Strahlung besitzt.

An dem angegebenen Wert für den Wirkungsquerschnitt ist noch eine Korrektur anzubringen, weil die Füllung der Wilsonkammer nur zu $(90 \pm 2)\%$ aus Argon, der Rest aus Sauerstoff und einem Gemisch von Wasser- und Alkoholdampf bestand. Da der Comptonprozess, pro Atom berechnet, einen Wirkungsquerschnitt besitzt, welcher proportional Z , die Paarbildung aber einen solchen, der proportional Z^2 ist, so muss der angegebene Wert noch mit $1,06 \pm 0,02$ multipliziert werden. Man erhält somit $\sigma_p = (1,31 \pm 0,12) \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$. Der Fehler ist der wahrscheinliche Fehler, wie er sich aus den statistischen Fehlern berechnen lässt. Nach BETHE und HEITLER erhält man den Wert $1,19 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$. Die Übereinstimmung ist genügend gut, wenn man an die Bedeutung des wahrscheinlichen Fehlers denkt. Auf jeden Fall lässt sich die von GROSHEV angegebene bedeutende Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment in unserem Fall nicht bestätigen.

5. Neben der Materialisation der γ -Strahlung im Coulombfeld eines Kernes sollte auch die Materialisation im Coulombfeld eines Atomelektrons beobachtet werden können. Nach PERRIN¹⁾, welcher diesen Prozess vom Standpunkt der Erhaltungssätze betrachtet hat, lassen sich die beiden Arten der Materialisation von einander leicht unterscheiden, da man an Stelle von Elektronen-zwillingen nun Drillinge beobachten müsste, die aus zwei Elektronen und einem Positron bestehen würden. Für eine γ -Strahlenergie von 2,62 MeV müssten die Teilchenenergien zwischen 75 und 1225 kV liegen und der Winkel zwischen der γ -Strahlrichtung und der Anfangsrichtung der Teilchen weniger als 29° betragen. Die Häufigkeit derartiger Prozesse sollte nach PERRIN, verglichen zu den Materialisationen am Atomkern, um den Faktor $1/Z$ geringer sein. Da im ganzen 142 Paare in Argon festgestellt wurden, ist zu erwarten, dass etwa 8 Drillinge zu finden wären. In Wirklichkeit konnte kein einziger Prozess gefunden werden, der den PERRIN'schen Bedingungen genügen würde. Die Wahrscheinlichkeit für eine derartige Materialisation scheint damit kleiner zu sein, als es PERRIN annimmt.

Physikal. Institut der Universität Zürich.

¹⁾ F. PERRIN, C. R. **197**, 1100, 1933.

Eine Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu 850 KV

von O. Huber, O. Lienhard, P. Preiswerk, P. Scherrer und H. Wäffler.

(13. XI. 1941.)

Zusammenfassung. Es wird eine Hochspannungsanlage nach VAN DE GRAAFF und eine 5-stufige Nachbeschleunigungsrohre beschrieben. Mit Hilfe dieser Apparatur wurden Kernphotoeffekte (γ, n -Prozess) an Mg, Al, S und K nachgewiesen.

1. Einleitung.

Unter den verschiedenen zur Zeit verwendeten Anordnungen zur Erzeugung von Ionenstrahlen für kernphysikalische Untersuchungen haben sich für mittlere Spannungsbereiche (500 bis 1500 KV) die Bandgeneratoren nach VAN DE GRAAFF¹⁾ in Verbindung mit mehrstufigen Nachbeschleunigungsrohren sehr gut bewährt. Diese Anlagen zeichnen sich durch einfache Bauweise, geringe Betriebskosten und hohe Konstanz der erzeugten Gleichspannung aus. Die von ihnen gelieferten Ströme sind allerdings auf etwa 1—2 MA beschränkt, doch reicht diese Stromstärke für kernphysikalische Zwecke im allgemeinen aus. Da nämlich die Ausbeuten von Kernreaktionen in Abhängigkeit von der Spannung meistens stärker als linear ansteigen, so bietet stets die Anlage die vielseitigsten Anwendungsmöglichkeiten, welche bei gegebener Leistung die höchstmögliche Spannung erzeugt.

Die vorliegende Apparatur steht seit ca. einem Jahr im Betrieb. Über ihre Bauweise, die mit ihr gemachten Erfahrungen sowie über einige der gewonnenen Resultate soll nachstehend berichtet werden.

2. Aufbau der Anlage.

a) Spannungstechnischer Teil.

Die konstruktive Durchbildung der Apparatur geht aus Fig. 1 und 2 hervor. In Anpassung an die vorhandenen Räumlichkeiten, sowie auch mit Rücksicht auf ein von der Hochspannung möglichst unbehindertes Arbeiten wurde die ganze Anlage auf zwei Stockwerke verteilt. Der obere Raum dient als Arbeitsraum, der untere (Abmessungen $5,4 \times 7 \times 4,8$ m) enthält den Generator sowie das

¹⁾ R. J. VAN DE GRAAFF, K. T. COMPTON und L. C. VAN ATTA, Phys. Rev. 43, 149, 1933.

Kanalstrahlrohr. Letzteres ist in hängender Bauweise durch die Decke hindurchgeführt und endet in der Platte (P). Zwei starke Hülsen aus Haefelit B (Querschnitt 80×20 cm) tragen die Hochspannungselektrode. In ihrem Innern enthalten sie die beiden Bänder, durch welche der Ladungstransport erfolgt. Die Elektrode besteht aus Alumanblech und hat die Form eines Zylinders mit zwei aufgesetzten Halbkugeln. Ihr Durchmesser beträgt 1,6 m,

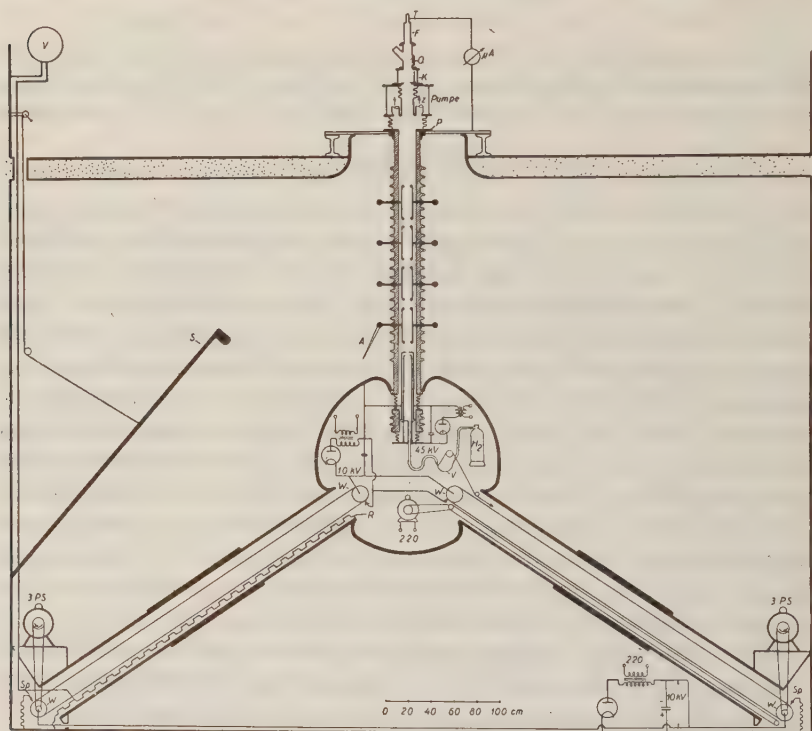


Fig. 1.

Schematische Ansicht der Apparatur. A kleiner Sprüharm, F Faradaykäfig, K Dichtungsschleife, P Platte, Q Quarzfenster, S Sprüharm, Sp Sprührechen, T Target, R Spannungsteiler, V Voltmeter, W Walzen, V Fowlerventil.

die Länge 2,3 m. Sie enthält einen Wechselstromgenerator (220 V, 0,5 KW), der zwei Gleichrichteranlagen speist. Der eine Gleichrichter liefert den Strom für die Ionenquelle (2 MA, 45 KV), der andere hält die Walzen (W) auf konstantem Potential. Der Antrieb des Generators erfolgt mittels isolierendem Gummiriemen durch einen am Boden befindlichen Motor.

Damit die Bänder nicht von den Walzen herunterlaufen, ist eine genaue Justierung der letzteren erforderlich. Zu diesem Zweck

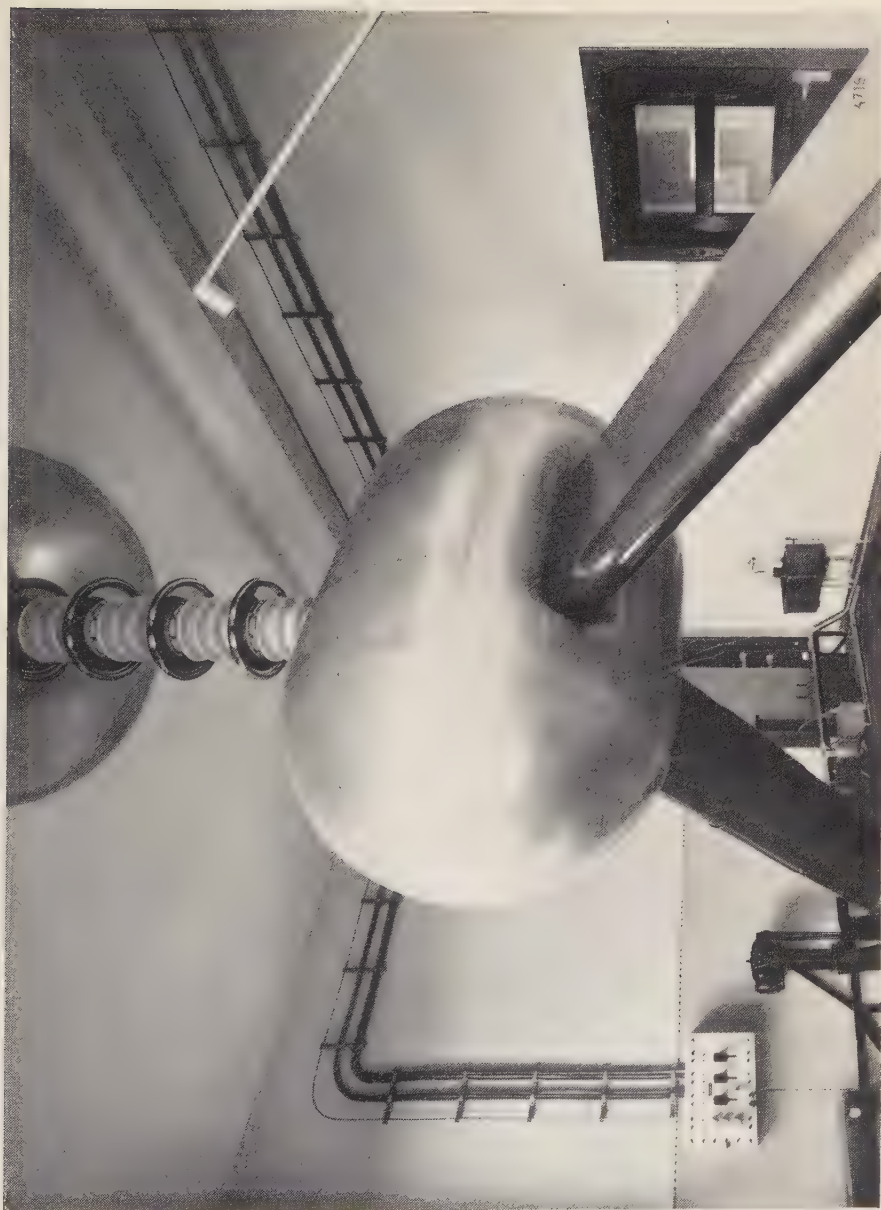


Fig. 2.

sind sie sowohl in der Ebene ihrer Achsen als auch in der dazu senkrechten gegeneinander verstellbar angeordnet. Die Walzen laufen in Pendelkugellagern. Die Lager sind isoliert montiert, so dass an die Walzen selbst mittels der in Fig. 1 skizzierten Gleichrichteranlagen dauernd eine Spannung von -10 KV gegen Erde, bzw. $+10$ KV gegenüber der Elektrode gelegt werden kann. Die Sprührechen (*Sp*) bestehen aus Stahldrahtbüscheln, die in Abständen von 1 cm in einen Halter eingelassen sind. Sie sind über einen Beruhigungswiderstand geerdet, bzw. mit der Elektrode verbunden. Der Antrieb der Walzen erfolgt einzeln durch je einen Motor von 3 PS mittels Keilriemen aus Gummi. Bis anhin wurde mit Drehzahlen der Walzen bis zu 3600 Umdr./min. gearbeitet. Bei einem Walzendurchmesser von 9 cm und einer Bandbreite von 52 cm werden hierbei Ströme bis $720 \mu\text{A}$ erreicht. Vorversuche, die mit Öltuch, Papier und Gummi als Bandmaterial gemacht wurden, ergaben in mechanischer Hinsicht die günstigsten Resultate bei Verwendung von Bändern aus Gummi. Besonders ein amerikanisches Fabrikat (Goodyear 3-ply Atom-Smasher-Belt), das nahtlos hergestellt wird, zeichnet sich sowohl durch geräuschloses Laufen als auch durch vorzügliche elektrische Eigenschaften aus und wird von uns jetzt ausschliesslich verwendet.

Die maximal erreichbare Spannung ist bei Generatoren dieses Typs durch die Durchschlagsfeldstärke auf der Elektrodenoberfläche bestimmt. Die von amerikanischen Autoren¹⁾ mitgeteilten Erfahrungswerte, nach welchen zur Erreichung optimaler Spannung bei vorgegebenen Raumabmessungen der kleinste Abstand Elektrode-Wand den doppelten Krümmungsradius der Elektrode an der betrachteten Stelle nicht unterschreiten soll, weichen von den potentialtheoretisch berechneten erheblich ab. (Für den Fall Kugel gegenüber unendlich ausgedehnter Ebene liegt nach der Rechnung das Minimum der grössten Feldstärke bekanntlich bei einem Abstand, der gleich dem Kugelradius ist.) Da diese Abweichungen sich um so stärker bemerkbar machen dürften, je höher die auftretenden Spannungen sind, und da bei der vorliegenden Anlage zum vornherein mit einer Maximalspannung, die unter 1000 KV liegt, gerechnet werden musste, so wurde der Dimensionierung der Elektrode ein mittlerer, zwischen dem theoretischen Resultat und den obengenannten Angaben liegender Wert zugrunde gelegt. Der kleinste Wandabstand der Elektrode beträgt $1,4$ m, der Krümmungsradius der Elektrode an diesen Stellen $0,8$ m. Die für die Hülsen und das Kanalstrahlrohr notwendigen Öff-

¹⁾ M. A. TUVE, Naturwiss. **24**, 624 (1936).

nungen wurden unter sorgfältiger Abrundung der Kanten in die Elektrode hineingezogen. Die mit dem Generator ohne Kanalstrahlrohr erreichte Spannung betrug 1000 KV. Bei höheren Spannungen traten Überschläge gegen den Boden und die Wände auf. Mit der Röhre wird die Spannung durch Überschläge zwischen den Sprühringen begrenzt, welche schon bei 850 KV auftreten. Zur Einstellung niedrigerer Spannungen dient der geerdete Sprüharm S , dessen Abstand von der Elektrode vom Arbeitsraum aus eingestellt werden kann.

In die eine der Hülzen ist ein ölgefülltes Isolierrohr eingebaut, in welchem sich der Messwiderstand R befindet. Dieser besteht aus 1000 Widerständen von je 10 Megohm. Die an den untersten 50 Megohm liegende Spannung wird mit einer abgeschirmten Leitung an das im Arbeitsraum befindliche elektrostatische Voltmeter V (6 KV) geführt. Zur Eichung wurde die 440 KV Resonanzstufe der Reaktion $\text{Li}^7(p, \gamma)\text{Be}^8$ benützt.

b) Die Kanalstrahlröhre.

Diese besteht aus 6 Teilen, nämlich der Ionenquelle und 5 Nachbeschleunigungsstufen. Die Ionenquelle ist als ganzmetallisches Gasentladungsrohr nach OLIPHANT und RUTHERFORD¹⁾ ausgebildet. Die angelegte Spannung beträgt 45 KV. Die Gasnachströmung wird durch ein Fowler-Ventil reguliert²⁾, welches vom Arbeitsraum aus bedient wird. Der Strahl tritt durch einen Kanal von 1,2 mm Durchmesser und 2 mm Länge aus der Kathode aus und durchläuft die als elektrostatische Linsen ausgebildeten Beschleunigungsstrecken. Die Brennweite solcher Linsen ist dem Quadrat des Quotienten, gebildet aus der vom Ion insgesamt durchlaufenden Spannung zur Spannung an der Linse annähernd proportional. Sie nimmt also mit zunehmender Geschwindigkeit der Ionen rasch zu, d. h. für die Schärfe des auf der Target T entstehenden Brennflecks als ionenoptische Abbildung des Kanals, ist praktisch nur die erste Beschleunigungsstrecke massgebend. Durch Änderung der an ihr liegenden Spannung kann auch die Grösse des Brennflecks verändert werden. Das erfolgt mittels des kleinen Sprüharms A , der im Betrieb vom Arbeitsraum aus eingestellt werden kann. Die Röhre ist aus 5 Porzellanisolatoren von 14 cm lichter Weite zusammengesetzt. Die Verbindung der einzelnen Teile erfolgt durch Verschrauben der auf die Isolatoren aufgekitteten Flansche, wie Fig. 3 zeigt. Die Dichtung zwischen

¹⁾ Proc. Roy. Soc. Lond. **141**, 259, 1933.

²⁾ Rev. Sc. Inst. **6**, 26, 1935.

denselben wird durch Gummiringe (Schnurstärke 10 mm) bewerkstelligt, welche in die im Porzellan eingeschliffenen Rillen gepresst werden. Ebenfalls in das Porzellan eingelassen sind die Halteringe für die Beschleunigungselektroden. Diese wurden beim ersten Zusammenbau der Röhre mittels eines Dornes zentriert und durch Stellschrauben fixiert. Die mechanische Festigkeit der so zusammengeschraubten Röhre ist genügend gross, um sie *freihängend* auf einer Eisenkonstruktion im Arbeitsraum abzustützen, ohne mechanische Verbindung mit der Hochspannungselektrode, wodurch die Übertragung von Erschütterungen, welche die laufenden Teile verursachen, vermieden wird. Im Arbeitsraum endet

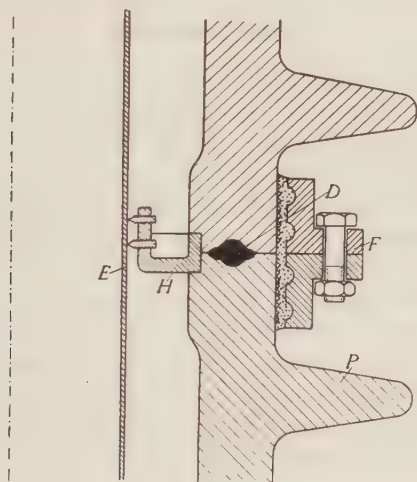


Fig. 3.

Dichtung der Röhrenteile und Halterung der Beschleunigungselektroden. D Dichtung, E Elektrode, F Flansch, H Halter, P Porzellan.

die Röhre in einem Aufsatz, der zwei Saugstutzen für die Hochvakuumumpen sowie ein Klappenventil *K* mit aufgebaute Faraday-Käfig *F* trägt. Dieses Ventil ermöglicht ein Auswechseln der Target, ohne dass die ganze Röhre mit Luft gefüllt zu werden braucht. Das Gehäuse von *K* ist von den unteren Teilen und von *F* elektrisch isoliert, so dass eine Gegenspannung (-60 V gegen Erde) angelegt werden kann. Diese verhindert das Austreten der vom Ionenstrahl ausgelösten Sekundärelektronen aus *F*. Für einwandfreies Arbeiten muss in der Röhre ein Vakuum von mindestens $5 \cdot 10^{-5}$ Tor herrschen. Dieses wird aufrecht erhalten durch zwei parallel arbeitende einstufige Öldiffusionspumpen mit einer Saug-

leistung von zusammen 150 l/sec als Endstufe und einer zweistufigen Öldiffusionspumpe von 4,5 l/sec als Vorstufe¹⁾.

Die mit dieser Anordnung erhaltenen Ionenströme betragen 90—100 μA für Wasserstoff. Ein Haupthindernis für das Erreichen grösserer Ströme bilden die Sekundärelektronen, welche an den Wänden und den Schutzringen der Beschleunigungselektroden, hauptsächlich aber an den Metallteilen des Aufsatzes ausgelöst werden. Durch Anbringen eines negativ vorgespannten Gitters am Ende der Röhre konnten die langsamen Sekundärelektronen am Zurücklaufen in die Röhre verhindert werden. Diese Massnahme ergab eine 50-prozentige Steigerung des Kanalstromes.

3. Erste Ergebnisse.

Die γ -Strahlung, welche im Prozess $\text{Li}^7(p, \gamma)\text{Be}^8$ bei einer Spannung von 440 KV resonanzartig entsteht, besitzt eine Quantenenergie von 17 MeV²⁾. Mit diesen Quanten ist es energetisch möglich, bei allen Elementen, mit Ausnahme von Kohlenstoff und Helium, ein Neutron aus dem Kern abzuspalten ((γ, n) -Prozess). Die Theorie³⁾ sagt für diesen Kernphotoeffekt einen Wirkungsquerschnitt der Grössenordnung 10^{-27} cm^2 voraus. Da nun die mit Protonenströmen der Grössenordnung 100 μA herstellbare Intensität der Lithium γ -Strahlung bestenfalls einige 10^6 -Quanten pro sec beträgt, so ist der Nachweis dieser Prozesse sehr schwierig, wenn nicht das entstehende Isotop radioaktiv ist. Das ist jedoch bei vielen Elementen der Fall, so dass man hier nur zu untersuchen braucht, ob durch Bestrahlung im betreffenden Element eine Aktivität induziert wird oder nicht, um über das Auftreten eines Kernphotoeffekts entscheiden zu können.

Mit dieser Methode konnten BOTHE und GENTNER⁴⁾ in 15 verschiedenen Elementen einen (γ, n) -Prozess nachweisen. Bei allen übrigen Elementen des periodischen Systems verliefen die Versuche negativ. Nun sind, von den leichtesten Kernen abgesehen, um mehrere Grössenordnungen nach unten herausfallende Wirkungsquerschnitte für den (γ, n) -Prozess theoretisch nicht zu erwarten. Deshalb erschienen Versuche zur Auffindung der bis jetzt noch nicht entdeckten Kernphotoeffekte dann als aussichts-

¹⁾ Diese Pumpen wurden im Institut gebaut nach Zeichnungen, welche uns Herr Prof. HOLTSMARK in freundlicher Weise zur Verfügung gestellt hat.

²⁾ L. A. DELSASSO, W. A. FOWLER und C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **51**, 391, 1937.

³⁾ H. A. BETHE und G. PLACEK, Phys. Rev. **51**, 451, 1937.

⁴⁾ W. BOTHE und W. GENTNER, Zs. f. Phys. **106**, 236, 1937; **112**, 45, 1939.

reich, wenn die Ausbeute der induzierten Aktivität sowohl durch Erhöhung der γ -Intensität, als auch durch geeignete geometrische Anordnung nach Möglichkeit gesteigert werden konnte. Das gelang bei unserer Apparatur sowohl durch Erhöhung des Ionenstroms als auch durch Verwendung möglichst reiner, im Hochvakuum aufgedampfter Lithiumschichten als Target. Diese Untersuchungen, deren Ziel in der Auffindung der bisher noch nicht nachgewiesenen Kernphotoeffekte besteht, sind zur Zeit noch im Fluss. Bis jetzt wurde an den vier Elementen Mg, Al, S, K ein Kernphotoeffekt neu gefunden. Im Falle von Aluminium und Schwefel konnten die induzierten künstlichen Radioaktivitäten eindeutig den Isotopen Al^{26} (Halbwertszeit $T = 7$ sec), bzw. S^{31} ($T = 3$ sec) zugeordnet und damit die Prozesse $\text{Al}^{27}(\gamma, n)\text{Al}^{26}$ bzw. $\text{S}^{32}(\gamma, n)\text{S}^{31}$ eindeutig sichergestellt werden.

Beim Magnesium wäre im Falle eines (γ, n) -Prozesses eine 11,6-sec-Aktivität zu erwarten. Eine Aktivität von ungefähr dieser Halbwertszeit konnte auch tatsächlich nachgewiesen werden. Die Messung derselben war jedoch durch die Nebenreaktion $\text{Mg}^{26}(n, \alpha)\text{Ne}^{23}$, welche einen grossen Wirkungsquerschnitt besitzt und zu einer 40-sec-Aktivität führt, erschwert. Die Neutronen sind auf den natürlichen Deuteriumgehalt des Wasserstoffs zurückzuführen, welcher Anlass zu den Umwandlungen $\text{Li}^7(d, n)\text{Be}^8$ und $\text{Li}^7(d, n)2\text{He}^4$ gibt. Durch Aktivierung bei verschiedenen Spannungen zwischen 400 und 700 KV liess sich einwandfrei nachweisen, dass diese kurze Periode durch die γ -Strahlung, und nicht etwa durch die Neutronen ausgelöst wird. Die induzierte kurzlebige Aktivität zeigt nämlich bei 440 KV denselben, durch die Resonanz bedingten Anstieg wie die γ -Strahlung und ist ausserdem im ganzen gemessenen Spannungsbereich der γ -Intensität proportional. Für eine exakte Halbwertszeitbestimmung müsste in diesem Falle mit magnetisch ausgeblendeten Protonenstrahlen gearbeitet werden; solche Messungen gelangen demnächst zur Durchführung.

Beim Kalium wird die Messung durch die natürliche Radioaktivität des K^{40} kompliziert. Durch Filter geeigneter Dicke gelang es jedoch, die Intensität des natürlichen β -Spektrums ($E_{\text{max}} \sim 0,4$ MeV) gegenüber dem künstlichen des K^{38} , das im Prozess $\text{K}^{39}(\gamma, n)\text{K}^{38}$ ($T = 7,7$ min) erzeugt wird, so stark zu schwächen, dass die Bestimmung der Halbwertszeit möglich wurde. Die mit K_2S durchgeführten Messungen ergaben $T = 7,9$ min. Da diese Periode innerhalb der Fehlergrenzen mit der des K^{38} übereinstimmt, und da ferner an reinem Schwefel keine Andeutung einer Aktivität dieser Halbwertszeit gefunden werden konnte, so dürfte sie dem Kernphotoeffekt an K^{39} zuzuschreiben sein.

Die relativen Ausbeuten der neu gefundenen (γ, n) -Prozesse wurden verglichen mit derjenigen an Kupfer: $\text{Cu}^{63}(\gamma, n)\text{Cu}^{62}$ ($T = 10,5$ min). Sie sind durchwegs kleiner als die von Cu^{63} und betragen: für Schwefel 14%, für Aluminium 11%, für Magnesium $\approx 5\%$ und für Kalium $\approx 6\%$ der Ausbeute an Cu^{63} .

Der Bau dieser Anlage wurde ermöglicht dank einem durch Herrn Schulratspräsident Prof. Dr. A. ROHN vermittelten Kredit der Zentralstelle für Arbeitsbeschaffung in Bern. Von der ALUMINIUM-INDUSTRIE A.-G. Neuhausen wurde uns das Aluminiumblech für die Hochspannungselektrode geschenkwise überlassen. Die folgenden Firmen haben uns bei der Lieferung verschiedener Bestandteile in verdankenswerter Weise unterstützt: PORZELLAN-FABRIK LANGENTHAL A.-G., A.-G. BROWN, BOVERI & Co., Baden, HAEFELY A.-G., Basel, MICA FIL A.-G., Zürich-Altstetten. Allen diesen Institutionen und Firmen sei auch an dieser Stelle bestens gedankt.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidg.
Techn. Hochschule.

Über den Begriff des Atoms. I

von Willy Seherrer.

(2. XII. 1941.)

Einleitung.

In dieser Arbeit soll eine Reihe von Vorschlägen zur Atomtheorie, die ich seit 1933 mit Unterbrechungen einzeln publiziert habe, zu einem einheitlichen Ganzen gestaltet werden.

Jeder einzelne dieser Vorschläge hat seinerzeit nicht zu dem gewünschten Ziele geführt, und zwar — wie ich jetzt vermute — vor allem deshalb, weil die Ansätze für die Wechselwirkung ungeeignet waren. Ich kann daher dem Leser nicht zumuten, sich an Hand meiner früheren Publikationen zu informieren. Hingegen werde ich mir gestatten, jeweils diejenige Publikation zu zitieren, in der ein jetzt verwerteter Gesichtspunkt zum erstenmal ausgesprochen wurde.

Die Grundidee, nämlich die Forderung eines relativistisch invarianten vierdimensionalen Weltatoms, ist sich immer gleich geblieben.

Über die Dringlichkeit der Erforschung der wellenmechanischen Atomtheorie brauche ich weiter kein Wort zu verlieren¹⁾.

Der vorliegende I. Teil enthält die Grundlagen der vorzuschlagenden Theorie. In weiteren Fortsetzungen sollen die sich ergebenden Einzelprobleme in Angriff genommen werden.

§ 1. Grundsätzliches.

Die Grundannahme der speziellen Relativitätstheorie besteht darin, dass die Zeit t kein Parameter, sondern eine Koordinate sei, die mit den Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 durch den pseudo-euklidischen „Pythagoras“

$$r^2 = c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (1)$$

zu einem vierdimensionalen Kontinuum verschmolzen werden müsse. Es muss daher als eine erstaunliche Tatsache bezeichnet

¹⁾ Vgl. v. WEIZSÄCKER: „Die Physik der Gegenwart und das physikalische Weltbild“. Naturw. 29, S. 185 (1941).

werden, dass die Fundamentalinvariante (1) in der Relativitätstheorie immer im Hintergrund geblieben ist¹⁾.

Ein dauernd existierender Partikel muss in der relativistischen Geometrie als Weltlinie interpretiert werden und entspricht somit auf keinen Fall dem logischen Begriff des Atoms — des Unteilbaren. Das Unteilbare der relativistischen Welt ist der Weltpunkt²⁾. Eine vierdimensionale physikalische Metrik, die nicht den materiellen Weltpunkt als notwendiges Korrelat zur totalen Welt besitzt, ist eine Scheinmetrik.

Wir erheben daher die Forderung, die Relativitätstheorie müsse auf Biegen oder Brechen beansprucht werden, damit sie der Grundrelation zwischen totalem Zeitraum und Weltpunkt gerecht werde.

Ich beginne mit einigen allgemeinen Bemerkungen über den Begriff des Atoms. Das Atom — das Unteilbare — ist eine Grenze, die der Geist sich selber setzen muss, wenn er nicht den Halt verlieren will. Das Atom in der Geometrie ist der Punkt. In der Geometrie hat man an diesem Begriff nie ernstlich Anstoss genommen, wohl vor allem deshalb, weil man ihn als rein geistige Setzung ansah, zu deren Vollzug wir wohl die nötige Freiheit besitzen.

Ganz anders scheinen die Dinge in der Wirklichkeit zu liegen. Etwas in uns sträubt sich dagegen, einem punktförmigen Gebilde Realität zuzubilligen. Es liegt aber keine Notwendigkeit dafür vor, einen materiellen Punkt als ein Nichts anzusehen. Rein logisch betrachtet, ergibt sich einfach, dass alle eventuell neben der Ortsbestimmtheit vorhandenen weiteren Eigenschaften nicht durch den Begriff der Ausdehnung erfasst werden können. Hingegen ist es sehr wohl denkbar, dass diese weiteren Eigenschaften noch durch den Begriff der Zahl als Intensität erfassbar sind.

Faktisch ist die Physik nie anders verfahren! Am deutlichsten ist dies bei der klassischen Kontinuumsphysik zu erkennen. Sie verfügt über den leeren Raum und füllt ihn aus mit Materie als Intensität. Undurchsichtiger werden die Verhältnisse in der kinetischen Theorie der Materie. Da diese Theorie zweifellos in der historischen Entwicklung einen Fortschritt darstellt, liegt hier ein Paradoxon vor. Bei näherem Zusehen erkennt man aber, dass auch hier der Begriff der Intensität zu finden ist. Man muss ja unterscheiden zwischen unbesetzten (leeren) und besetzten

¹⁾ „Relativistische Übertragung des Coulomb'schen Gesetzes“. Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft Bern, S. IX, 1933.

²⁾ „Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips“ I. Helv. Phys. Acta, X, 2, S. 157, 1937.*

Stellen. Die klassische Atomistik verfügt also über die rudimentären Intensitäten 0 und 1.

Eine neue Phase erreicht das Atomproblem in der allgemeinen Relativitätstheorie mit der Forderung, die Metrik als physikalisches Agens zu interpretieren. Es entstand das Bedürfnis, den leeren Raum auszuschalten. Im Sinne unserer Erläuterung könnte man also sagen, die geometrischen Feldtheorien seien Versuche, mit der Intensität 1 auszukommen. Im folgenden werden wir sehen, dass die hier zu machenden Vorschläge darauf hinauslaufen werden, innerhalb der Metrik der speziellen Relativitätstheorie die Intensitäten 0, 1, 2, ... n , ... zu verwenden.

Man kann schliesslich die Frage aufwerfen, ob es im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie möglich sei — eventuell unter geeigneter Modifikation der gruppentheoretischen Ansätze, von HELMHOLTZ und LIE, — die Intensität 0 auszuschalten.

Der Scharfsinn, mit dem schon die alten Philosophen das Problem erfasst haben, verdient hervorgehoben zu werden. Sie erkannten klar, dass dem letzten Element keine Ausdehnung zugeschrieben werden darf. Wäre es ausgedehnt, so könnte man es wieder teilen. Im Gegensatz dazu behaupten namhafte Forscher aus neuerer Zeit, das Problem des Elektrons bestehe darin, die Kräfte herauszufinden, welche ein Auseinanderstieben seiner gleichgeladenen Teile verhindern! Dagegen ist zu sagen: entweder stellt sich der Autor das Elektron als ein Kontinuum vor und hat damit dieselbe Problematik wie im Makroskopischen oder er denkt an noch kleinere Partikel und dann beginnt eine Stufe tiefer dasselbe Spiel von neuem.

Eine letzte Bemerkung: Einen höchst differenzierten Atom-begriff schuf LEIBNIZ mit der Idee der Monade. Die folgenden Ausführungen werden zeigen, dass in gewissem Sinne in der Relativitätstheorie ein Zwang besteht, der uns einer ähnlichen Begriffsbildung zutreibt.

Es wird sich herausstellen, dass die hier vorgeschlagenen Ansätze formal mathematisch sich fast noch enger an die klassische Dynamik anschliessen lassen als die jetzt üblichen. Inhaltlich bedeuten sie dagegen eine einschneidende Modifikation der gewohnten Vorstellungen. Fast alles muss umgedeutet und neu berechnet werden. Über die mathematischen Ergebnisse dieser umfangreichen Arbeit, die wohl die Kräfte eines Einzelnen übersteigt, habe ich daher noch keinen Überblick. Meine Vorschläge sind also auch jetzt noch notgedrungen provisorisch. Hingegen glaube ich jetzt schon versichern zu dürfen, dass sich aus ihnen ein geometrisch durchsichtiges und daher wohl auch methodisch brauchbares Bild ergibt.

§ 2. Definitionen und Postulate.

Wir legen jetzt also den der Metrik¹⁾ (1) gehorchenden Zeitraum der speziellen Relativitätstheorie zugrunde. In Fällen, wo keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, werden wir ihn kurz auch Raum nennen und entsprechend von „räumlichen“ Eigenschaften reden.

Bei jeder Modifikation der Wellenmechanik stellt sich von neuem die Frage, ob der skalare Standpunkt ausreichend sei. Es lassen sich gute Gründe für ihn geltend machen¹⁾. Wir werden also so lange skalare Wellenfunktionen benützen, als sich auf dem Boden der neuen Theorie keine zwingenden Gegengründe ergeben. Doch glaube ich, die Begriffe so gefasst zu haben, dass im Prinzip eine Ausdehnung auf mehrere Komponenten möglich sein sollte.

Nun wollen wir bei der Numerierung der aufzuzählenden Definitionen und Postulate folgende Unterscheidung treffen. Die „*Grundhypothesen*“, von denen ich hoffe, dass sie wenigstens im Rahmen dieser Theorie keiner Abänderung mehr bedürfen, sollen nur durch Zahlen bezeichnet werden. Die „*Arbeitshypothesen*“, deren Auswahl vor allem dem Zwecke der grösstmöglichen Einfachheit dienen soll, seien durch Zahlen mit angehängten Buchstaben bezeichnet.

Was die *Terminologie* betrifft, so wollen wir uns möglichst eng an die in der Wellenmechanik gebräuchliche anschliessen. Da nun der von uns postulierte Atombegriff sich im wesentlichen mit dem Begriff des *Lichtquants* deckt, wollen wir auch die Bezeichnung beibehalten und also von *Quanten* sprechen. Der Name *Elektron* dagegen soll verwendet werden für die jedem Quant auf Grund eines Trägheitspostulates zuzuordnende Weltlinie.

Definition 1). Ein Quant ist die einfachste materielle Wirkung, welche räumlich durch Angabe eines einzigen Weltpunktes festgelegt werden kann.

Eventuelle weitere Attribute (Quantenzahlen) sollen also später in einem besonderen Postulat zum Ausdruck kommen.

Nun wollen wir erläutern, wie man zu einem Trägheitspostulat gelangen kann. Wir wählen irgend einen Weltpunkt als Ursprung o eines Koordinatensystems und zerlegen den ganzen zugehörigen Zukunftskegel in lauter Zellen vom Volumen

$$\Delta \tau = \Delta(ct) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (2)$$

¹⁾ „Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips“ II. *Helv. Phys. Acta*, X, 5, S. 388, 1937.

Die Zerlegung könnte in zentralsymmetrischer und drehinvarianter Weise in den Kegel eingepasst werden, doch wollen wir uns dabei nicht aufhalten.

Die erhaltenen Zellen unterwerfen wir jetzt einer bestimmten Numerierung

$$Z_1, Z_2, \dots Z_n, \dots \quad (3)$$

und denken uns eine nicht abbrechende Folge von virtuellen Experimenten, deren i^{tes} Element folgendermassen definiert sei:

Im Nullpunkt befinde sich ein Quantum Q_0 . Dann wissen wir aus Erfahrung, dass es sicher Zellen (3) gibt, in denen wieder *Quanten* auftreten, die direkt oder indirekt Folgen von Q_0 sind. Diese und nur diese zählen wir. Wir machen damit natürlich die Annahme, dass in einer Zelle nur endlich viele Quanten auftreten. Ihre Anzahl in der n^{ten} Zelle sei N_{in} . Wir erhalten so eine nicht-abbrechende Folge von nichtnegativen ganzen Besetzungszahlen.

$$N_{i1}, N_{i2}, \dots N_{in}, \dots \quad (4)$$

In concreto stellt also die Serie (4) die Lebensgeschichte des Lichtquants Q_0 von der Gegenwart bis in alle Zukunft dar.

Das Experiment kann daher de facto nicht wiederholt werden. Sofern aber über die von der Experimentalphysik bearbeiteten Weltgebiete genügende Homogenität besteht, kann man über viele verschiedene derartige Experimente Mittelwerte bilden und in diesem Sinne soll also die oben eingeführte Experimenterserie interpretiert werden. Eine Gesetzmässigkeit existiert, falls die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta\tau \rightarrow 0}} \frac{\sum_{\lambda=1}^i N_{\lambda} n_{\lambda\Delta\tau}}{\sum_{\lambda=1}^i N_{\lambda} 1_{\lambda\Delta\tau}} = u^2(ct, x_1, x_2, x_3) \quad (5)$$

existieren.

Die rechte Seite von (5) ist eine *relative Wahrscheinlichkeitsdichte*, und die genaue Durchführung des Grenzübergangs denken wir uns so:

Wir wählen im Zukunftskegel einen *Beobachtungspunkt* (ct, x_1, x_2, x_3) und einen *Vergleichspunkt* $(1, 0, 0, 0)$. Dann wählen wir die Zellgrösse $\Delta\tau$ und hierauf die Numerierung (3). Nun sind die Serien (4) bestimmt. Sofern man aber zu einer scharfen Ortsfunktion vordringen will, muss man sich überdies noch den Grenzübergang $\Delta\tau \rightarrow 0$ hinzu denken. Bei jeder Änderung von $\Delta\tau$ muss aber die Numerierung (3) neu gewählt, resp. ergänzt werden. Daher ist es nötig, auf der linken Seite von (5) $\Delta\tau$ den Indices anzu-

hängen. $n_{j\tau}$ und $l_{j\tau}$ bedeuten die jeweiligen Nummern derjenigen $\Delta\tau$ -Zellen, in denen Beobachtungspunkt und Vergleichspunkt liegen.

Nun formulieren wir

Postulat 1). *Befindet sich im Ursprung ein Quant Q_0 , so existiert im Zukunftskegel eine eindeutige Wahrscheinlichkeitsamplitude $u(ct, x_1, x_2, x_3)$, die einer de Broglie'schen Wellengleichung*

$$\square u \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = - \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 u \quad (6)$$

genügt.

Ist \mathfrak{G} ein Teilgebiet des Zukunftskegels, so liefert das Integral

$$\int_{\mathfrak{G}} u^2 d(ct) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\mathfrak{G}} u^2 d\tau \quad (7)$$

die relative Wahrscheinlichkeit dafür, dass in \mathfrak{G} ein Quant Q als Wirkung von Q_0 anzutreffen ist.

Nach diesem Postulat erhält also das Quant als weiteres Attribut eine Masse m oder präziser eine universelle Länge $\frac{\hbar}{m c}$ zugeordnet, deren räumliche Auswirkung wohl vorhanden, aber unbestimmt ist.

Da das Postulat 1) das dauernde Auftreten von „Wirkungsquanten“ (Quanten als Wirkungen) verbürgen soll und wie die Lösung von (6) zeigt, auch tatsächlich verbürgt, besteht für das Integral (7) keine totale Normierbarkeit über den Zukunftskegel.

Als Quantenbedingung verlangen wir daher neben der Eindeutigkeit nur das

Postulat 2). *Das Integral (7)*

$$w_{\mathfrak{G}} = \int_{\mathfrak{G}} u^2 d\tau \quad (7)$$

soll für jeden endlichen Teilbereich des Zukunftskegels existieren.

Die Parameter der durch diese Forderung ausgewählten Lösungen von (6) sind also weitere Attribute (Quantenzahlen) mit räumlich unbestimmter Auswirkung.

Wir kehren nun wieder zu den Erläuterungen zurück, die uns zum Postulat 1) geführt haben. Wir stellen uns also vor, dass das zukünftige Geschehen, das durch ein Quant Q_0 in o verursacht wird, geometrisch in einer unendlichen Menge von Weltpunkten zum Ausdruck kommt, die im Endlichen keine Häufungsstelle besitzt. Trotzdem kann man daraus nicht schließen, dass es in dieser Menge einen o am nächsten gelegenen Weltpunkt gibt, denn die Menge der durch $0 < r^2 < \varepsilon$ definierten Punkte

zieht sich wegen (1) bis ins Unendliche. Nun haben wir aber schon von direkten und indirekten Wirkungen gesprochen. Diese Ausdrucksweise ist also nur legitim, wenn wir weiter einführen das *Postulat 1a*). Unter allen durch Q_0 erzeugten Wirkungen existiert genau eine Q_0 am nächsten gelegene Q_1 , die wir als „direkte Wirkung“ von Q_0 bezeichnen.

Die indirekten Wirkungen definieren wir nun durch Iteration und erhalten damit das

Postulat 1b). Die Gesamtheit aller durch Q_0 verursachten Wirkungen entsteht aus Q_0 durch Iteration des Prozesses der direkten Wirkung.

Genau so, wie wir nach den „Wirkungen“ von Q_0 in der Zukunft fragen, können wir auch nach seinen „Ursachen“ in der Vergangenheit fragen. Selbstverständlich lassen wir unsere Postulate auch in dieser Richtung gelten. Dann ergibt sich in leicht verständlicher Abkürzung die

Folgerung 1). Die Gesamtheit aller Ursachen und Wirkungen eines Quantums Q_0 bildet eine beidseitig unbegrenzte Kette von Weltpunkten, von denen je zwei aufeinanderfolgende durch einen zeitartigen Vektor verbunden werden können.

Es ist nicht schwer, auf Grund geometrischer Überlegungen (Ineinanderschachtelungen von Null-Kegeln) zu erkennen, dass die gewonnene Numerierung invarianten Charakter besitzt.

Auch für die Frage nach dem Auftreten der direkten Wirkung lässt sich eine Statistik ausdenken, die sogar wesentlich einfacher ist als die oben verwendete. Wiederum verschafft man sich eine nichtabbrechende Folge von „Lebensläufen“ und braucht jeweils nur diejenige Zelle zu notieren, wo die direkte Wirkung auftritt. An Stelle der Serie (4) tritt eine Serie, die nur an einem Platz eine 1 und sonst lauter Nullen besitzt. Der Index der 1-Stelle ist also eine eindeutige Funktion des Index der Serie

$$p = p(i)$$

Für die Zelle Z_n erhält man so nach i Experimenten eine absolute Wahrscheinlichkeit

$$w_{i,n} = \frac{1}{i} \sum_{\lambda=1}^i N_{\lambda n}$$

wobei offenbar gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_{i,n} = \frac{1}{i} \sum_{\lambda=1}^i N_{\lambda p(i)} = 1$$

Bei einem (5) entsprechenden Grenzübergang muss also eine normierbare Wahrscheinlichkeitsdichte resultieren. Ich weiss aber

nicht, ob schon zu (6) Lösungen existieren, die diese Interpretation wirklich zulassen.

Wir definieren daher mit Vorbehalt:

Definition 1a). Ein Elektron ist die Gesamtheit aller Ursachen und Wirkungen eines Quantums.

Zur vorläufigen Erläuterung dieser vielleicht seltsam anmutenden Definition bemerke ich, dass sich unter den vierdimensional zentralsymmetrischen Lösungen von (6) sowohl Ruhlösungen mit der richtigen DE BROGLIE-Frequenz als auch gegen die Lichtgeschwindigkeit strebende Lösungen mit gegen Null abklingender Frequenz (Neutrino's?) finden.

Durch die vorausgegangenen Definitionen und Postulate haben wir den Begriff des Quantums und des Elektrons so weit geschildert, als es vorderhand für die Zwecke unserer Theorie nötig scheint. Das Einzelelektron erscheint als eine Einheit aus einer unendlichen, aber diskreten Serie von Lichtquanten¹⁾.

Wir kommen damit zum Mehrelektronenproblem im kräftefreien Falle und legen für diesen Zweck zu Grunde das

Postulat 3). Jedes Einzelelektron ist ein Individuum und muss daher durch eine individuelle Wellenfunktion beschrieben werden.

Als Ergänzung fügen wir hinzu

Postulat 3a). Alle Elektronen sind gleich, d.h. sie genügen derselben Wellengleichung (6).

Wie man leicht sieht, ergibt sich die

Folgerung 2): Zwei Elektronen E_1 und E_2 sind nicht identisch, wenn in der Vereinigungsmenge ihrer Quanten mindestens ein raumartiger Verbindungsvektor existiert²⁾.

Es wird sich herausstellen, dass das Postulat 3) den stärksten Eingriff in die von der heutigen Physik verwendeten Prinzipien bedeutet. Zur Erläuterung diene folgende Überlegung. Sind Q_1 und Q_2 zwei Quanten mit raumartiger Distanz, so geben sie Anlass zu zwei verschiedenen Elektronen E_1 und E_2 . Sind K_1 und K_2 die zu Q_1 und Q_2 gehörigen Zukunftskegel, so ergibt sich eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich zwei den verschiedenen Elektronen angehörende Quanten in demselben Volumenelement $\Delta\tau$ des Durchschnitts der beiden Kegel befinden. Dann aber wird die im Wesen des Atombegriffs liegende Antinomie wieder wirksam. Wir erinnern zu dem Zweck an die statistische Erläu-

¹⁾ „Versuche einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips“ III. Helv. Phys. Acta X, 6, S. 475, 1937.

²⁾ Die Frage, ob es im andern Falle zweckmässig oder nötig ist, sie als identisch anzusehen, lassen wir noch offen.

terung vor der Aufstellung von Postulat 1). Wir machten dort die Annahme, dass innerhalb eines vorgegebenen Volumens nur endlich viele Quanten liegen sollen. Jetzt müssen wir uns weiter entscheiden, ob wir zulassen wollen, dass die in einem vorgegebenen Volumen $\Delta\tau$ vorhandene Quantenzahl in dem Sinne unbeschränkt wachsen kann, dass immer neue Quanten *neben* die schon vorhandenen zu liegen kommen oder nicht. Im ersteren Falle wäre wiederum ein Abgleiten in eine Kontinuums-theorie wohl unvermeidlich. Wenn wir also unserer Grundforderung nach einem Wirkungsatom in ungekünstelter Weise gerecht werden wollen, so haben wir das Postulat 3) zu ergänzen durch das

Postulat 4). In einem endlichen Volumen des vierdimensionalen Zeitraums können nur endlich viele Wirkungsquanten nebeneinander liegen. Treten in diesem Volumen weitere Quanten auf, so müssen sie mit schon vorhandenen koinzidieren.

Durch dieses Postulat wird natürlich die Frage nach der Existenz eines kleinsten von genau einem Quant auszufüllenden Volumens nahegelegt. Wir wollen aber keinen Versuch zu ihrer näheren Präzisierung unternehmen, bevor dazu ein zwingender Anlass vorliegt.

Der einschneidende Charakter des Postulats 4) dürfte ohne weiteres einleuchten. Seine Durchführbarkeit hängt in erster Linie von dem Ansatz für die Wechselwirkung ab. Dieser muss so gewählt werden, dass die sogenannte Kernkatastrophe von vornherein ausgeschaltet wird¹⁾. Ein hierzu geeigneter Vorschlag soll im nächsten Paragraphen gemacht werden.

Zum Schluss noch zwei besondere Hinweise.

1. Durch das Postulat 4) wird die in § 1 zu einfach formulierte Forderung nach einem punktförmigen Quantum korrigiert, denn was für die zu erwartenden Quanten gelten soll, muss natürlich schon dem Ausgangsquantum Q_0 zugebilligt werden. Auf Schritt und Tritt zeigt uns also das Wirkungsquantum, dass wir in ihm die Leistungsgrenze des physikalischen Raumes erreicht haben. Man könnte also versuchen, hier von vornherein durch eine Neufundierung der Geometrie im Kleinen saubere Verhältnisse zu schaffen. Wir wollen aber diesen Weg nicht beschreiten, denn nur die Wechselwirkungsgleichungen können uns beim Vergleich ihrer Lösungen mit der Erfahrung die richtigen Fingerzeige geben.

¹⁾ „Ein Ansatz für die Wechselwirkung von Elementarteilchen“. *Helv. Phys. Acta*, XIV, 1, S. 82, 1941.

2. Das Quadrat in Gleichung (7) soll wörtlich interpretiert werden. Wir werden also so lange an der Forderung *reeller* Wellenfunktionen festhalten, als keine untragbaren Folgerungen auftreten. Vorderhand hab ich keine Schwierigkeit bemerkt, falls man sich des im nächsten Paragraphen vorzuschlagenden Wechselwirkungsansatzes bedient.

§ 3. Wechselwirkungsgleichungen.

Als Ausgangspunkt wählen wir die klassische Schrödingergleichung im zeitfreien Falle. Dieselbe ergibt sich sehr befriedigend, wenn man in der Hamilton'schen Energiefunktion

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \quad (8)$$

die Substitution

$$S = \hbar \operatorname{Lg} \psi \quad (9)$$

ausführt und dann verlangt, dass das Integral

$$w = \int H\left(x, \frac{\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \psi^2 dx \quad (10)$$

unter der Nebenbedingung

$$\text{konst.} = \int \psi^2 dx \quad (11)$$

ein Extremum liefere.

Wenn man dieses Verfahren auf die relativistische Hamilton-Funktion

$$H \equiv \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \varphi_i \right)^2 \quad (12)$$

des Elektrons anwendet, so tritt scheinbar ein vollkommenes Versagen ein, denn das Coulombpotential wird gleichsam eliminiert. Die Rechnung ergibt, falls wir in diesem Falle wie üblich die Wellenfunktion mit u statt mit ψ bezeichnen

$$\square u - \left(A + \frac{e}{\hbar c} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \varphi_k \varphi_k \right) u = 0 \quad (13)$$

wo A einen Lagrange'schen Multiplikator darstellt, der für das Elektron und unter Beachtung der von uns bevorzugten zeitartigen Schreibweise aller Operatoren den Wert

$$A = - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (14)$$

erhalten muss. Hinzu tritt noch die Lorentzkonvention

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = 0. \quad (15)$$

Aber auch ohne sie ist in (13) nach der üblichen Abspaltung eines reinen Zeitfaktors das Coulombpotential schon verschwunden.

Die geschilderte Schwierigkeit wird im Falle des Einelektronproblems durch direkte Operatorenumwandlung auf eine im Grunde genommen wenig befriedigende Weise zum grössten Teil behoben. Wir setzen das Resultat in einer für den Vergleich mit (13) geeigneten Form ebenfalls her.

$$\square u - \left(1 + \frac{2\sqrt{-1}e}{\hbar c} \varphi_k \frac{\partial \text{Lg } u}{\partial x_k} + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \varphi_k \varphi_k \right) u = 0. \quad (16)$$

Für das Mehrelektronenproblem versagt auch die Operatorenmethode. Beim Versuch, sich durch Analogieen aus der relativistischen Punktdynamik leiten zu lassen, machen sich die Teilchenabstände in fatalster Weise geltend. Dasselbe gilt — trotz interessanter Symptome¹⁾ — für einen Ansatz mit einem mehrdimensionalen Konfigurationsraum.

Schliesslich noch ein Wort zum retardierten Potential. Es erzeugt vermöge seiner Asymmetrie ganz neue Schwierigkeiten²⁾. Abgesehen davon habe ich den Eindruck, es besitze keine selbständige physikalische Bedeutung. Geometrisch betrachtet, bestreicht es nämlich nur drei Dimensionen, und physikalisch betrachtet, muss ja die Energiebilanz zwischen Sender und Lichtquant geregelt sein, bevor das Lichtquant den Empfänger erreicht hat.

Das sind in aller Kürze die Gründe, die mich nun veranlassen, auf die explizite Einführung irgendwelcher retardierter oder unretardierter Abstände vollständig zu verzichten.

Einen Fingerzeig, wie man unter diesen Umständen vorzugehen hat, erhält man durch die in der Wellenmechanik übliche Berechnung der Ausstrahlung. Da werden ja die Potentiale aus retardierten Integralen über die Wellenfunktion des störenden Teilchens gewonnen. Nun ist aber diese Wellenfunktion ja ohnehin schon virtuell über den ganzen Raum verbreitet!

Bei unserer vierdimensionalen Auffassung werden diese Verhältnisse geometrisch vollkommen durchsichtig. Liegt das gestörte

¹⁾ „Ein dynamisches Modell für schwere Teilchen“. *Helv. Phys. Acta* XII, 5, S. 249, 1939.

²⁾ „Über retardierte Wechselwirkung“. *Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft*, S. 13, 1939.

Teilchen nicht im Zukunftskegel des störenden Teilchens, so wird es überhaupt nicht erfasst. Liegt es aber in diesem Kegel, so ist an seiner Weltstelle schon eine wohlbestimmte Wahrscheinlichkeitsdichte des störenden Teilchens gegeben. Hier noch eine Überlagerung einer Feldkraftwelle vorzunehmen, ist wohl sinnlos. Vielmehr bietet sich ganz von selbst der Gedanke, die auf das gestörte Teilchen wirkende Kraft direkt aus der Wahrscheinlichkeitsdichte des störenden Teilchens an der Stelle des gestörten Teilchens abzuleiten.

Bezeichnen wir also die Wellenfunktion des störenden Teilchens mit v , so haben wir in (13) an Stelle von φ_k einen Vektor zu setzen, der aus v abgeleitet ist. Da aber v^2 nach Postulat 1) eine relative Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt, so muss dieser Vektor invariant sein gegenüber Multiplikation von v mit einer Konstanten.

Die naheliegendste Bildung dieser Art ist

$$\varphi_i = k e \frac{\partial \text{Lg } v}{\partial x_i} \quad (17)$$

wo k einen reinen Zahlenfaktor darstellt. Aus der so aus (13) abgeleiteten Gleichung für u ergibt sich nach Postulat 3a) durch Vertauschung von u und v die entsprechende Gleichung für v .

Bezeichnen wir also mit ε das k -fache der Feinstrukturkonstanten $\frac{e^2}{\hbar c}$, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem¹⁾ für die Wechselwirkung zweier Elektronen u und v :

$$\varepsilon = k \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \quad (18)$$

$\begin{aligned} \square u - [A + \varepsilon \square \text{Lg } v + \varepsilon^2 (\text{grad Lg } v)^2] u &= 0 \\ \square v - [A + \varepsilon \square \text{Lg } u + \varepsilon^2 (\text{grad Lg } u)^2] v &= 0 \end{aligned}$	(19)
--	------

Die naheliegendste Ausdehnung dieses Systems auf den Fall von n Elektronen mit den Wellenfunktionen

$$u_1, u_2, \dots u_n$$

ist wohl folgende:

Wir legen die erste der Gleichungen (19) zugrunde und setzen darin

$$u = u_i$$

¹⁾ „Bemerkungen zu meiner Arbeit usw.“, Helv. Phys. Acta XIV, 2, S. 130, 1941.

und im Sinne der Wahrscheinlichkeit des sowohl als auch

$$v = \prod_{k=1}^n u_k^{(i)}$$

Der eingeklammerte Index i soll also andeuten, dass der Faktor u_i ausgelassen wird. Im selben Sinne werden wir das Zeichen $\Sigma^{(i)}$ für Summen verwenden. Wir erhalten also

$$\square u_i \left\{ .1 + \varepsilon \square \sum_{k=1}^n u_k^{(i)} \text{Lg } u_k + \varepsilon^2 \left(\text{grad } \sum_{k=1}^n \text{Lg } u_k \right)^2 \right\} u_i \quad (20)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

als vollständiges System von Gleichungen für die Wechselwirkung von n Elektronen.

Zu diesen Gleichungen sind nun verschiedene Bemerkungen am Platze.

1) In *formalmathematischer Beziehung* empfiehlt es sich, die durch das System (20) gegebenen Probleme aufsteigend vom Speziellen zum Allgemeinen in drei Kategorien zu ordnen:

a) *Spezielles Koinzidenzproblem (Einkörperprobleme):*

Die n Elektronen koinzidieren in einem Weltpunkt und befinden sich überdies im selben Zustand, d. h. es gilt

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n$$

b) *Allgemeines Koinzidenzproblem (spezielle Mehrkörperprobleme):*

Die n Elektronen koinzidieren in einem Weltpunkt, befinden sich aber nicht alle im selben Zustand.

c) *Allgemeines Mehrelektronenproblem:*

Die Ausgangskonfiguration der n Elektronen umfasst mehr als einen Weltpunkt, von denen je zwei eine raumartige Distanz besitzen.

Die damit formulierten Mehrelektronenprobleme sind bedeutend einfacher als die entsprechenden Schrödinger'schen Probleme. Zum Beispiel gilt folgende Aussage: Sämtliche Probleme a) und b) sind in vierdimensionalen Polarkoordinaten vollständig separierbar.

2) In *physikalischer Beziehung* ist durch die Einführung von ebensoviel Wellenfunktionen wie Teilchen die Gefahr der Kernkatastrophe — wie schon im vorigen Paragraphen betont wurde — auf radikale Weise beseitigt worden.

Ganz allgemein scheint eben für die methodische Behandlung des n -Teilchenproblems folgende Alternative zu bestehen: Entweder eine *Wellenfunktion* und n Orte oder n *Wellenfunktionen* und *höchstens* n Orte. Im ersten Falle sind — wie mir scheint — letzten Endes explizite in die Gleichung eingehende variable Abstände unvermeidlich, im zweiten Falle dagegen die n -fachen Koinzidenzen.

3) Bei oberflächlicher Betrachtung könnte vielleicht der Eindruck entstehen, dass durch die Einführung eines Gradienten gemäss (17) die ganze *Maxwell'sche Theorie* preisgegeben werde. Möglicherweise ist gerade das Gegenteil der Fall! Wie wir zu Beginn dieses Paragraphen schon bemerkt haben, bewirkt ja die orthodoxe Einführung des Vektorpotentials in die Gleichung (13) paradoxerweise die Annullierung des Coulombpotentials. Dagegen liefert die Durchrechnung des speziellen Koinzidenzproblems a) folgendes interessante Resultat: Das Coulombpotential wird restituiert, aber erst, wenn die Zahl n der koinzidierenden Teilchen die Relation

$$n > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \quad (21)$$

erfüllt. Diese Grenze hängt nach (18) vom Zahlenfaktor k ab, für dessen Bewertung wir aber noch keine Handhabe besitzen. Vermutlich wird ja die Zahl ε klein sein. Setzt man probeweise $k = 1$, so ergibt sich

$$n > 138.$$

Eine Theorie aber, die ein Coulombfeld liefert und im übrigen relativistisch invariant ist, enthält schon einen sehr wesentlichen Zug der Maxwell'schen Theorie. Im Atomaren mehr zu fordern, kann sehr wohl einen Abweg bedeuten.

4) Ganz speziell sei noch einmal auf das Postulat 3a) hingewiesen, demzufolge also alle Elektronen gleich sein sollen. In den Gleichungen (19) und (20) wurde dementsprechend überall derselbe „Massenfaktor“

$$A = - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (14)$$

verwendet. Die durch die Ungleichung (21) ausgedrückte Bedingung hat ihrerseits nur einen Sinn, wenn man den Faktor k in (18) positiv annimmt. Wir interpretieren dies dahin, dass alle Elektronen gleich geladen seien.

Damit entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, ob aus diesen vollkommen symmetrischen Annahmen ein Verständnis für die bei

kleinen Teilchen beobachtete Asymmetrie in bezug auf Ladung und Masse gewonnen werden könne. Im nächsten Paragraphen werden wir Anzeichen dafür finden, dass unsere Erwartungen wenigstens hinsichtlich der Masse vielleicht gerechtfertigt sind. Hinsichtlich der Ladung muss ich die Frage noch ganz offen lassen. Darum wurde Postulat 3a) unter die provisorischen gerechnet.

Im übrigen ist der ganze Formalismus so gefasst, dass ungleiche Massen und ungleiche Ladungen nötigenfalls ohne weiteres in die Prämissen aufgenommen werden könnten.

§ 4. Entstehung schwerer Teilchen.

Wir ziehen nun aus den Gleichungen (20) für den Fall des „speziellen Koinzidenzproblems“, also unter der Voraussetzung

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u \quad (22)$$

einige vom gewählten Koordinatensystem ganz unabhängige Schlüsse. An Stelle der n Gleichungen (20) tritt eine Gleichung für die Funktion n :

$$\square u = \{A + (n-1)\varepsilon \square \text{Lg } u + (n-1)^2 \varepsilon^2 (\text{grad Lg } u)^2\} u \quad (23)$$

oder wegen

$$\square \text{Lg } u \equiv \frac{\square u}{u} - (\text{grad Lg } u)^2, \quad (24)$$

$$\square u = \left\{ \frac{A}{1 - (n-1)\varepsilon} - (n-1)\varepsilon (\text{grad Lg } u)^2 \right\} u. \quad (25)$$

Die Funktion u genügt also einer Gleichung mit einem modifizierten Massenfaktor

$$\frac{A}{1 - (n-1)\varepsilon} = \bar{A} = - \left(\frac{\bar{m}c}{\hbar} \right)^2. \quad (26)$$

Für die (scheinbare?) Masse eines einzelnen der n koinzidierenden Teilchen ergibt sich also

$$\bar{m} = \frac{m}{\sqrt{1 - (n-1)\varepsilon}} \quad (27)$$

Die Gesamtmasse aller n Teilchen erhält demnach den Wert*)

$$M = \frac{n \cdot m}{\sqrt{1 - (n-1)\varepsilon}} \quad (28)$$

*) Unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass „Strahlbildungen“ existieren, bei denen die n Teilchen beieinander bleiben.

An diesem Resultat ist vor allem die *qualitative* Feststellung wichtig, dass der Massenfaktor in (26) für positives ε nach endlich vielen Schritten sein Zeichen wechselt. Unsere Theorie führt also unmittelbar zum Schluss, dass mit wachsender Koinzidenzzahl n die Masse beständig wächst, um dann bei Überschreitung einer gewissen Grenze in einen ganz neuen Zustand überzugehen.

Wie man leicht erkennt, ist dieser Effekt ein allgemeiner Zug des vorgeschlagenen Systems, der nicht wesentlich von sekundären Modifikationen abhängt.

Die *quantitativen* Folgerungen aus (28) sind natürlich an den Vorbehalt gebunden, dass das Störungsglied in (25), das ja mit n wächst, den Masseneffekt nicht in unerwünschter Weise beeinflusst. Dieses Glied ist übrigens dadurch entstanden, dass man *genau* die elektrodynamische Hamiltonfunktion (12) des Elektrons übernommen hat und hängt ursprünglich vom Quadrat der Feinstrukturkonstanten ab. Hier ist also am ehesten die Stelle, wo ein Abänderung des Kraftansatzes in Frage kommen könnte. Doch wollen wir ohne triftigen Grund vorderhand keine Änderung der durch Variation entstandenen Gleichungen (20) diskutieren.

Unter diesen Vorbehalten bestimmen wir nun die obere Grenze der durch (2) gegebenen Massen.

Es sei also ε eine kleine positive Zahl. Dann können wir setzen

$$N < \frac{1}{\varepsilon} \leq N + 1 \quad (29)$$

wo N eine natürliche Zahl ist, oder also:

$$\frac{1}{\varepsilon} = N + \omega \quad (30)$$

das heisst

$$\varepsilon = \frac{1}{N + \omega} \quad (31)$$

mit

$$0 < \omega \leq 1 \quad (32)$$

Die mit reellen Massen verträglichen Koinzidenzzahlen haben nun nach (28) die Ungleichung

$$(n - 1)\varepsilon < 1 \quad (33)$$

zu erfüllen, d. h. nach den eben eingeführten Bezeichnungen die Relation

$$n < N + 1 + \omega, \quad (34)$$

Nach (32) ist also die grösste zulässige Koinzidenzzahl gegeben durch

$$n_0 = N + 1 \quad (35)$$

und daraus ergibt sich nach (28) die Masse

$$M_0 = (N + 1) \sqrt{\frac{N}{\omega} + 1} \cdot m \quad (36)$$

Das Resultat hängt also ganz wesentlich von der Dezimalen ω der Konstanten $\frac{1}{\varepsilon}$ ab! Ist $\frac{1}{\varepsilon}$ eine ganze Zahl, so herrscht eine vollkommene Zweideutigkeit. Dieselbe wird also am ehesten vermieden, wenn man setzt

$$\omega = \frac{1}{2} \quad (37)$$

woraus dann folgt

$$M_0 = (N + 1) \sqrt{2N + 1} \cdot m. \quad (38)$$

Setzen wir nun wieder in (18) probeweise $k = 1$, so folgt vorerst einmal

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\hbar c}{e^2}$$

Also haben wir im Sinne von (37) zu setzen $\frac{1}{\varepsilon} = 137,5$, d. h.

$$N = 137 \quad (39)$$

und daraus ergibt sich das Massenverhältnis

$$\frac{M_0}{m} = 138 \sqrt{275} = 690 \sqrt{11}$$

oder

$$\frac{M_0}{m} \sim 2280.$$

Man kann also sagen, dass der einfachste Fall einer an sich ja sehr variationsfähigen Auswahl wenigstens in der Grössenordnung das Massenverhältnis von Proton zu Elektron trifft.

Der kleinste Massenwert ergäbe sich für $\omega = 1$ zu

$$\frac{M_1}{m} = 138 \sqrt{138} \sim 1620$$

und der grösste für $\omega \rightarrow 0$ natürlich zu

$$\frac{M_2}{m} = \infty.$$

Wie man sieht, kann wegen des starken Einflusses von ω in vielen Einheitsintervallen, also für alle nicht zu grossen N ein derartiger Massenwert ermittelt werden.

Es ist auch denkbar, dass man umgekehrt einmal Anlass zu einer Bestimmung der Dezimalen ω unter Vorgabe von M_0/m und N erhält.

Eine endgültige Abklärung ist aber erst zu erwarten, wenn es gelungen ist, in der vorgeschlagenen Theorie das Wasserstoffspektrum darzustellen.

§ 5. Gibt es eine korrespondierende Punktdynamik?

Ist ein konservatives dynamisches System durch die generalisierten Koordinaten

$$x_1, \dots x_n$$

und die zugehörige Hamilton'sche partielle Differenzialsgleichung

$$H\left(x_1, \dots x_n; \frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = E \quad (40)$$

definiert, so erhält man die zugehörigen Lagrange'schen Gleichungen bekanntlich durch folgendes Verfahren:

Durch die Substitution

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i \quad (41)$$

führt man die Impulskoordinaten ein und erhält die Hamiltonfunktion

$$H \equiv H(x_1, \dots x_n; p_1, \dots p_n). \quad (42)$$

Hierauf führt man durch den Ansatz

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (43)$$

wo der Punkt die Ableitung nach der Zeit bedeutet, die Geschwindigkeitskomponenten ein. Dann löst man (43) nach den p_i auf und setzt die erhaltenen Funktionen von x_i und \dot{x}_i in den Ausdruck

$$L = p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} - H \quad (44)$$

ein. Die so ermittelte Funktion der x_i und \dot{x}_i ist die Lagrangefunktion

$$L \equiv L(x_1, \dots x_n; \dot{x}_1, \dots \dot{x}_n) \quad (45)$$

des betrachteten Problems.

Wendet man dieses Verfahren auf die partielle Differenzialgleichung (12) an, nachdem man sie aus dimensionellen Gründen mit $\frac{1}{2m}$ multipliziert hat, so ergibt sich die Lagrangefunktion

$$L \equiv \frac{m}{2} \dot{x}_k \dot{x}_k + \frac{e}{c} \varphi_k \dot{x}_k \quad (46)$$

Als Lagrange'sche Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (47)$$

resultieren die Gleichungen

$$m \ddot{x}_i = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k. \quad (48)$$

Falls man nun den Ansatz (17) für das Feld macht, resultiert überhaupt keine Kraftwirkung, entsprechend der wohlbekannten Vorschrift, dass an Stelle des Vektorpotentials kein Gradient gesetzt werden dürfe. Wir haben hier gewissermassen die Kehrseite des bei der Einführung von (13) geschilderten Versagens.

Hält man also in unserer formal durch (17) gekennzeichneten Theorie an dem genauen Ausdruck (12) fest, so resultiert keine korrespondierende Punktdynamik.

Nun haben wir schon im vorausgehenden Paragraphen festgestellt, dass unsere Schlüsse betreffend schwere Teilchen wenigstens *qualitativ* vom Glied mit ε^2 in (20) unabhängig sind. Es ist also möglich, sich eine punktdynamische Illustration der beschriebenen Masseneffekte zu verschaffen, wenn man statt (12) den Ausdruck

$$H = \frac{1}{2m} \frac{\partial S}{\partial x_k} \frac{\partial S}{\partial x_k} - \frac{e}{mc} \varphi_k \frac{\partial S}{\partial x_k} \quad (49)$$

zugrunde legt.

Die zugehörige Lagrangefunktion lautet:

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_k + \frac{e}{mc} \varphi_k \right) \left(\dot{x}_k + \frac{e}{mc} \varphi_k \right) \quad (50)$$

und als Bewegungsgleichungen ergeben sich

$$m \ddot{x}_i = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k + \frac{e^2}{mc^2} \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \quad (51)$$

oder nach (17)

$$m \ddot{x}_i = h^2 \cdot \frac{e^4}{2mc^2} \frac{\partial}{\partial x_i} [(\text{grad Lg } v)^2] \quad (52)$$

Der Parameter in (52) hat die Dimension einer Zeit und möge τ heissen. Wir ersetzen ihn durch die Länge

$$s = c\tau \quad (53)$$

Bezeichnen wir die Ableitungen nach s mit einem Strich, so erhalten wir an Stelle von (52)

$$x_i'' = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [(\text{grad Lg } v)^2]. \quad (54)$$

Dem anschaulichen Sinn unserer Theorie entspricht es aber besser, als Parameter eine reine Zahl zu verwenden, gewissermassen die Zahl der Wirkungselemente längs der Weltlinie des Teilchens¹⁾. Wir setzen also

$$s = \frac{\hbar}{mc} \sigma \quad (55)$$

und erhalten dann unter Berücksichtigung von (18):

$$\boxed{\frac{d^2 x_i}{d\sigma^2} = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^4 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} [(\text{grad Lg } v)^2]} \quad (56)$$

Die punktdynamische Behandlung erfordert also einen gemischten Standpunkt: Das Potential wird ermittelt aus der Wellenfunktion v des störenden Teilchens. In dem erhaltenen „Feld“ bewegt sich das gestörte Elektron als Punkt nach dem Gesetz (56).

Die Gleichungen (56) resp. (54) beschreiben also die korrespondierende Dynamik für den Fall, dass in (19) und (20) die Glieder mit ε^2 unterdrückt werden, d. h. also für die Wechselwirkungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \square u &= (\mathcal{A} + \varepsilon \square \text{Lg } v) u \\ \square v &= (\mathcal{A} + \varepsilon \square \text{Lg } u) v \end{aligned}} \quad (19^*)$$

für zwei Teilchen und

$$\boxed{\square u_i = \left[\mathcal{A} + \varepsilon \square \left(\sum_{k=i}^{n(i)} \text{Lg } u_k \right) \right] u_i} \quad (20^*)$$

für n Teilchen.

Diese letzten Gleichungen können übrigens für grosse n keinesfalls als erste Näherungen der Gleichungen (20) angesehen werden.

¹⁾ l. c. 5), S. 476.

Schliesslich sei noch betont, dass eine direkte Analogie zwischen den hier betrachteten atomaren Kräften und den makroskopischen Feldern entsprechenden, Ladungen gar nicht zu erwarten ist. Schon die Wahrscheinlichkeitsvoraussetzungen sind in beiden Fällen total verschieden. So können makroskopische Felder ja nur bestehen, wenn eine dauernde maschinelle Energiezufuhr in gewisse materielle Systeme stattfindet, während im Atomaren Systeme beschrieben werden müssen, die in freier Wechselwirkung stehen.

Schlussbemerkung.

Zum Schluss möchte ich noch einmal auf die prinzipielle Bedeutung von Postulat 3) zurückkommen. Es verlangt, dass ebenso viele Wellenfunktionen wie Elektronen eingeführt werden und nur auf dieser Basis sehe ich eine Möglichkeit, die expliziten Abstände — oder, anders ausgedrückt, die Überlichtgeschwindigkeiten — auszuschalten. Als unausweichliche Folgerung ergibt sich die Möglichkeit beliebig naher Koinzidenzen und diese wiederum führen — konsequent atomistisch gedacht — auf genaue Koinzidenzen gemäss Postulat 4).

Ob diese schwerwiegende Konsequenz bedingungslos eingehalten werden darf, kann erst der weitere Ausbau lehren.

Anders stehen die Dinge mit dem Postulat 3a). Wir haben hier eben vorderhand nur den einfachsten Fall lauter „gleichgeladener“ Teilchen gleicher Masse betrachtet. Rein logisch genommen, wäre diese einfache Grundlage natürlich sehr befriedigend. Die vorgeschlagene Methode liesse es aber durchaus zu, von vornherein verschiedene Teilchen anzunehmen. Eine formale Möglichkeit bestünde darin, unseren einfachen Faktor ε zu einer Matrix auszubauen, die gerade dazu dienen könnte, beliebig hohe einförmige Koinzidenzen auszuschliessen, falls es sich als notwendig erwiese, das Ausschlussprinzip explizite zur Geltung zu bringen. Angesichts der dabei zu erwartenden Komplikationen ziehe ich es aber vorderhand vor, die näheren Details der vorgeschlagenen Ansätze zu ermitteln.

Mathematisches Institut der Universität Bern.

Classement des Masses atomiques. II

par Adrien Jaquero*d*.

(16. XII. 41.)

Ce travail faisant suite à celui publié dans le précédent numéro des H.P.A.¹, les équations, tableaux et graphiques seront numérotés en suivant, de façon à éviter des renvois et des répétitions inutiles.

Nous allons admettre que, dans un atome quelconque, qui contient au moins, dans son noyau, $2n$ protons et $2n$ neutrons, il se forme n particules α (ou hélions), ayant une existence propre dans ce noyau, et liées entre elles ainsi qu'aux protons et neutrons en excès de façon à assurer la stabilité de l'ensemble. Nous admettrons de plus que chacune de ces particules α se forme avec le même dégagement d'énergie que le noyau d'Helium, soit pratiquement que l'atome d'Helium, que le défaut de masse correspondant soit par conséquent (voir tableau I ou tableau IV):

$$[\alpha] = 0,03030$$

En toute rigueur, il faudrait tenir compte encore de l'énergie de liaison des électrons satellites, mais cette énergie ne comporterait qu'un défaut de masse négligeable vis-à-vis de celui du noyau à la précision actuellement atteinte; nous en ferons complètement abstraction.

Un noyau contiendra donc n part. α , correspondant à un défaut de masse

$$n[\alpha], \text{ soit } 0,03030 n.$$

Formons la différence:

$$\Delta' M = \Delta M - n[\alpha] \tag{9}$$

Cette différence $\Delta' M$ donnera la mesure de l'énergie de liaison des part. α entre elles et avec les protons et neutrons que le noyau peut encore contenir en excès. La différence en question, multipliée par 10^3 , est reportée dans le tableau IV pour chacun des atomes déjà étudiés précédemment, et figurant dans le tableau I. On a en outre fait le même calcul pour quelques atomes dont la

¹) Helv. phys. acta. Vol. XIV, page 606 (1941).

Tableau IV.

Atome	<i>n</i>	Excès: prot.- neutr.	ΔM	$\Delta' M \times 10^3$	Atome	<i>n</i>	Excès: prot.- neutr.	ΔM	$\Delta' M \times 10^3$
H ¹	0	1-0	0	0	*Br ⁷⁹	17	1-10	0,727	212
H ²	0	1-1	0,00235	2,35	*Br ⁸¹	17	1-12	0,745	230
He ³	0	2-1	0,00818	8,18	Kr ⁷⁸	18	0-6	0,724	179
He ⁴	1	0-0	0,03030	0	Kr ⁸²	18	0-10	0,765	220
Li ⁶	1	1-1	0,03432	4,02	Kr ⁸⁴	18	0-12	0,784	239
Li ⁷	1	1-2	0,04203	11,73	Kr ⁸⁶	18	0-14	0,801	256
Be ⁸	2	0-0	0,06051	-0,09	*Rb ⁸⁵	18	1-12	0,780	235
Be ⁹	2	0-1	0,06231	1,71	*Rb ⁸⁷	18	1-14	0,800	255
B ¹⁰	2	1-1	0,06923	8,63	Mo ⁹⁵	21	0-11	0,871	235
B ¹¹	2	1-2	0,08145	20,85	Mo ⁹⁶	21	0-12	0,879	243
C ¹²	3	0-0	0,09860	7,70	Mo ⁹⁷	21	0-13	0,889	253
C ¹³	3	0-1	0,10387	12,97	Mo ⁹⁸	21	0-14	0,899	263
N ¹⁴	3	1-1	0,11204	21,14	Ru ⁹⁶	22	0-8	0,878	211
N ¹⁵	3	1-2	0,12357	32,67	Ru ⁹⁹	22	0-11	0,906	239
O ¹⁶	4	0-0	0,13664	15,44	Pd ¹⁰⁴	23	0-12	0,947	250
O ¹⁷	4	0-1	0,14109	19,89	Pd ¹⁰⁵	23	0-13	0,957	260
O ¹⁸	4	0-2	0,14962	28,42	Pd ¹⁰⁶	23	0-14	0,966	269
F ¹⁹	4	1-2	0,15813	36,93	Pd ¹⁰⁸	23	0-16	0,986	289
Ne ²⁰	5	0-0	0,17191	20,41	Pd ¹¹⁰	23	0-18	1,005	308
Ne ²¹	5	0-1	0,17973	28,23	Ag ¹⁰⁷	23	1-14	0,971	274
Ne ²²	5	0-2	0,19012	38,62	Ag ¹⁰⁹	23	1-16	0,990	293
Na ²³	5	1-2	0,20039	48,89	Sn ¹¹⁶	25	0-16	1,055	297
Mg ²⁴	6	0-0	0,21196	30,16	Sn ¹¹⁸	25	0-18	1,076	318
Mg ²⁵	6	0-1	0,21928	37,48	Sn ¹¹⁹	25	0-19	1,086	328
Mg ²⁶	6	0-2	0,23274	50,94	Sn ¹²²	25	0-22	1,107	349
Al ²⁷	6	1-2	0,2402	58,4	Sn ¹²⁴	25	0-24	1,126	368
Si ²⁸	7	0-0	0,2518	39,7	*Sb ¹²¹	25	1-20	1,100	342
Si ²⁹	7	0-1	0,2615	49,4	*Sb ¹²³	25	1-22	1,118	360
Si ³⁰	7	0-2	0,2730	60,9	X ¹²⁹	27	0-21	1,164	346
P ³¹	7	1-2	0,2807	68,6	X ¹³²	27	0-24	1,191	373
S ³²	8	0-0	0,2908	48,4	*Cs ¹³³	27	1-24	1,207	389
S ³⁴	8	0-2	0,3114	69,0	La ¹³⁹	28	1-26	1,242	394
Cl ³⁵	8	1-2	0,3205	78,1	*Pr ¹⁴¹	29	1-24	1,262	383
Cl ³⁷	8	1-4	0,3395	97,1	Nd ¹⁴⁶	30	0-26	1,297	388
A ³⁶	9	0-0	0,3301	57,4	Nd ¹⁴⁸	30	0-28	1,314	405
A ³⁸	9	0-2	0,3506	77,9	Nd ¹⁵⁰	30	0-30	1,326	417
A ⁴⁰	9	0-4	0,3677	95,0	Gd ¹⁵⁵	32	0-27	1,358	388
K ⁴¹	9	1-4	0,3783	105,6	Gd ¹⁵⁶	32	0-28	1,368	398
*Ca ⁴⁰	10	0-0	0,3705	67,5	Gd ¹⁵⁷	32	0-29	1,377	407
Sc ⁴⁵	10	1-4	0,4157	112,7	Os ¹⁹⁰	38	0-38	1,600	449
Ti ⁴⁸	11	0-4	0,446	113	Os ¹⁹²	38	0-40	1,618	467
Ti ⁴⁹	11	0-5	0,457	124	Ir ¹⁹¹	38	1-38	1,606	455
Ti ⁵⁰	11	0-6	0,466	133	Ir ¹⁹³	38	1-40	1,623	472
V ⁵¹	11	1-6	0,477	144	Pt ¹⁹⁴	39	0-38	1,632	450
C ⁵²	12	0-4	0,487	123	Pt ¹⁹⁵	39	0-39	1,641	459
*Mn ⁵⁵	12	1-6	0,513	149	Pt ¹⁹⁶	39	0-40	1,652	470
Fe ⁵⁴	13	0-2	0,502	108	Pt ¹⁹⁸	39	0-42	1,664	482
Fe ⁵⁶	13	0-4	0,523	129	Au ¹⁹⁷	39	1-40	1,659	477
*Co ⁵⁹	13	1-6	0,549	155	Tl ²⁰³	40	1-42	1,693	481
Ni ⁶⁰	14	0-4	0,555	131	Tl ²⁰⁵	40	1-44	1,711	499
Cu ⁶³	14	1-6	0,584	160	Pb ²⁰⁴	41	0-40	1,701	459
Cu ⁶⁵	14	1-8	0,603	179	Pb ²⁰⁸	41	0-44	1,737	495
Zn ⁶⁴	15	0-4	0,592	137	Bi ²⁰⁹	41	1-44	1,747	505
Zn ⁶⁶	15	0-6	0,614	159	Po ²¹⁰	42	0-42	1,752	479
Zn ⁶⁸	15	0-8	0,628	173	Rn ²²²	43	0-50	1,822	519
Zn ⁷⁰	15	0-10	0,648	193	Ra ²²⁶	44	0-50	1,840	507
Ga ⁶⁹	15	1-8	0,637	182	Th ²³²	45	0-52	1,875	511
Ga ⁷¹	15	1-10	0,657	202	U ²³⁸	46	0-54	1,910	516

masse a été calculée par les formules (7) et (8), et pour lesquels une vérification a été donnée; les atomes en question sont marqués d'un astérisque.

L'excès en protons et neutrons sera exprimé par deux nombres reliés par un trait-d'union, le premier relatif aux protons et le second aux neutrons, dont la somme donne l'excès total e sans spécification. Ainsi 1—2 représentera un excès de 1 proton et 2 neutrons sur le nombre n de part. α du noyau, l'excès total étant $e = 3$.

De cette façon, les atomes ${}^2\text{He}^4$, ${}^4\text{Be}^8$, ${}^6\text{C}^{12}$, ${}^8\text{O}^{16}$... seront caractérisés par les nombres $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ de part. α contenues dans le noyau, et par l'excès 0—0; leur noyau est formé exclusivement de part. α .

Les atomes ${}^3\text{Li}^7$, ${}^5\text{B}^{11}$, ${}^7\text{N}^{15}$, ${}^9\text{F}^{19}$, ... seront caractérisés par les nombres $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ comme ceux ci-dessus, mais en plus par l'excès 1—2, $e = 3$; ils contiennent en effet tous, en plus de n part. α , un proton et deux neutrons. Et ainsi de suite.

Un atome quelconque sera par conséquent caractérisé par 4 nombres entiers: Z et A , nombre atomique et nombre de masse, n , nombre de part. α du noyau, et e excès total en protons et neutrons, ce dernier restant le même quelle que soit la répartition des protons et neutrons dans l'excès, car, ainsi qu'on le verra par la suite, ces deux particules jouent à peu près le même rôle dans le défaut de masse; c'est-à-dire qu'un proton ou un neutron introduits dans un noyau déterminent la même variation du défaut de masse ΔM , ceci naturellement à la précision qui nous intéresse des déterminations de masses. Ainsi les atomes 0—1 ou 1—0 d'excès 1; 0—2 et 1—1, d'excès 2; 0—4 et 1—3, d'excès 4, etc., seront d'une même catégorie.

Le tableau IV donne, pour chaque atome, n , nombre de part. α , l'excès protons-neutrons, le défaut de masse ΔM , et enfin $\Delta'M$ calculé par la relation (9) multiplié par 10^3 .

Portons maintenant sur un graphique cette dernière valeur $\Delta'M$ en fonction du nombre de masse A . Nous obtenons le résultat saisissant reproduit par les figures 4, 5 et 6, qui se rapportent aux diverses régions de la série atomique.

Les trois régions précédemment définies se retrouvent avec une netteté encore plus impressionnante que sur la fig. 2, et les discontinuités qui limitent ces régions prennent un aspect encore plus significatif.

En gros, les atomes occupent les nœuds d'un réseau formé par deux familles de droites parallèles et équidistantes, dont les coefficients angulaires varient d'une région à l'autre. Chacune des

droites de faible coefficient angulaire est caractérisée par le même excès e ; chacune des droites de grand coefficient angulaire est caractérisée par le même nombre n .

Lorsqu'on passe des éléments légers aux éléments moyens, les deux coefficients angulaires diminuent brusquement (v. fig. 5); de même lorsque l'on passe des éléments moyens aux éléments lourds (v. fig. 6).

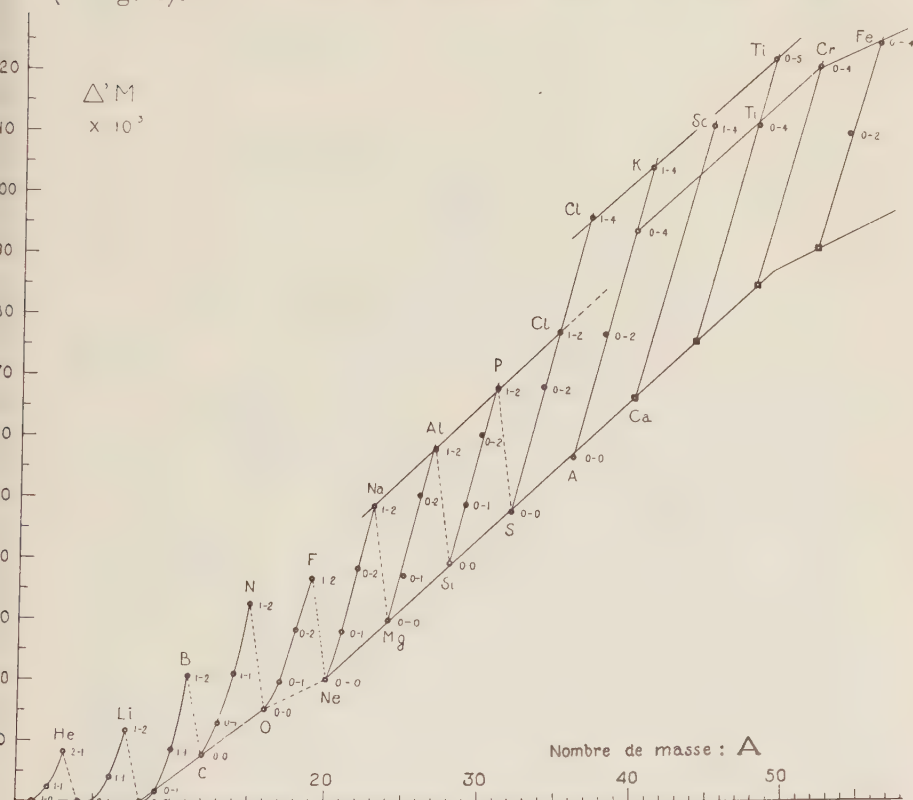


Fig. 4.

On peut relever sur les graphiques une foule de faits intéressants; nous allons en énumérer quelques-uns.

Commençons cette étude en considérant tout d'abord le groupe des éléments légers (fig. 4). Ce groupe contient les atomes qui sont de beaucoup les mieux connus du point de vue qui nous occupe; la précision y est donc maximum. C'est aussi celui où la complication est la plus grande comme on a déjà pu le constater par l'étude des graphiques 1, 2 et 3. Le réseau de droites n'est

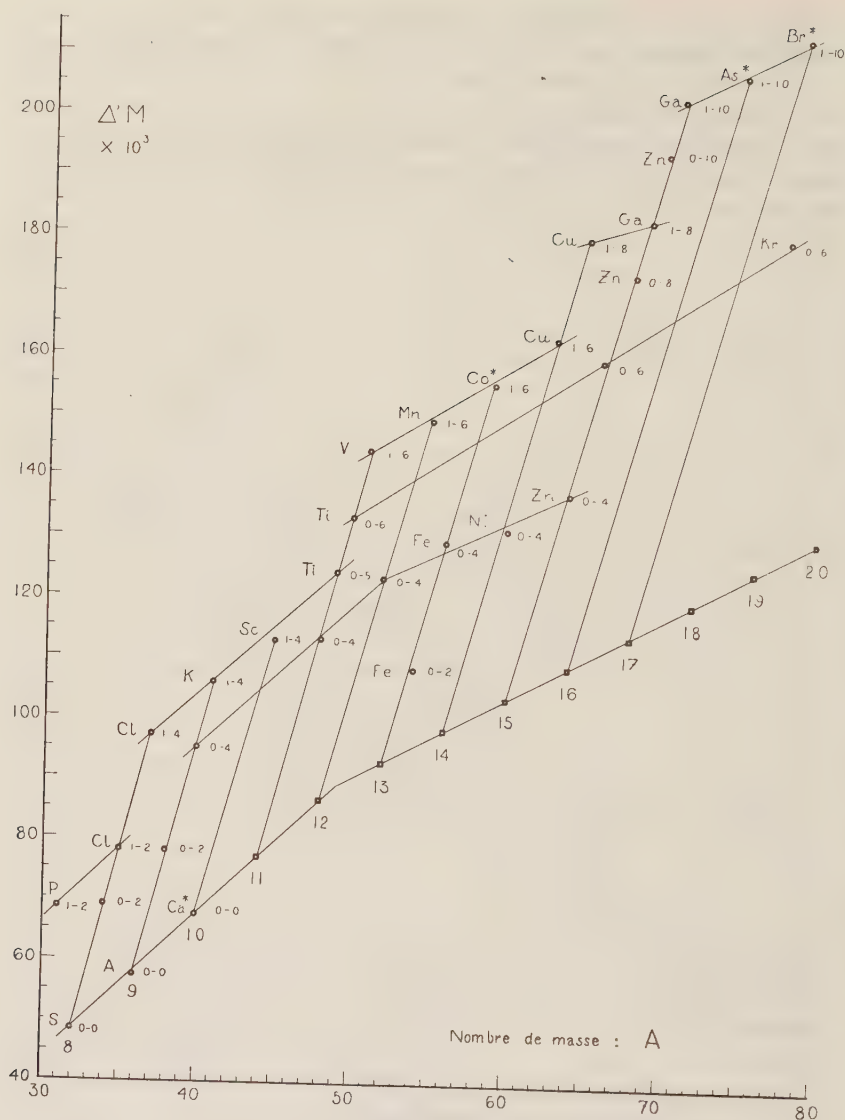


Fig. 5.

nettement réalisé qu'à partir de Mg environ, c'est-à-dire pour la partie supérieure de ce groupe. Mais alors l'alignement est superbe.

Au début de la série atomique, de H à Mg, le classement est plus compliqué. Les atomes de même n se placent non sur des droites, mais sur des courbes, très incurvées au début, puis de plus en plus redressées, et qui deviennent finalement pratiquement

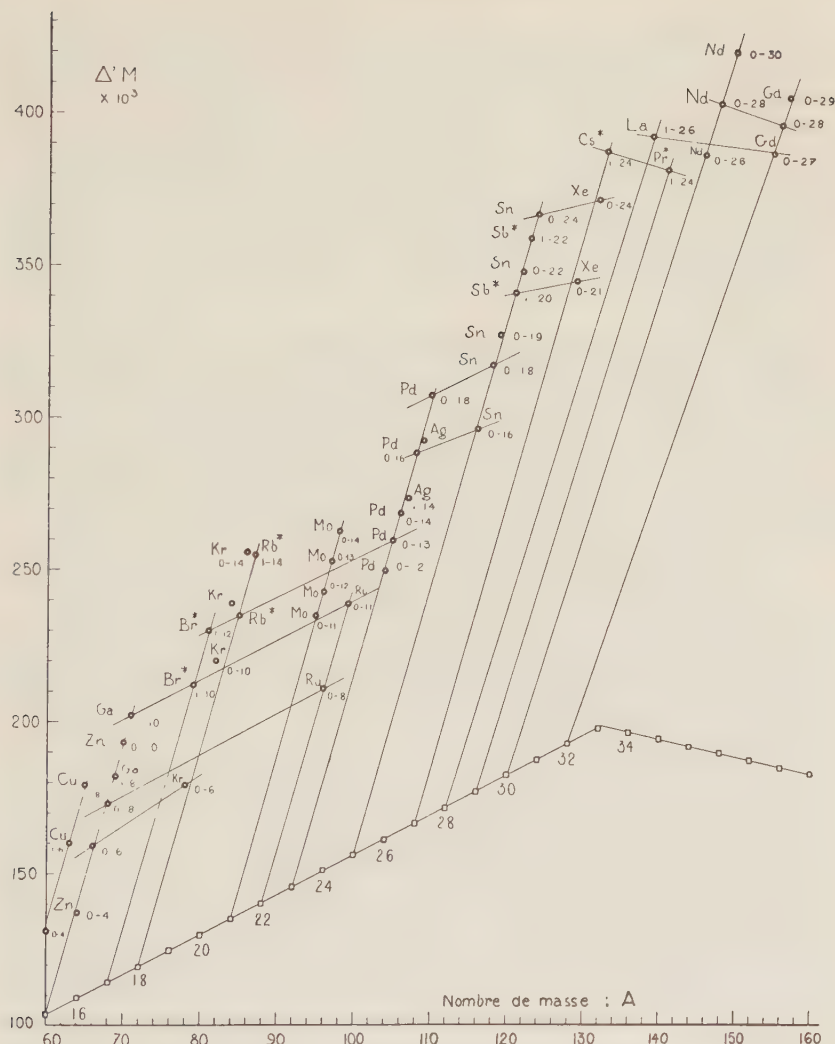


Fig. 6.

rectilignes, à partir de $n = 6$. Les courbes correspondent naturellement aux festons de la fig. 1, qu'elles reproduisent dans un autre arrangement.

A partir de $n = 8$ les écarts avec la droite pourraient bien, en partie tout au moins, provenir d'erreurs expérimentales. Ainsi l'introduction dans le noyau d'un proton ou d'un neutron supplémentaire correspond en gros au même accroissement du défaut de masse, donc de l'énergie de liaison.

Les droites de même *excès* sont aussi étonnamment réalisées, du moins pour les atomes d'excès 0—0 et 1—2, et dans la partie supérieure du graphique. Pour les excès $z = 1$ et $e = 2$, les points figuratifs se placent sur des lignes sinueuses qui n'ont pas été tracées afin de ne pas surcharger le dessin. Ces lignes offrent une certaine régularité qui pourra peut-être une fois être interprétée; elles se rectifient peu à peu à mesure que l'on s'élève dans l'échelle atomique, et tendent vers des droites. Les documents manquent malheureusement pour suivre leur évolution jusqu'à l'extrémité de la région ①.

Fait bien digne de remarque, jusqu'à $n = 7$ aucun atome naturel ne possède un excès dépassant 3; avec $n = 8$ apparaît $_{17}\text{Cl}^{37}$ d'excès 1—4, donc $e = 5$, et dorénavant les excès supérieurs à 3, et de plus en plus élevés, sont la règle, et cela jusqu'à la fin de la série atomique: les neutrons semblent jouer un rôle de plus en plus nécessaire dans la consolidation de l'édifice nucléaire, et former comme le ciment qui joint entre elles les part. α du noyau.

En même temps, les atomes du type 0—0, c'est-à-dire formés exclusivement de part. α , cessent d'avoir une existence réelle; le dernier est $_{20}\text{Ca}^{40}$ pour lequel $n = 10$. Les points calculés relatifs aux atomes fictifs de ce type continuent à figurer sur les graphiques 4, 5 et 6; pour les distinguer des atomes réels on les a représentés par un carré au lieu d'un cercle.

L'atome $_{4}\text{Be}^8$ occupe une situation spéciale: la valeur ΔM qui lui correspond est très voisine de zéro; elle est même négative d'après les données du tableau IV. Cela signifie que les deux part. α constituant son noyau sont à peine liées entre elles, et rend compte de l'instabilité de ce noyau, reconnue depuis longtemps. Son défaut de masse ΔM est cependant élevé, ainsi qu'on le constate par l'examen du tableau I et du graphique de la fig. 1; mais l'énergie correspondante est en totalité absorbée par la constitution des deux part. α , sans laisser aucun excès pour leur liaison mutuelle.

L'atome de nombre de masse $A = 5$ fait défaut, du moins comme atome naturel; c'est peut-être la seule exception dans toute la série atomique. Il existe à l'état instable, comme $_{2}\text{He}^5$ qui est radioactif artificiel; il pourrait aussi exister comme $_{3}\text{Li}^5$. Le premier de ces atomes a l'excès 0—1; le second l'excès 1—0. Or, l'examen du tableau IV ou de la fig. 4 fait voir qu'à la seule exception de $_{2}\text{He}^3$ (2—1) le nombre des protons en excès dans le noyau est toujours inférieur ou au plus égal au nombre des neutrons en excès. Il semble donc que $_{3}\text{Li}^5$ doive être encore plus instable

que ${}^5_2\text{He}$. La forte incurvation de la courbe $n = 1$ montre d'ailleurs que l'atome de masse 5 aura une très faible stabilité.

Le noyau de ${}^{16}_8\text{O}$ est formé de 4 part. α et l'on peut imaginer un schéma de structure tétraédrique particulièrement stable. La part. α suivante, la cinquième, est beaucoup moins solidement fixée au noyau, comme le montre la valeur relativement faible de $A'M$ pour ${}^{20}_{10}\text{Ne}$. Il se marque en ce point un accident dans l'alignement des atomes du type 0—0; cet accident se retrouve d'ailleurs, encore plus accusé, chez les atomes du type 1—2, dans le voisinage de ${}^{15}_7\text{N}$.

Le point relatif à Sc^{45} fait nettement figure d'anomalie: il est beaucoup plus bas que la droite 1—4 qui lui correspond; de plus, la droite $n = 10$ tracée par ce point n'est pas parallèle aux autres. Il semble bien qu'on puisse attribuer cette anomalie à une erreur portant sur la masse atomique.

Passons maintenant à la région ③, celle des éléments moyens. J'insiste tout d'abord encore une fois sur l'évidence de la discontinuité qui se produit vers $A = 52$ (voir fig. 5).

Les alignements sont moins parfaits dans cette région que dans la précédente: les masses atomiques sont moins bien connues. Cependant les écarts dépassent rarement 2 à 3 unités sur $A'M \times 10^3$, donc 2 à 3 unités de la troisième décimale des masses atomiques. Comme écarts notables nous retrouvons ceux signalés précédemment:

Kr — Ici l'erreur sur la masse atomique est évidente, bien plus encore que sur le graphique fig. 2; les quatre points relatifs à cet élément sortent complètement de l'alignement général (fig. 6).

Mo — Les points sont bien alignés sur la droite $n = 21$, mais le coefficient angulaire de cette droite est trop élevé.

Ag — Les deux points Ag^{107} , Ag^{109} , sont nettement en dessous de la droite $n = 23$, passant par les points relatifs à Pd, qui elle présente la bonne inclinaison.

Xe — Les deux points sont très en dehors de la droite passant par le point calculé Cs^{133} .

La région (3), éléments lourds, ne nous retiendra pas longtemps. La discontinuité (voir fig. 6) qui sépare cette région de la précédente est un peu plus floue que la première discontinuité. On remarque cependant que les droites de même excès sont maintenant toutes *descendantes* à partir de $A = 132$ environ. Le phénomène serait encore plus net si le point relatif à La^{139} ne se trouvait pas passablement trop bas: nous retrouvons ici une erreur sur la masse atomique mise déjà en évidences par le graphique fig. 2.

La partie supérieure de cette région n'a pas été figurée. Les

points y sont trop rares, leur position trop imprécise pour qu'il en vaille la peine. Les droites de même e , mal guidées, ont des inclinaisons très variables; elles sont cependant toutes descendantes, indiquant une stabilité décroissante de l'édifice nucléaire.

Il est temps maintenant de procéder à la comparaison des deux modes de représentation que nous avons envisagés, et qui sont utilisés pour la construction des graphiques 1, 2 et 3 d'une part, des graphiques 4, 5 et 6 d'autre part.

Ces deux représentations ne sont naturellement pas indépendantes l'une de l'autre; bien au contraire, et comme il est facile de s'en rendre compte, elles sont la constatation d'un seul et même fait fondamental: *le défaut de masse* (exception faite pour les atomes les plus légers) *est une fonction linéaire du nombre de masse A* . Ces deux modes de représentation se contrôlent l'un l'autre en présentant les mêmes choses sous un angle différent. Ils révèlent la même harmonie dans la distribution des masses atomiques et font apparaître les mêmes défauts, en mettant en évidence les mêmes erreurs expérimentales.

D'après les conclusions de la première partie de ce travail, on peut mettre ΔM sous la forme

$$\Delta M = pA + q \quad (10)$$

p et q étant des constantes qui prennent des valeurs différentes dans les trois régions du système atomique. Ces valeurs sont:

	p	q
atomes légers	0,009955	— 0,0272
atomes moyens	0,008890	0,0244
atomes lourds	0,007006	0,2740

(il est bien entendu que les atomes les plus légers font exception.)

Combinant (10) avec (9):

$$\Delta'M = pA + q - n[\alpha] \quad (11)$$

D'une façon générale, un nombre de masse A quelconque pourra toujours, d'après ce qui précède, se mettre sous la forme:

$$A = 4n + e; \quad n = \frac{A}{4} - \frac{e}{4} \quad (12)$$

substituant dans (11) il vient:

$$\Delta'M = (4p - \alpha)n + pe + q \quad (13)$$

expression qui représente le réseau de droites relatives au second mode de classement.

Pour n constant, on obtient les droites reliant les atomes qui contiennent dans leur noyau le même nombre de part. α ; le coefficient angulaire de ces droites est p . L'introduction d'un proton ou d'un neutron supplémentaire augmente chaque fois ΔM de p .

Pour avoir les droites de même *excès* sous la forme qu'elles ont dans les graphiques, introduisons A dans l'expression (13) en remplaçant n par sa valeur (12). Il vient

$$\Delta M = \left(p - \frac{[\alpha]}{4} \right) A + \frac{[\alpha]}{4} e + q \quad (14)$$

Pour e constant, cette dernière relation représente des droites de coefficient angulaire $(p - \frac{[\alpha]}{4})$ ce qui donne les valeurs numériques:

atomes légers	$p - \frac{[\alpha]}{4} =$	0,002375
atomes moyens		0,001315
atomes lourds		— 0,000571

Ces derniers coefficients, multipliés par 4, donnent l'énergie de liaison de chaque part. α supplémentaire dans le noyau. Cette énergie diminue brusquement lorsque l'on passe de la région ① à la région ②, ce qui donne lieu à la première discontinuité (voir fig. 5.) Elle diminue de nouveau (voir fig. 6) en passant à la région ③ et devient négative, ce qui montre que la stabilité du noyau devient de plus en plus faible à mesure que l'on s'élève dans la série atomique. L'apparition des éléments radioactifs naturels manifeste cette stabilité décroissante.

Ainsi qu'on l'a déjà indiqué, il est possible qu'une troisième discontinuité existe dans le voisinage de Po^{210} , soit à l'entrée de la région des atomes radioactifs. Contrairement à ce que je disais dans l'article précédent, cette discontinuité est rendue plausible par les considérations suivantes:

Admettons-la réelle, et précisons la position des trois discontinuités; on trouve:

	A	Diffé- rences	Z	Diffé- rences	n	Diffé- rences
1ère discontinuité	52	79	24	30	12	15
2ème »	131	79	54	30	27	15
3ème »	210		84		42	

Ces *discontinuités* seraient *équidistantes*; on pourrait y voir l'indication de l'existence, dans le noyau, de « couches » analogues à celles qui se manifestent dans les électrons satellites.

Dans un troisième article on montrera la réalité de cette troisième discontinuité, en précisant la position des atomes radioactifs naturels dans le classement général. Un dernier article, enfin, traitera des atomes *radioactifs artificiels*.

Résumé. Si l'on calcule le *défaut de masse total* des atomes naturels rapporté à leur constitution (protons, neutrons, électrons) ce défaut de masse est une fonction du *nombre de masse* qui permet de classer les atomes en 3 groupes naturels: atomes légers, atomes moyens, atomes lourds. Des discontinuités très nettes séparent les trois régions.

Dans la première région, l'existence autonome des part. α (hélium) qui figurent dans le noyau se manifeste par une allure caractéristique des graphiques.

Chez les éléments moyens et lourds le défaut de masse est une fonction linéaire du nombre de masse. Des formules sont données qui permettent de calculer avec précision la masse d'un atome quelconque dont on connaît le nombre atomique et le nombre de masse.

Divers graphiques font ressortir avec évidence le rôle joué par la part. α dans la constitution du noyau.

Je remercie vivement M. CLAUDE ATTINGER qui a dessiné avec grand soin les graphiques figurant dans ce travail.

Neuchâtel. Institut de Physique de l'Université.

Modellbetrachtungen über die Abweichung der photometrischen Eigenschaften eines Empfängers von der linear-eindeutigen Struktur

von H. König (Bern).

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht)

(30. XI. 1941.)

Zusammenfassung: Aus didaktischen, grundsätzlichen und praktischen Gründen wird die Frage der Abweichungen der Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges von der linear-eindeutigen Struktur axiomatisch und modellmässig besprochen. Die vollständige Beschreibung dessen, was der Photometriker tut und empfindet, geht über den Rahmen der gewöhnlichen kommutativen Algebra hinaus.

Ein gewisser Zusammenhang zwischen den sog. Abweichungen von der Eindeutigkeit und denjenigen von der Linearität, der sich für das wirkliche Auge zwar nicht beweisen, aber doch plausibel machen lässt, gestattet, die Kontrolle der Beobachter auf ihre Eignung zum Photometrieren praktisch zu vereinfachen, indem z. B. die Eindeutigkeitsprüfungen weggelassen werden können.

§ 1. Problemstellung.

Was die Hellempfindlichkeit als Begriff und Gegenstand der Forschung unseres Erachtens so interessant macht, ist die Tatsache, dass er nahe an der Grenze dessen liegt, was man noch mit einigem Erfolg in den harten Panzer der Kategorie „Grösse“ im physikalischen Sinne des Wortes hineinpressen kann.

Zu den nachstehenden Modellbetrachtungen sind wir aus drei äusserlich verschiedenen, aber doch derselben Wurzel, der Komplexität der Struktur des Helligkeitsbegriffes entspringenden Gründen gelangt.

1. *Didaktisches.* Der Studierende pflegt anzunehmen, die gewöhnliche Algebra sei, abgesehen von der Mathematik, nur in gewissen Zweigen der theoretischen Physik als Ausdrucksmittel zu arm, um die Mannigfaltigkeiten und Beziehungen zu beschreiben; sonst gelte sie „selbstverständlich“. Er weiss, dass die Quantenmechanik eine *nicht-kommutative* Multiplikation braucht. Er weiss, dass die Frage der Existenz eines Elektrons bestimmter Ladung kaum anders als mit *nicht-linearen* Feldgleichungen angepackt werden kann und dass Gleichrichtereffekte in Elektronenröhren nur aus der *Nicht-Linearität* der Charakteristik dieser Röhren verstanden werden kann. Er weiss auch, dass das magne-

tische Potential im stationären Leiterfeld eine *vieldeutige* Funktion des Ortes ist. Aber er ist nicht gewohnt, aus

$$a = b, \quad b = c: a \nmid c \quad (1)$$

zu folgern, und noch befremdender muss ihm die Behauptung: aus

$$a = b \quad \text{folgt} \quad b \nmid a \quad (2)$$

erscheinen.

Das Gebiet der heterochromen Photometrie ist nun erfreulicherweise das reinste Übungsfeld für solche Erörterungen, indem Fälle wie (1) und (2) dort die normalen sind, sofern man nicht ihren Charakter durch eine Reihe vorgängiger Abstraktionen oder Massnahmen entstellt. Die Kritik des Vorgehens des Photometrikers bei seiner Arbeit und die Axiomatik des aus den Experimenten aufgebauten Begriffs der Hellempfindung sind, wie wir sehen werden, miteinander geradezu gleichwertig.

Es kann nichts schaden, zu versuchen, die Experimente, die der Photometriker ausführt, *so mathematisch zu beschreiben und zu analysieren, wie er sie wirklich ausführt.*

Dabei werden wir uns nicht durch Fragen aufhalten lassen, wie z. B. ob das „Umlegen“ des Photometerkopfes („Kommutieren“) zwecks Ausschalten der Unsymmetrie des Photometers als eine äusserliche, methodische, rein geometrische, nicht spezifisch heterochrome Angelegenheit aufzufassen sei und ob man darin nur einen Mangel der Apparatur zu erblicken habe. Ist die Tatsache, dass man in gewissen Fällen zwei Messungen hintereinander in verschiedenem Ermüdungszustand des Auges ausführen muss, ein „Nachteil“ oder eine „Eigenschaft“ des Verfahrens? Oder des Auges? Ist die nach dem Flimmerverfahren bestimmte Hellempfindlichkeit $V(\lambda)$ eine Eigenschaft des Flimmerverfahrens oder des Auges? Welches ist die Grenze zwischen den wesentlichen und den unwesentlichen Besonderheiten der photometrischen Methode?

Solche Fragen, die voller unbewusster Annahmen stecken, und eben deshalb nicht so leicht zu beantworten sind, lassen wir hier in den Hintergrund treten.

Wir werden beschreiben, was wir messen; dies wird uns zu den Rechenregeln führen. Um auch dort, wo uns das Experiment auf Ungleichungen wie (1) führt, wirklich rechnen zu können, werden wir mit Modellen arbeiten, die mit der Wirklichkeit nur so viel gemeinsam haben, als dass sie einen ihrer charakteristischen Züge wiedergeben.

2. *Grundsätzliche Erwägungen.* Die praktische Lichttechnik verlangt, den Bedürfnissen der Industrie entsprechend, eine ein-

fache Berechnung der Leuchtdichte. Daher hat die Internationale Beleuchtungskommission eine Bewertung jeglicher photometrischer Grösse auf Grund des Ausdrucks

$$\text{Eichkonstante} \cdot \int S(\lambda) V(\lambda, \text{int}) d\lambda \quad (3)$$

beschlossen. Dieser Beschluss enthält in der Hauptsache 2 *strukturelle Axiome*: 1. Die Forderung, dass aus jeder Strahlung $S(\lambda)$ sich *eindeutig* ein „Licht“wert ausrechnen lasse; 2. die Forderung, dass die einzelnen physikalischen Komponenten des Lichtes *unabhängig* voneinander zum Lichteindruck beitragen, also *linear* in die Formel eingehen, und ferner *eine Definition*, nämlich die zahlenmässige Festlegung der internationalen Hellempfindlichkeitsfunktion $V(\lambda, \text{int})$.

Es ist hinlänglich bekannt, dass das wirkliche Auge dieser einfachen Struktur auch für diejenigen Verfahren, bei denen der Farbunterschied zwischen den zu vergleichenden Lichtern auf irgendeine Art beseitigt wird, im besonderen beim Flimmerverfahren, selbst innerhalb ein und demselben Verfahren nur in erster Näherung erfüllt ist und dass die Forderung der $V(\lambda, \text{int})$ -getreuen Messung, m. a. W. die Schaffung eines Standardauges gemäss (3) nie mehr als ein vernünftiger Kompromiss zwischen den Eigenschaften des wirklichen Auges und den Erfordernissen der Industrie sein kann.

Ohne im einzelnen die Stellen zu bezeichnen, sei hier bemerkt, dass in der Literatur bei Erörterungen über den oben erwähnten Kompromiss bald die Forderung der Kohärenz [= Darstellbarkeit durch eine Form wie (3), aber evtl. mit anderem $V(\lambda)$], bald die Forderung der Linearität, bald diejenige der Eindeutigkeit allein genannt oder wenigstens in den Vordergrund gerückt oder, wie wir sehen werden, teilweise zu Unrecht als *die* strukturbestimmte Forderung hingestellt wird.

Es ist bekannt, dass man Beispiele von „nichtkohärenten“, aber logisch widerspruchsfreien Strukturen angeben kann^{1) 2)} — und wir werden den bekannten weitere hinzufügen —, aber es ist nicht klargestellt worden, ob und in welcher theoretischen Beziehung die Eindeutigkeits- und die Linearitätsforderung zueinander stehen.

Da es eine Theorie der Abweichungen von (3) nicht gibt, bleibt wohl kaum ein anderer Weg, als möglichst viele, strukturell möglichst verschiedene, alle theoretischen Möglichkeiten umfassende Modelle anzugeben und durchzurechnen.

3. *Praktische Bedeutung.* Mit der Feststellung, dass Eindeutigkeit und Linearität zwei unabhängige Axiome darstellen, kann

man sich nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch nicht zufrieden geben. Die Kontrollversuche zur Bestimmung des Grades der Nicht-Kohärenz sind nicht immer einfach, und da trotz der teilweisen logischen Unabhängigkeit eine gewisse Gleichwertigkeit verschiedener Versuchsgruppen theoretisch (diese Arbeit) und experimentell (Dissertation LÜTHY³⁾) plausibel gemacht werden kann, so lässt sich die experimentelle Aufgabe der „Kohärenz-Prüfung“ eines Beobachters stark vereinfachen.

Über den Modellbegriff. Bevor wir mit der Aufzählung der Axiome und der Angabe von Modellen beginnen, möchten wir zum richtigen Verständnis des Folgenden eindringlich darauf hinweisen, dass ein Modell nur Realisierung eines Axiomsystems, also mehr Beispiel als Theorie ist. Mit dem Begriff „Theorie“ verbindet man gewöhnlich den Eindruck einer gewissen Verbindlichkeit, einer Verpflichtung zum „Richtig-Sein“. Das Modell *kann* selber eine Theorie sein, will aber nur einen oder mehrere charakteristische Züge, losgelöst von andern, als existenzmöglich nachweisen. Unsere Modelle werden mit den Eigenschaften des menschlichen Auges ebensowenig und ebensoviel zu tun haben, wie die nichteuklidische Geometrie auf der Kugel mit unserem physikalischen Raum, d. h. einerseits nichts, und doch wieder sehr viel. Über die tiefere Bedeutung des Modellbegriffs für die Erkenntnistheorie orientiert das Werk von GONSETH⁶⁾.

§ 2. Beschreibung einiger Experimente.

Zunächst einige Definitionen. S , abgekürzt für $S(\lambda)$, bedeutet die z. B. auf die Fläche eines Gipsprismas auffallende Energie, $\{S\}$ bedeutet die von S erzeugte, von uns als Leuchtdichte wahrgenommene, zahlenmässig vorläufig nicht erfassbare Empfindung. An Stelle des Auges kann eine Photozelle mit Instrument, letzteres zunächst ohne Skala, treten.

Der Übergang von S zu $\{S\}$ umfasst alle Besonderheiten des Empfängers (Photometer einschliesslich Auge, Photozelle einschliesslich Verstärker und Instrument usw.). Während im Falle der Photozelle eine Ausschlagsmethode in Frage kommen könnte, kann das Auge wegen des Fehlens einer Skala (Metrik) nur als Nullinstrument wirken. Im ersteren Fall *kann*, im letzteren Fall *muss* sich unsere Tätigkeit in der Form von Gleichungen ausdrücken. Die vom Arbeiten an der Photometerbank herrührende Gewohnheit, das eine Licht als das linke, das andere als das rechte zu bezeichnen, wollen wir auch im Falle des objektiven Empfängers beibehalten.

Die *Operation* oder, wie wir sie nennen wollen, die *Gleichung*

$$\{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}$$

besagt z. B. im Falle der Flimmerphotometrie, dass Flimmerfreiheit bestehe, wenn links $S_1(\lambda)$, rechts $S_2(\lambda)$ auf das Gipsprisma auffalle. Für den Direktvergleich entspricht die Gleichung der grössten Ähnlichkeit der Eindrücke $\{ S_1 \}$ und $\{ S_2 \}$.

Der Übergang von einer Gleichung $\dots \rightarrow \{ S \}$ zu einer Gleichung $\{ S \} \rightarrow \dots$ ist der Ausdruck dafür, dass man dieselbe Strahlung erst rechts, dann links habe wirken lassen.

Wir definieren:

Symmetrisches Photometer: $\{ S \} \rightarrow \{ S \}$ für alle S ;

Unsymmetrisches Photometer: $\{ S \} \not\rightarrow \{ S \}$, d. h. gleiche Strahlungen erzeugen nicht gleiche Eindrücke. Man kann diesen Fall auch so beschreiben:

$$\begin{aligned} \{ S_1 \} &\rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_2 \} &\rightarrow \{ k S_1 \}, \quad k \neq 1. \end{aligned}$$

Um der Unsymmetrie von Anfang an experimentell aus dem Wege zu gehen, kann man den Begriff „gleich“ durch die einseitige Ersetzbarkeit definieren:

$$\begin{aligned} \{ S_1 \} &\rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} &\rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_1 \} &\rightarrow \{ S_2 \} \end{aligned} \tag{4}$$

In Worten: S_2 ist gleichwertig S_1 , wenn zuerst S_1 , dann S_2 der Strahlung S_3 experimentell gleich gemacht werden. Das Zeichen \rightarrow entspricht also keiner direkten experimentellen Operation.

Entsprechend der oben besprochenen räumlichen Unsymmetrie sollte der Vollständigkeit halber eine zeitliche Unsymmetrie betrachtet werden, in dem Sinn, dass die Vertauschung der Reihenfolge zweier Messungen einen Einfluss auf das Resultat hat, dass also für dieselben S_1, S_2, S_3 wie oben wegen Nachwirkungserscheinungen gilt:

$$\begin{aligned} \{ S_2 \} &\rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ k S_1 \} &\rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} &\rightarrow \{ k S_1 \}, \quad k \neq 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Um in der algebraischen Berücksichtigung der experimentellen Möglichkeiten nicht weiter zu gehen, als unbedingt nötig ist, um das Wesentliche erkennen zu lassen, lassen wir den Einfluss der Reihenfolge der Messungen, also der Vorgeschichte, beiseite. In praxi macht man dies so: Man vergleicht abwechselungsweise

S_1 , dann S_2 , dann S_1 , dann S_2 usw. mit S_3 , bis die Werte stabil werden (zeitliches „Kommutieren“). Hingegen ist ein entsprechendes räumliches Kommutieren durch Vertauschen von links und rechts nicht bei jedem Photometer möglich, weshalb wir die räumliche Unsymmetrie formelmässig ausdrückten.

Es gibt noch eine weitere Unsymmetrie, die wir in der Folge nicht berücksichtigen, aber der Vollständigkeit halber nennen wollen: $\{S_1 + S_2\} \rightarrow \dots$ braucht nicht dasselbe zu bedeuten wie $\{S_2 + S_1\} \rightarrow \dots$, indem wir der Vertauschung der Reihenfolge der Summanden die Vertauschung der Lichtquellen auf derselben Seite zuordnen. Ungleichwertigkeit tritt ein, wenn z. B. beide Strahlungen S_1 und S_2 unter verschiedenen Winkeln auf den Photometerschirm fallen.

Auch der Fall des falschen Lichtes, welches eine von 0 verschiedene Strahlung S_1 zum Ausgleich benötigt und zu einer Gleichung von der Form $\{S_1\} \rightarrow 0$, ($S_1 \neq 0$) führt, soll später nicht vorkommen.

Diese Überlegungen können, beiläufig bemerkt, dem Nichtmathematiker modellmässig einigermaßen verständlich machen, dass man zur Fundierung der gewöhnlichen Algebra der reellen Zahlen 18 Axiome aussprechen muss, bevor man rechnen kann!

Es muss noch bemerkt werden, dass Ausdrücke wie $n\{S\}$ oder $\{S_1\} + \{S_2\}$ experimentell *nichts* bedeuten, da sie keiner wirklich durchführbaren Massnahme entsprechen. Rechnerisch werden sie erst später einen Sinn erhalten. $\{S\}$ hat vorläufig nicht den Charakter einer gewöhnlichen Rechengrösse.

Die beiden Strahlungen S_1 und S_2 in $\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}$ können im Farbdreieck als zwei verschiedene Punkte dargestellt werden, im Gegensatz zum Fall der Kolorimetrie, wo zwei „gleiche“ Strahlungen durch gleiche Intensität und gleichen Farbort charakterisiert werden.

Zusammenstellung der wichtigsten Versuche.

1. *Grundversuche bzw. Definitionen.* Die „Gleichheit“ kann auf zwei verschiedene Arten definiert werden:

1.1: Grundversuch bestehend aus 1 Abgleichung:

$$\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}$$

In Worten: Eindruck von S_1 links gleich Eindruck von S_2 rechts.

1.2: Grundversuch bestehend aus 2 Abgleichungen:

$$\begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \end{array}$$

In Worten: Eindruck von S_1 ist ersetzbar durch Eindruck von S_2 .

2. *Kontrollversuche bzw. Feststellungen.* Das Ergebnis dieser Versuche kann durch eine Zahl k (im allgemeinen $\neq 1$) ausgedrückt werden; der Buchstabe k bedeutet in jedem Versuch etwas anderes.

2.1: Kontrollversuch bestehend aus 1 Abgleichung:

$$2.1.1: \quad \{ S_1 \} \rightarrow \{ k S_1 \}, \quad k \neq 1$$

2.2: Kontrollversuche bestehend aus 2 Abgleichungen:

$$2.2.1: \quad \begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ k S_1 \}, \quad k \neq 1 \end{array}$$

$$2.2.2: \quad \begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_1 \} \rightarrow \{ k S_2 \}, \quad k \neq 1 \end{array}$$

Diese Möglichkeit der Veränderung der Abgleichung bei Wiederholung wollen wir, wie bereits oben bemerkt wurde, weglassen, also in diesem Fall stets $k = 1$ annehmen.

$$2.2.3: \quad \begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ n S_1 \} \rightarrow \{ k n S_2 \}, \quad k \neq 1, n \text{ eine positive Zahl.} \end{array}$$

$$2.2.4 \text{ (siehe Fig. 1): } \quad \begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_3 \} \rightarrow \{ k S_3 \}, \quad k \neq 1 \\ \{ S_1 + S_3 \} \rightarrow \{ k' (S_2 + k S_3) \}, \quad k' \neq 1 \end{array}$$

2.3: Kontrollversuche bestehend aus 3 Abgleichungen:

$$2.3.1 \text{ (siehe Fig. 1): } \quad \begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_3 \} \rightarrow \{ k S_1 \}, \quad k \neq 1 \end{array}$$

$$2.3.2 \text{ (siehe Fig. 1): } \quad \begin{array}{l} \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_2 \} \rightarrow \{ S_3 \} \\ \{ S_1 \} \rightarrow \{ k S_2 \}, \quad k \neq 1 \end{array}$$

Dieser Fall, bei welchem S_2 *experimentell* auf beiden Seiten auftritt, ist vom Grundversuch 1.2 wohl zu unterscheiden.

$$2.3.3 \text{ (siehe Fig. 1): } \begin{cases} \{S_1\} \rightarrow \{S_2\} \\ \{S_3\} \rightarrow \{S_4\} \end{cases}$$

$$\{S_1 + S_3\} \rightarrow \{k(S_2 + S_4)\}, \quad k \neq 1$$

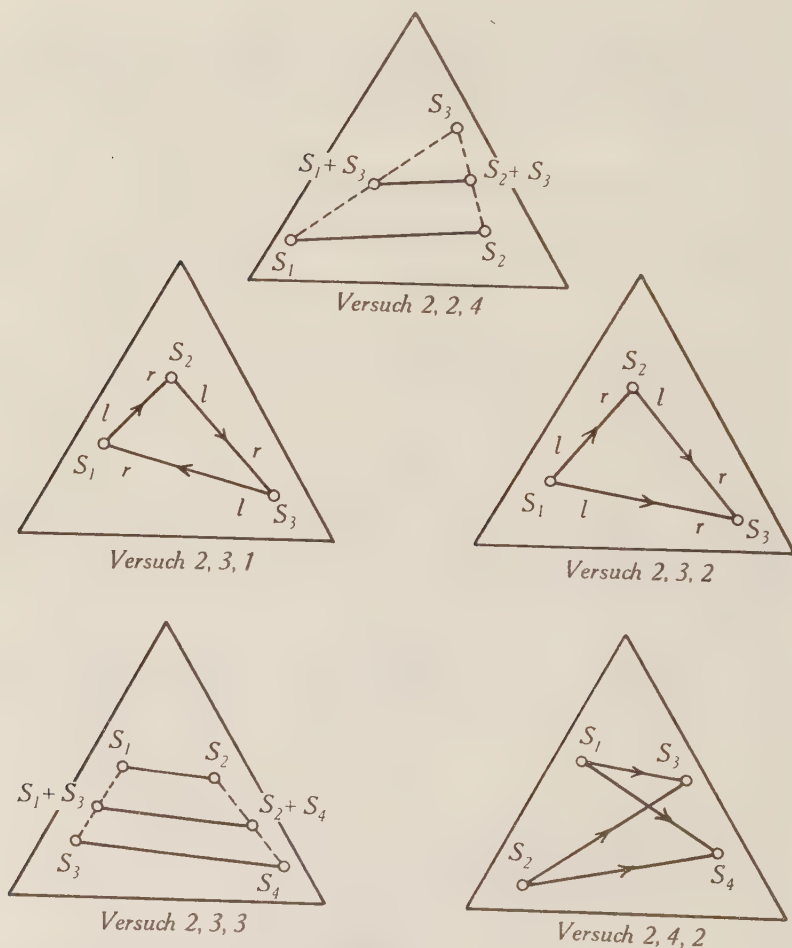


Fig. 1.

Schematische Darstellung einiger photometrischer Kontrollversuche in der Farbenmannigfaltigkeit. Die ausgezogenen Verbindungslinien entsprechen den „Gleichungen“. Die Nummern der Versuche decken sich mit denjenigen in der Zusammenstellung in § 2.

2.4: Kontrollversuche bestehend aus 4 Abgleichungen:

$$2.4.1: \frac{\begin{cases} \{S_1\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_3\} \rightarrow \{S_2\} \\ \{S_1\} \rightarrow \{S_4\} \end{cases}}{\{S_4\} \rightarrow \{kS_2\}}, \quad k \neq 1$$

$$2.4.2 \text{ (siehe Fig. 1): } \frac{\begin{cases} \{S_1\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_2\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_1\} \rightarrow \{S_4\} \end{cases}}{\{S_2\} \rightarrow \{kS_4\}}, \quad k \neq 1$$

Wenn restlose Symmetrie, Eindeutigkeit, Linearität, und was wir evtl. noch an guten Eigenschaften verlangen können, gewährleistet wären, so wären alle oben eingeführten $k = 1$. Uns werden die Zusammenhänge zwischen den k , wenn sie nicht gleich 1 sind, interessieren, also die Frage, inwiefern die aufgezählten Versuche dieselben oder verwandte Aussagen über den Empfänger abgeben.

§ 3. Übersicht über die Axiome.

Vorstehend beschrieben wir, was man experimentell *definieren* und *machen* kann; hier folgt die Zusammenstellung dessen, was man *fordern* kann.

Axiom $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$: $\{S\} \rightarrow \{S\}$ für alle Strahlungen S .

Dieses „schwächere“ Symmetrieaxiom fordert, dass zwei energiegleiche, also gleich zusammengesetzte Strahlungen ohne Änderung in der Abgleichung zwischen links und rechts vertauschbar seien.

$$\text{Axiom } \mathfrak{S}: \frac{\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}}{\{S_2\} \rightarrow \{S_1\}}$$

Dieses „starke“ Symmetrieaxiom, welches die Gültigkeit der zweitgenannten Gleichung fordert, wenn die erstgenannte erfüllt ist, bezieht sich auf die Vertauschbarkeit *nicht* gleich zusammengesetzter Paare von Strahlungen.

$$\text{Axiom } \mathfrak{C}_4: \frac{\{S_1\} \rightarrow \{S_3\}}{\{S_2\} \rightarrow \{S_3\}}$$

gelte für alle S_3 , für welche *eine* der beiden Gleichungen gilt.

$$\text{Wenn z. B.} \quad \{S_1\} \rightarrow \{S_4\}$$

ist, so verlangt Axiom \mathfrak{C}_4 , dass auch

$$\{S_2\} \rightarrow \{S_4\}$$

sei. \mathfrak{E}_4 ist eine „schwache“ Eindeutigkeitsforderung, die nur verlangt, dass zwei im Sinne des Grundversuches 1.2 äquivalente Strahlungen dies unabhängig von der Wahl des Vergleichslichtes seien.

$$\text{Axiom } \mathfrak{E}_3: \quad \frac{\begin{array}{l} \{S_1\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_2\} \rightarrow \{S_3\} \end{array}}{\text{bedingt } \{S_1\} \rightarrow \{S_2\}}$$

\mathfrak{E}_3 ist eine „starke“ Eindeutigkeitsforderung. Man beachte, dass S_2 einmal links und einmal rechts vorkommt.

$$\text{Axiom } \mathfrak{L}: \quad \frac{\begin{array}{l} \{S_1\} \rightarrow \{S_2\} \\ \{S_3\} \rightarrow \{S_4\} \end{array}}{\text{bedingt } \{S_1 + S_3\} \rightarrow \{S_2 + S_4\}}.$$

Das Axiom über die Existenz der Subtraktion, insbesondere die Forderung, dass gewöhnlich algebraisch ausgedrückt zu $a + x = b$ stets nur *eine* Lösung x existiere, betrachten wir als in unserem Linearitätsaxiom \mathfrak{L} inbegriffen.

Die Modellbetrachtungen des § 6 werden sich aus didaktischen Gründen nur auf Fälle beziehen, bei denen eines oder mehrere der Axiome $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$, \mathfrak{S} , \mathfrak{E}_4 , \mathfrak{E}_3 , \mathfrak{L} *nicht* erfüllt zu sein brauchen.

Die Eindeutigkeitsaxiome \mathfrak{E}_3 und \mathfrak{E}_4 sind nicht die einzigen Möglichkeiten zur axiomatischen Einführung des Gedankens der Unabhängigkeit vom Weg in der Farbmannigfaltigkeit. Man kann auch definieren:

$$\text{Axiom } \mathfrak{E}_3': \quad \frac{\begin{array}{l} \{S_1\} \rightarrow \{S_2\} \\ \{S_2\} \rightarrow \{S_3\} \end{array}}{\text{bedingt } \{S_3\} \rightarrow \{S_1\}}, \text{ und}$$

$$\text{Axiom } \mathfrak{E}_4': \quad \begin{array}{l} \{S_1\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_3\} \rightarrow \{S_2\} \end{array}$$

gültig für alle S_3 , für welche eine der beiden Gleichungen gilt.

Im § 5 wird bewiesen, dass Axiom \mathfrak{E}_3 zusammen mit Axiom \mathfrak{R} (s. unten) die Axiome \mathfrak{S} und $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ bedingt. Für \mathfrak{E}_3' führt, wie wir ohne Beweis angeben wollen, die entsprechende Beweisführung nicht zum Ziel. Hingegen kann man unter der Annahme, dass $\{kS\}$ eine monotone Funktion von k sei, dass also mit zunehmender Strahlung der Eindruck stets zunehme, ebenfalls zeigen, dass \mathfrak{S} und $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ praktisch als direkte Folge von \mathfrak{E}_3' anzusehen seien. \mathfrak{E}_4' ist, wie man aus den Definitionen direkt ablesen kann, in \mathfrak{E}_3' enthalten. Setzt man \mathfrak{S} voraus, so werden \mathfrak{E}_3 und \mathfrak{E}_3' gleichwertig.

Die Möglichkeit, die Eindeutigkeit auf zwei verwandte, aber doch leicht verschiedene Arten definieren zu können, ist von grundsätzlichem Interesse. Um jedoch die Zahl der in der Folge zu besprechenden Möglichkeiten und Modelle zu reduzieren, und weil bei der Berücksichtigung von \mathfrak{E}_3' und \mathfrak{E}_4' nichts grundsätzlich Neues herauskommen würde, lassen wir die Möglichkeiten \mathfrak{E}_3' und \mathfrak{E}_4' in der Folge beiseite.

Wie in § 2 bereits angedeutet wurde, betrachten wir als stets erfüllt:

$$\begin{aligned} \text{Axiom } \mathfrak{W}: \quad & \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \} \\ \text{schliesst} \quad & \{ S_1 \} \rightarrow \{ k S_2 \}, \quad k \neq 1 \end{aligned}$$

aus; den Wechsel des Kriteriums und das Wirken verschiedener $V(\lambda)$ zu verschiedenen Zeiten betrachten wir also nicht, was aber nicht heissen soll, dass wir das Axiom \mathfrak{W} , das wir auch als Axiom der Widerspruchsfreiheit betrachten können, eine Selbstverständlichkeit sei.

$$\text{Axiom } \mathfrak{R}: \quad \{ S_1 + S_2 \} \rightarrow \dots$$

$$\text{ist gleichwertig} \quad \{ S_2 + S_1 \} \rightarrow \dots;$$

die auf derselben Seite wirkenden Leuchtdichten sind experimentell kommutierbar.

$$\text{Axiom } \mathfrak{R}: \quad \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \}, \text{ hierauf } \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_4 \}$$

$$\text{bedingt stets} \quad \{ S_3 \} \rightarrow \{ S_4 \}, \text{ hierauf } \{ S_1 \} \rightarrow \{ S_2 \};$$

die Reihenfolge der Messungen ist ohne Einfluss.

§ 4. Zusammenhänge zwischen Axiomen und Experimenten.

Man erkennt leicht, dass die Form, in der die Axiome aufgestellt wurden, mehr oder weniger durch die Art der ausführbaren Experimente „induziert“ wurde. So stehen

Axiom	$\mathfrak{E}_{\text{energiegl.}}$	mit Versuch	2.1.1
„	\mathfrak{E}	„	2.2.1
„	\mathfrak{E}_4	„	2.4.2
„	\mathfrak{E}_3	„	2.3.2
„	\mathfrak{E}_4'	„	2.4.1
„	\mathfrak{E}_3'	„	2.3.1
„	\mathfrak{L}	„	2.2.3, 2.2.4 und 2.3.3

im engsten Zusammenhang. Man versteht jetzt auch die Indices an den \mathfrak{E} , welche auf die Zahl der im Versuch vorkommenden Abgleichungen hinweisen sollen.

Es ist grundsätzlich wichtig, festzustellen, dass Versuch 2.2.4, der dem Übergiessen beider Komponenten der Helligkeitsgleichung mit demselben Licht (meist Weiss) entspricht, die Vornahme eines Umweges in der Farbenmannigfaltigkeit bedeutet, dass dieser Versuch also ebenso sehr den Charakter einer Eindeutigkeitsprüfung wie denjenigen einer Linearitätsprüfung aufweist. Es gibt demnach Versuche, die in den unmittelbaren Gültigkeitsbereich verschiedener Axiome hineinreichen.

Da das Übergiessen mit Weiss praktische Vorteile bietet (JAGGI⁴), LÜTHY³), könnte man daran denken, den Versuch 2.2.4 unter Festsetzung der Farbe von S_3 und eines quantitativen Verhältnisses zwischen S_3 einerseits und S_1 und S_2 andererseits zur Definition der Gleichheit an Stelle von Versuch 1.1 zu erheben:

$$\text{Aus} \quad \{ S_1 + S_3 \} \rightarrow \{ S_2 + k S_3 \} \quad (6)$$

folge nach Definition

$$\{ S_1 \} \geq \{ S_2 \}.$$

Dann würde Versuch 1.1 zum Kontrollversuch:

$$\begin{array}{l} \{ S_1 + S_3 \} \rightarrow \{ S_2 + k S_3 \} \\ \{ S_3 \} \rightarrow \{ k S_3 \} \\ \text{bedingt } \{ S_1 \} \rightarrow \{ k' S_3 \}, \end{array} \quad (7)$$

wobei $k' \neq 1$ nun eine *Eigenschaft* beschreiben würde.

Begrifflich noch interessanter als diese Vertauschung der Rollen zwischen Definition und Eigenschaft ist der teilweise Bedeutungswandel z. B. bei Versuch 2.2.3, bei welchem ein *ohne Theorie nicht näher bestimmbarer Anteil* von $k - 1$, also von der Abweichung von \mathfrak{L} , in der Definition (6) untergehen würde. Versuch 2.2.3 entspricht der Untersuchung der Leuchtdichteabhängigkeit (sog. inverser Purkinje-Effekt). Hinter den vorliegenden Erläuterungen steckt also die praktische Frage der teilweisen Beseitigung der Leuchtdichteabhängigkeit durch passende Definition der „Gleichheit“ (siehe LÜTHY³)).

Einer entsprechenden Bedeutungs-Transformation als Folge einer Änderung der Definition der Gleichheit unterliegen auch die übrigen Versuche. Als eines der wesentlichen Ergebnisse unserer grundsätzlichen Betrachtungen ist eben diese Feststellung zu betrachten, dass allen Erörterungen über Eindeutigkeit und Lineari-

tät eine axiomatische Festlegung dieser Begriffe voranzugehen hat und dass die Aussagen hierüber nur relativen Wert besitzen, indem die *Trennung in Eindeutigkeit und Linearität mit einer gewissen Willkür behaftet* ist.

§ 5. Zusammenhänge zwischen den Axiomen.

Wenn von den fünf Axiomen von § 3 jedes unabhängig vom andern gelten oder nicht gelten könnte, so wären $2^5 = 32$ Kombinationen möglich. Aber die Axiome, wiewohl einzeln unabhängig, sind miteinander verkettet, wie Tabelle 1 zeigt.

Tabelle 1.
Zusammenhänge zwischen den Axiomen.
 A = Axiom. F = Folgerung.

Beziehungs- gruppe	Axiom					Modelle
	$\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$	\mathfrak{S}	\mathfrak{E}_4	\mathfrak{E}_3	\mathfrak{L}	
I	F	A				$a \quad b \quad d$
II	F	F	F	A		$a \quad b$
III			F		A	$a \quad c$
IV	A	F	A	F		$a \quad b$

Zur Erläuterung dieser Tabelle greifen wir einmal das Axiom \mathfrak{S} heraus: Aus $\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}$ folgt $\{S_2\} \rightarrow \{S_1\}$. Hierin darf für S_2 auch S_1 gewählt werden, ohne dass ein Widerspruch entsteht, also $\{S_1\} \rightarrow \{S_1\}$. Dies ist aber Axiom $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$. Letzteres ist demnach als Folgerung aus \mathfrak{S} ableitbar. Diese Feststellung hat keinen Einfluss darauf, ob $\mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{L}$ gelten oder nicht gelten. Die Kolonne „Modelle“ wird später erläutert.

Den soeben beschriebenen Beziehungskomplex bezeichneten wir in Tabelle 1 als Beziehungsgruppe I; die leeren Stellen unter $\mathfrak{E}_4, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{L}$ weisen darauf hin, dass die betreffenden Axiome erfüllt sein können oder nicht.

Beweis zu Beziehungsgruppe II:

Ausgangspunkt ist \mathfrak{E}_3 :

$$\frac{\begin{array}{l} \{S_1\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_2\} \rightarrow \{S_3\} \end{array}}{\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}}.$$

Wegen \mathfrak{R} kann man \mathfrak{E}_3 auch schreiben:

$$\frac{\begin{array}{l} \{S_2\} \rightarrow \{S_3\} \\ \{S_1\} \rightarrow \{S_3\} \end{array}}{\{S_2\} \rightarrow \{S_1\}}.$$

Demnach ist \mathfrak{S} Folgerung von \mathfrak{E}_3 und \mathfrak{R} . Wegen I gilt dies auch für $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$. \mathfrak{E}_4 ist direkt in \mathfrak{E}_3 enthalten.

Beweis zu Beziehungsgruppe III:

Wir schreiben Axiom \mathfrak{E}_4 hin, wie wenn es nicht gelten würde:

$$\begin{cases} \{S_1\} \rightarrow \{S_3\}, & \{S_1\} \rightarrow \{S_4\} \\ \{S_2\} \rightarrow \{S_3\}, & \{kS_2\} \rightarrow \{S_4\}, \quad k = ? \end{cases}$$

Unter der Annahme \mathfrak{Q} folgt hieraus

$$\{S_1 - S_2\} \rightarrow 0, \quad \{S_1 - kS_2\} \rightarrow 0$$

und weiter

$$\{S_2(1 - k)\} \rightarrow 0.$$

Nimmt man $S_2 \neq 0$ an, so muss unter den in § 2 gemachten Einschränkungen $k = 1$ sein.

\mathfrak{E}_4 ist also in \mathfrak{Q} enthalten. Dies ist für uns die theoretisch wichtigste Folgerung. Als einen der Gründe für die im vorangehenden Paragraphen aufgewiesene Möglichkeit, Abweichungen von der Linearität und Abweichungen von der Eindeutigkeit teilweise ineinander zu transformieren, erkennen wir also den Umstand, dass die allgemeine, nicht näher unschriebene Forderung der Linearität stärker ist als die allgemeine Forderung der Eindeutigkeit. \mathfrak{E}_4 ist in \mathfrak{Q} enthalten, \mathfrak{E}_3 aber nicht.

Tabelle 2.

Möglichkeiten der Kombinationen von Axiomen.

+ = Axiom gilt. - = Axiom gilt nicht.

Modell	$\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$	\mathfrak{S}	\mathfrak{E}_4	\mathfrak{E}_3	\mathfrak{Q}
a	+	+	+	+	+
b	+	+	+	+	-
c	-	-	+	-	+
d	+	+	-	-	-
e	-	-	+	-	-
f	+	-	-	-	-
g	-	-	-	-	-

Der Beweis zu Beziehungsgruppe IV gibt zu keinen besondern Bemerkungen Anlass; wir lassen ihn daher weg.

Betrachten wir nun als Beispiel die folgende Kombination von Axiomen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{S}_{\text{energiegl.}} & \mathfrak{S} & \mathfrak{E}_4 & \mathfrak{E}_3 & \mathfrak{Q} \\ + & + & - & + & + \end{array}$$

Mit den Vorzeichen + und — wollen wir andeuten, dass alle Axiome ausgenommen \mathfrak{E}_4 gelten. Diese Kombination ist nicht möglich wegen II (\mathfrak{E}_4 Folge von \mathfrak{E}_3) und überdies wegen III (\mathfrak{E}_4 Folge von \mathfrak{L}).

Durch Ausprobieren findet man derart, dass von den 32 Möglichkeiten nur die 7 möglich sind, die in Tabelle 2 zusammengestellt sind und denen wir im folgenden Paragraphen die in der ersten Kolonne der Tabelle 2 mit $a \dots g$ bezeichneten Modelle zuordnen wollen.

§ 6. Beschreibung einiger Modelle und ihrer Eigenschaften.

Wir wollen nun zu den 7 möglichen Kombinationen von Tabelle 2 mindestens je 1 Modell angeben und versuchen, zugleich aus den Modellen rechnerisch einen tieferen Einblick in die relative „Stärke“ der verschiedenen Axiome, im besonderen die Überlegenheit des \mathfrak{L} -Axioms über die \mathfrak{E} -Axiome, zu gewinnen.

Vorgängig sei bemerkt, dass wir uns $V(\lambda)$ aus den Grundreizfunktionen aufgebaut denken können⁵⁾:

$$V(\lambda) = \varrho r(\lambda) + \gamma g(\lambda) + \beta b(\lambda) \quad (8)$$

r, g, b die Rot-, Grün-, Blaufunktion; ϱ, γ, β Koeffizienten, die im Idealfall (Modelle a) konstant sind; durch Annahmen über deren Verhalten wollen wir die meisten unserer Modelle definieren.

$\{S\}$ wird bei dieser speziellen Darstellung berechenbar als $\int S(\lambda) V(\lambda) d\lambda$.

Wir werden stets folgende Abkürzungen brauchen:

$$\{S\} = (SV) \text{ für } \int S(\lambda) V(\lambda) d\lambda$$

$$R \text{ für } (Sr) = \int S(\lambda) r(\lambda) d\lambda, \quad G = \dots, \quad B = \dots \quad (9)$$

$$R_{12} \text{ für } (S_1 + S_2, r) = \int (S_1(\lambda) + S_2(\lambda)) r(\lambda) d\lambda, \quad G_{12} = \dots, \quad B_{12} = \dots$$

$\{S_1\}_2$ bedeute, dass es sich um die Berechnung von $\{S_1\}$ in Gegenwart von S_2 als Vergleichslicht handelt.

Modelle vom Typus a .

Modell a_1 : Das internationale Standardauge, definiert durch (3), wobei (8) zu (10) wird:

$$V_0 = \varrho_0 r + \gamma_0 g + \beta_0 b = V(\lambda, \text{int}) \quad (10)$$

$\varrho_0, \gamma_0, \beta_0$ konstante Zahlen.

Modell a_2 : Jede Vakuumphotozelle bei geringer Belastung:

$$\text{Photostrom} = \text{Konst.} \int S(\lambda) Z(\lambda) d\lambda,$$

wobei die Empfindlichkeitsfunktion $Z(\lambda)$ der Zelle unabhängig von $S(\lambda)$ ist.

Modelle a_3 : Alle Modelle definiert durch

$$V = V_0 f(\dots),$$

worin V_0 durch (10) gegeben ist und f eine beliebige Funktion von allem Möglichen, z. B. von $(V_0 S_1)$, $(V_0 S_2)$, $(V S_1)$. . . , aber nicht von λ , sein kann. Die Skala $(S_i V)$ in Funktion von S_i wird dadurch nichtlinear; aber man merkt hiervon nichts, da man mit *Gleichungen* arbeitet, deren beide Seiten in gleicher Weise von der Nichtlinearität betroffen werden. Die Gleichung $\{S_1\} \rightarrow \{S_2\}$ wird daher stets durch $(S_1 V_0) = (S_2 V_0)$ gelöst.

Beispiel: Objektives Photometer bestehend aus zwei gemäss Modell a_2 ($Z(\lambda) = V_0(\lambda)$) arbeitenden Photozellen und zugehörigen Verstärkern, deren Charakteristik beide gleich krumm sind; die beiden Teil-Photometer über ein Nullinstrument zusammengehängt.

Modelle vom Typus b.

Modell b_1 : Modellauge mit Umstimmung des Auges durch Ermüdung der Grundreizfunktionen derart, dass dieselben symmetrisch und proportional den jeweils vorhandenen entsprechenden Farbkomponenten R_{12} , G_{12} , B_{12} verändert werden. Beim Vergleich der Strahlungen S_1 und S_2 sei in

$$V = er + \gamma g + \beta b \quad (8)$$

$$e = e_0(1 + \varepsilon_r R_{12})$$

$$\gamma = \gamma_0(1 + \varepsilon_g G_{12}) \quad (11)$$

$$\beta = \beta_0(1 + \varepsilon_b B_{12})$$

ε_r , ε_g , ε_b drei unabhängige „Ermüdungskoeffizienten“.

Um zu zeigen, wie die Berechnungen durchgeführt werden, geben wir nachstehend ein Beispiel vollständig. Später werden die Zwischenrechnungen alle weggelassen.

Wir untersuchen \mathfrak{E}_3 und berechnen zu diesem Zweck:

$$\begin{aligned}\{S_1\}_2 - \{S_2\}_1 &= (S_1 V)_2 - (S_2 V)_1 \\ &= \varrho_0(S_1 r) + \gamma_0(S_1 g) + \beta_0(S_1 b) \\ &\quad + \varrho_0 \varepsilon_r(S_1 + S_2, r)(S_1 r) + \gamma_0 \varepsilon_g(S_1 + S_2, g)(S_1 g) \\ &\quad + \beta_0 \varepsilon_b(S_1 + S_2, b)(S_1 b) \\ &\quad - \varrho_0(S_2 r) - \gamma_0(S_2 g) - \beta_0(S_2 b) \\ &\quad - \varrho_0 \varepsilon_r(S_1 + S_2, r)(S_2 r) - \gamma_0 \varepsilon_g(S_1 + S_2, g)(S_2 g) \\ &\quad - \beta_0 \varepsilon_b(S_1 + S_2, b)(S_1 b) \\ \{S_2\}_3 - \{S_3\}_2 &= \dots \\ \{S_3\}_1 - \{S_1\}_3 &= \dots\end{aligned}$$

Die Summe aller drei Gleichungen gibt auf der rechten Seite = 0:

$$\{S_1\}_2 - \{S_2\}_1 + \{S_2\}_3 - \{S_3\}_2 + \{S_3\}_1 - \{S_1\}_3 = 0$$

und im besonderen

$$\{S_3\}_1 = \{S_1\}_3, \text{ wenn } \{S_1\}_2 = \{S_2\}_1 \text{ und } \{S_2\}_3 = \{S_3\}_2 \text{ ist.}$$

\mathfrak{E}_3 gilt also. Dass \mathfrak{S} gilt, folgt unmittelbar aus der symmetrischen Bauart der Glieder $R_{12} = R_{21}, \dots$. Würde es sich um das Flimmervorgang handeln, so würden wir sagen, die Zeiten, während welchen S_1 und S_2 wirken, seien einander gleich, so dass die Ermüdung durch die Farbmitte $\frac{S_1 + S_2}{2}$ verursacht werde. Modell b_1 fällt übrigens, wie in Tabelle 1 rechts vermerkt ist, unter Gruppe II, wodurch die Gültigkeit von \mathfrak{S} , $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ und \mathfrak{E}_4 ohnehin sichergestellt ist.

\mathfrak{L} hingegen gilt nicht:

$$\begin{aligned}\{S_1 + S_3\}_{2+4} - \{S_2 + S_4\}_{1+3} - \{S_1\}_2 - \{S_3\}_4 + \{S_2\}_1 + \{S_4\}_3 \\ = 2 \varrho_0 \varepsilon_r((S_1 r)(S_3 r) - (S_2 r)(S_4 r)) + 2 \gamma_0 \varepsilon_g((S_1 g)(S_3 g) - (S_2 g)(S_4 g)) \\ + 2 \beta_0 \varepsilon_b((S_1 b)(S_3 b) - (S_2 b)(S_4 b)).\end{aligned}\quad (12)$$

Der Empfänger mit „gleichnamig reizproportionaler Umstimmung“ arbeitet also tatsächlich eindeutig und nichtlinear.

Modell b_2 : Bei diesem sonderbaren Modell hängen die Helligkeitskoeffizienten $\varrho \dots$ kreuzweise linear von ungleichnamigen Komponenten des Gesamtreizes in folgender Weise ab:

$$\begin{aligned}\varrho &= \varrho_0 + \varepsilon G_{12} \\ \gamma &= \gamma_0 + \varepsilon R_{12} \\ \beta &= \beta_0\end{aligned}\quad (13)$$

Wir führen dieses Modell als Kuriosum an, weil es trotz der zu b_1 geradezu entgegengesetzten $V(\lambda)$ -Eigenschaften dieselbe axiomatische Struktur wie b_1 besitzt.

Die Abweichung von der Linearität folgt zu:

$$\{S_1 + S_3\}_{2+4} - \{S_2 + S_4\}_{1+3} - \{S_1\}_2 - \{S_3\}_4 + \{S_2\}_1 + \{S_4\}_3 = 2 \varepsilon[(S_1 g)(S_3 r) + (S_3 g)(S_1 r) - (S_2 g)(S_4 r) - (S_4 g)(S_2 r)]. \quad (14)$$

Modelle vom Typus c.

Modell c_1 : Ein einfaches, fast triviales Beispiel eines unsymmetrisch, nichteindeutig, aber doch linear arbeitenden Photometers ist ein ideales Photometer (Modelle a_1, a_2) mit einem Grauglas im rechten Strahlengang. d sei die Durchlässigkeit dieses Glases. Dann muss das Licht rechts immer im Verhältnis $k = 1/d$ -mal stärker als das linke sein, um einen Abgleich zu ermöglichen. \mathfrak{S} und $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ gelten nicht:

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow k S_1 \\ \mathfrak{S}_3 \text{ gilt nicht: } S_1 &\rightarrow k S_1 & k = 1/d (> 1) \\ S_2 &\rightarrow k S_1 \\ \hline S_1 &\rightarrow k S_2 \end{aligned}$$

Hingegen sind \mathfrak{S}_4 und \mathfrak{L} gültig.

Modell c_2 : Ein objektives Photometer, bestehend aus 2 linear arbeitenden Photozellen ungleicher Empfindlichkeitsfunktion und einem Nullinstrument.

Modelle vom Typus d.

Modell d_1 : Eine der Grundreizfunktionen, z. B. die Rotfunktion, ist einem Ermüdungseffekt unterworfen, der aber nicht vom Rotgehalt, sondern z. B. vom Grüngehalt des im Photometer erscheinenden Gesamtlichtes, also von G_{12} herrührt:

$$\begin{aligned} e &= e_0(1 + \varepsilon G_{12}) \\ \gamma &= \gamma_0 \\ \beta &= \beta_0 \end{aligned} \quad (15)$$

Die Symmetrie ist gewährleistet, Eindeutigkeit und Linearität jedoch nicht.

Abweichung von der \mathfrak{L} -Forderung:

$$\begin{aligned} \{S_1 + S_3\}_{2+4} - \{S_2 + S_4\}_{1+3} - \{S_1\}_2 - \{S_3\}_4 + \{S_2\}_1 + \{S_4\}_3 = \\ \varepsilon \varrho_0 [(S_3 + S_4, g)(S_1 - S_2, r) + (S_1 + S_2, g)(S_3 - S_4, r)] = \\ \varepsilon \varrho_0 [A + B] \end{aligned} \quad (16)$$

wobei

$$A = (S_3 g)(S_1 - S_2, r) + (S_2 g)(S_3 - S_4, r) \quad (17)$$

$$B = (S_4 g)(S_1 - S_2, r) + (S_1 g)(S_3 - S_4, r).$$

Abweichung von der \mathfrak{E}_4 -Forderung:

$$\begin{aligned} \{S_1\}_3 - \{S_3\}_1 - \{S_2\}_3 + \{S_3\}_2 - \{S_1\}_4 + \{S_4\}_1 + \{S_2\}_4 - \\ \{S_4\}_2 = \varepsilon \varrho_0 [(S_3 - S_4, g)(S_1 - S_2, r) - (S_1 - S_2, g)(S_3 - S_4, r)] = \\ \varepsilon \varrho_0 [A - B] \end{aligned} \quad (18)$$

mit derselben Bedeutung von A und B wie in (16) und (17).

Da $S_1 \dots S_4$ beliebige Strahlungen sind, ist es stets möglich, sie so zu wählen, dass $A + B$ in (16) oder $A - B$ in (18) zu Null wird, dass also für spezielle Lichterkombinationen Linearität ohne Eindeutigkeit oder Eindeutigkeit ohne Linearität besteht. Im allgemeinen kann man nur sagen, dass wegen des Aufbaues der rechten Seiten von (16) und (18) als Summe und Differenz zweier Grössen, die bei statistisch beliebiger Wahl von S_i eher gleiches als ungleiche Vorzeichen haben, der Grad der Nichteindeutigkeit (18) im Durchschnitt um eine Grössenordnung kleiner ist als der Grad der Nichtlinearität (16). Dies ist ein neuer Ausdruck für die uns bereits bekannte Unterordnung der \mathfrak{E}_4 -Forderung unter die \mathfrak{L} -Forderung.

Modell d_2 : Modell dadurch charakterisiert, dass nicht die Intensität, sondern nur die Qualität des im Mittel wirksamen Lichtes eine Umstimmung bewirkt:

$$\varrho = \varrho_0(1 + \varepsilon r_{12}), \quad r_{12} = R_{12}/(R_{12} + G_{12} + B_{12}) \quad (19)$$

$$\gamma = \gamma_0(1 + \varepsilon g_{12}), \quad g_{12} = G_{12}/(R_{12} + G_{12} + B_{12})$$

$$\beta = \beta_0(1 + \varepsilon b_{12}), \quad b_{12} = B_{12}/(R_{12} + G_{12} + B_{12})$$

Dieses Modell hat die besondere Eigenschaft, dass alle Abgleichungen, die bei gleicher mittlerer Farbe, also bei gleichem r_{ik} , g_{ik} , b_{ik} ausgeführt werden, zur Gültigkeit von \mathfrak{L} , \mathfrak{E}_3 und \mathfrak{E}_4 führen. Wenn z. B. nur Versuche vom Typus 2.2.3, wie sie bei der praktischen Prüfung auf Leuchtdichteabhängigkeit vorkommen, aus-

geführt werden, so ändern sich $r_{ik} \dots$ beim Übergang von S_i zu nS_i nicht, und das Vorhandensein eines Modells vom Typus a wird vorgetauscht. Ebenso kann man durch Übergießen gemäss Versuch 2.2.4 mit der Komplementärfarbe zu r_{ik}, g_{ik}, b_{ik} das Gesichtsfeld im Mittel stets weiss machen, wodurch

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0(1 + \varepsilon/3) \\ \gamma &= \gamma_0(1 + \varepsilon/3) \\ \beta &= \beta_0(1 + \varepsilon/3) \\ \hline V &= V_0(1 + \varepsilon/3), \end{aligned}$$

also wiederum ein Modell mit den Eigenschaften von Typus a entsteht.

Abgesehen von diesen Sonderfällen findet man für die Abweichungen von \mathfrak{E} und \mathfrak{L} komplizierte, von Null verschiedene Ausdrücke, die in keiner einfachen Beziehung zueinander stehen.

Modell vom Typus e: Ein objektives Photometer, bestehend aus 2 nichtlinear arbeitenden Photozellen ungleicher Empfindlichkeitsfunktion und einem Nullinstrument.

Modell vom Typus f: Nur $\mathfrak{S}_{\text{energiegl.}}$ soll gelten. Ein Modell definiert durch

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0(1 + \varepsilon R_{\text{links}}), \quad R_{\text{links}} = (S_{\text{links}}, r) \\ \gamma &= \gamma_0 \\ \beta &= \beta_0 \end{aligned} \quad (20)$$

erfüllt diese Bedingung. Für die Abweichung von \mathfrak{L} folgt

$$2 \varrho \varepsilon [(S_1 r)(S_3 r) - (S_2 r)(S_4 r)] \quad (21)$$

und für die Abweichung von \mathfrak{E}_4

$$\varrho \varepsilon (S_1 - S_2, r)(S_4 - S_3, r). \quad (22)$$

Wie bei Modell d_1 lässt sich abschätzen, dass der Ausdruck (21) durchschnittlich grösser ist als (22).

Modelle vom Typus g.

Modell g_1 : Der Fall, dass keines der 5 Axiome erfüllt ist, liegt bei jedem Spektralphotometer mit unsymmetrischem (nicht vertauschbaren) Strahlengang und dem wirklichen Auge als Empfänger vor.

Modell g_2 : Denselben Grad von Allgemeinheit besitzt z. B. die Kombination aus Modell f und Modell c_1 .

§ 7. Schlussbetrachtungen.

Von $V(\lambda)$ wissen wir, dass es als einheitliche Funktion von λ nicht existiert. Beschränkt man sich in der Fragestellung, indem man von den unzähligen $V(\lambda)$ beeinflussenden Parametern nur einen variiert, so lassen sich namentlich für das Flimmerv Verfahren recht genau einige Abhängigkeiten ermitteln. $V(\lambda)$ ist also ein Funktional, über dessen Struktur wir einige Anhaltspunkte besitzen. Sind wir nun für die weitere Erforschung der Hellempfindlichkeit auf das Häufen von empirischem Material angewiesen oder besteht einige Hoffnung, über die Struktur von $V(\lambda)$ auch theoretisch etwas erfahren zu können?

Einen Raum oder eine Mannigfaltigkeit kann man zunächst durch ihre Dimension und ihre Ausdehnung oder auch durch eine Anzahl unabhängiger Eigenschaften zu kennzeichnen versuchen. An diesem letzteren Punkt haben wir angeknüpft. Die Eigenschaften sind nicht Eigenschaften „an sich“, sondern sie sind mitbestimmt durch die Art, wie wir messen. Daher versuchten wir, den unabhängigen Eigenschaften des Auges durch Axiomatisierung (§ 2 ... 5) der photometrischen Operationen (§ 3) beizukommen.

Von der ursprünglichen Absicht, das ganze Verhalten des Photometrikers zu beschreiben, sind wir der Vereinfachung zuliebe rasch abgekommen und haben als messtechnische Eigentümlichkeit nur die Unsymmetrie des Empfängers vollständig behandelt. Dies war das Minimum an Verallgemeinerung, die wir vornehmen mussten. Hätten wir nämlich von vornherein Symmetrie vorausgesetzt, so wäre die bescheidene selbständige Rolle, die die Eindeutigkeitsforderung spielen kann, überhaupt kaum zu erkennen gewesen (§ 5 und 6). Die Zahl von 5 Axiomen, auf die wir uns schliesslich beschränkten, stellt also einen Kompromiss zwischen den Tendenzen zur Vereinfachung und zur Vollständigkeit dar.

Diese 5 Axiome erwiesen sich als verschieden stark (§ 5). Wesentliche Feststellungen — im übrigen ganz elementarer Natur — waren die Möglichkeit, die „Gleichheit“ und die „Eindeutigkeit“ verschieden definieren zu können, die Möglichkeit, Definitionen (Axiome) und Eigenschaften teilweise ineinander transformieren zu können und hauptsächlich die Tatsache, dass das schwache Eindeutigkeitsaxiom \mathfrak{E}_4 durch das Linearitätsaxiom \mathfrak{L} bedingt wird, das starke Axiom \mathfrak{E}_3 jedoch nicht, sofern Unsymmetrie herrscht.

Die Aufstellung der Beziehungsgruppen I ... IV in § 5 erhebt nicht Anspruch auf Vollständigkeit. Für die in Tabelle 1

rechterhand nicht angeführten, von I ... IV nicht verbotenen Typen e, f, g ist es also nötig, dass man beweist, dass sie möglich sind. Dieser Beweis erfolgte in § 6 durch Angabe von Beispielen.

Die Angabe der Musterkarte von Modellen erfolgte aber noch aus zwei weitem Gründen. Zunächst skizziert die Gesamtheit der Modelle als Ganzes den uns ja unbekannten, zu erforschenden Rahmen, in dem sich das wirkliche $V(\lambda)$ bewegen kann, besser als die abstrakte Tabelle 2. Alle die in den Modellen enthaltenen Eigenschaften kann $V(\lambda)$ strukturell grundsätzlich auch aufweisen.

Ferner liess sich an zwei Modellen zeigen, dass wenn \mathfrak{E}_4 und \mathfrak{L} zusammen nicht gelten, dann die Abweichungen vom \mathfrak{E}_4 -Axiom hinter denjenigen vom \mathfrak{L} -Axiom im allgemeinen zurückbleiben. Damit ist die Unterordnung von \mathfrak{E}_4 unter \mathfrak{L} in Form von Gleichungen und Ungleichungen zum Ausdruck gebracht. Sprachlich ist zu empfehlen, zur Kennzeichnung des Idealfalles Typus a die Linearität in den Vordergrund zu stellen oder wenigstens vorsichtigerweise von einer *linear-eindeutigen* Struktur zu sprechen.

Welche Folgerungen ergeben sich nun für das wirkliche Auge? Wir erwähnten bereits, dass der in der Modellsammlung von § 6 vereinigte Reichtum an Beziehungen $V(\lambda)$ umschreibt. Darüber hinaus wollen wir uns erlauben, die Unterordnung der Eindeutigkeit unter die Linearität für das wirkliche Auge als plausibel gemacht anzunehmen. Dies ist das praktische Hauptergebnis unserer Betrachtungen.

Bevor wir an die praktische Verwertung dieser Plausibilitäts-Betrachtung gehen können, ist noch eine Übereinkunft nötig. Da *relative* Abweichungen allgemein am deutlichsten hervortreten, wenn die beteiligten Grössen von gleicher Grössenordnung sind, ist es natürlich, Abweichungen von der Eindeutigkeit, wo naturgemäss alle 3 oder 4 Lichter etwa gleich sind, mit Linearitätsversuchen zu vergleichen, bei welchen zwei gleich grosse Mengen überlagert werden, im besondern mit dem Fall, wo im Versuch 2.2.3 n ungefähr $= 2$ ist. Für solche vergleichbare Versuche erwarten wir also, dass die *Abweichungen von der Eindeutigkeit kleiner als die Abweichungen von der Linearität* seien.

LÜTHY³⁾ konnte tatsächlich zeigen:

1. Die schwierigen Eindeutigkeitsversuche (Abhängigkeit des $V(\lambda, \lambda_2)$ vom monochromatischen Vergleichslicht λ_2) geben bei Farbnormalen keine grösseren Abweichungen als die einfacheren Linearitäts-Kontrollen 2.2.3 (Grössenordnungen: 3% im mittleren Teil und 5% an den Enden des Spektrums);

2. Das $V(\lambda, \lambda_2)$ eines Deuteranomalien mit besonders linear arbeitendem Auge erwies sich als besonders unempfindlich gegen Änderungen des Vergleichslichtes λ_2 .

Sollte diese theoretisch und praktisch nahegelegte Vermutung allgemein zu Recht bestehen, was wir glauben möchten, so kann man sich bei der orientierenden Prüfung von Beobachtern unter Weglassung der schwierigeren und in den Ergebnissen untergeordneten Eindeutigkeitsversuche auf reine Superpositionsversuche beschränken.

Literatur.

- 1) KÖNIG, Das Licht **7**, 261 (1937).
- 2) BERTLING, Licht und Lampe **23**, 82, 130 (1934).
- 3) LÜTHY, erscheint demnächst.
- 4) JAGGI, Helv. Phys. Acta **12**, 77 (1939).
- 5) KÖNIG, Helv. Phys. Acta, **14**, 559 (1941).
- 6) GONSETH, Les mathématiques et la réalité. F. Alcan, Paris, 1936.

Kleine Notiz über den menschlichen Standort gegenüber dem Materie-Energieproblem.

von F. Dessauer

(26. XII. 41.)

Das $E/c^2 = m$ -Gesetz EINSTEINS — vielfach bestätigte Selbstverständlichkeit der heutigen Physik — verbindet in der „Mikrophysik“ höchstverdichtete Energien (ganz starke Photonen, *stärkste Energiesingularitäten*, also Konzentrationen der Energie) deutlich mit den Merkmalen der Materie: der trägen und schweren Masse *in Form einer Gleichsetzung*. Bei den kleinen Energiekonzentrationen der Makrophysik (etwa gewöhnlichen elektrischen Strömen, Schall, Wärme) ist die Energie zu verdünnt — also raumzeitlich zu weit erstreckt — als dass materielle Eigenschaften in Erscheinung treten könnten.

Umgekehrt kann der Übergang von Masse $mc^2 = E$ nur vollzogen werden, wenn mikrophysikalische, d. h. sehr kleine Massen betrachtet werden, also *kleinste Massensingularitäten*. Den Übergang zwischen Energiewelt und Materiewelt bilden also: Höchstkonzentrierte Energie-Einheiten \longleftrightarrow kleinste Masseneinheiten.

Diese Ausdrücke: „höchst“, „kleinst“ schliessen den menschlichen Standort ein. Dieser Standort ist von dem Sosein unserer Sinne und ihren Fortsetzungen, den Messmethoden, her gegeben. Von da aus beurteilen wir „grosse“, „kleine“ Energiekonzentrationen und Massen.

Zunächst ein Beispiel: Mit einer Waage können die Massenkonzentrationen der gewöhnlichen Erfahrung von 1 g auf 10^{-3} g genau leicht und mit Präzisionswaagen auf 10^{-7} g gemessen werden. 10^{-8} g ist die äusserste Grenze.

Rechnet man diese äusserste Grenze der Waagebestimmung als Energie, so ergibt sich:

$$10^{-8} \cdot c^2 = 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{20} = 9 \cdot 10^{12} \text{ Erg} \sim 10^{13} \text{ Erg}.$$

Da 10^7 Erg = 1 Wattsec, bedeutet die äusserste Grenze des Wägbaren an der Materie 10^6 Wattsec, also 1000 KWsec oder 0,28 KWh, d. h. eine Halbwattglühlampe von 200 Kerzen (!) könnte damit ~ 3 Stunden einen Raum beleuchten. Die Masse 10^{-8} g wäre als

Energie räumlich und zeitlich verdünnt. Mit 200 Kerzen kann man einen Saal von $5 \cdot 10 \cdot 3 \text{ m}^3$ also 150 m^3 gut erhellen (abgesehen von der wesentlich grösseren erzeugten Wärmeenergie).

Ein Pt-Stück von diesem Minimalgewicht 10^{-8} g würde — da das spez. Gewicht des Pt = $21,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ — den Raum einnehmen: $\frac{1 \cdot 10^{-8}}{21,4} = \frac{1}{2} 10^{-9} \text{ cm}^3$, also einen Radius $< 10^{-3}$ besitzen (an der Grenze des vom Auge Erkennbaren).

Der obige Saal misst $150 \text{ cm}^3 = 150 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ cm}^3$, also ist die *räumliche* Verdünnung des Stoffes in Energie in diesem Beispiel von der Ordnung $10^{17} : 1$. Hätten wir statt 3 Stunden 1 sec gewählt, so wäre diese „Verdünnung“ auf rund $10^{21} : 1$ gestiegen.

Gewöhnliche Alltagskörper, Grössenordnung — 1 kg z. B. — geben in Energie die Grössenordnung $1000 \cdot 9 \cdot 10^{20} \sim 10^{24} \text{ Erg} \sim 10^{17} \text{ Wattsec} \sim 10^{14} \text{ KWsec} = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ KWh}$, also 28 Milliarden Kilowattstunden.

Die Schweiz erzeugte 1929 in allen elektrischen Werken zusammen ~ 4 Milliarden KWh.

Unsere Einstellung zu Materie und Energie *aus der Erfahrung* ist also so, dass wir eine kleine handliche Materiemenge von 1 kg als Energie wie einen ungeheuer grossen, das Simultanerlebnis weit übersteigenden Energiebetrag — 7 Jahre Gesamtleistung der ganzen Schweizer Elektrizitätsproduktion nach dem Stand von 1929 — erfahren würden.

Mit anderen Worten: *Wir Menschen sind sehr energieempfindlich, aber sehr wenig masseempfindlich*. Würden wir nur Massen (Trägheitswiderstände, Gravitationskräfte) erleben, so wären wir sehr stumpfe Wesen. Unsere Energie-Aufnahmeorgane (Auge, Ohr) sind dagegen viel empfindlicher. *Wir haben, anders formuliert, für den Gegenstand $mc^2 = E$ zwei ganz verschiedene Messbereiche.*

Das Ohr reagiert im maximalen Empfindlichkeitsbereich $1000\text{—}3000 \text{ Hertz}$ auf $10^{-15} \text{ Wattenm}^{-2} \sim 10^{-8} \text{ Erg} \cdot \text{cm}^{-2}$. Das würde ungerechnet in Materie $\frac{10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}} \text{ g} = 10^{-29} \text{ g}$ entsprechen. Es ist also 10^{-21} d. i. 1000 Trillionen mal empfindlicher als die empfindlichste Waage; gegen die direkte Schätzung einer Masse von 1 g (Druck von 1 g) steht die Empfindlichkeit des Ohres wie $10^{29} : 1$, also um das 100 000 Quadrillionenfache.

Ebenso verhält es sich mit Licht. $100\text{—}1000$ mittlere Quanten, also $\sim 10^{-10}$ bis 10^{-9} Erg sind vom Auge wahrnehmbar.

In diesem Zusammenhang kann auf die neuerliche Erklärung der Erhaltung der Sonnenenergie nach BETHE erinnert werden.

Hier deckt ein Massenschwund vom Typus ($2\,{}_1\text{H}^{1+} + 2\,n = \text{He}^{++}$: 2 Wasserstoffkerne + 2 Neutronen) mit einem Einzeldefizit von ca.

$$4 \cdot 1,0078 = 1 \cdot 4,002 + \Delta mc^2$$

$\Delta m \sim 0,029 \cdot 1,65 \cdot 10^{-24}$ g (entsprechend ca. $5 \cdot 10^{-5}$ Erg) die ausstrahlende Wärme. Wir sehen, die Sonne betrachtend, dieser Entmaterialisierung zu.

Die Empfindlichkeitsbereiche des Menschen zu Materie und zu Energie verhalten sich etwa wie $1:10^{21}$.

Man kann auch so sagen: Da die Impuls- und Gravitationsempfindlichkeit des Menschen 10^{21} mal kleiner ist als seine Seh- und Hörempfindlichkeit, ergibt sich, dass er schwere und träge Masse als etwas ganz anderes erleben muss, als Licht und Schall. Wäre die Empfindlichkeit von gleicher Grössenordnung, so wäre — wegen raumzeitlicher Koinzidenzen der Ereignisse — die Identität „selbstverständlich“. Er würde — etwa bei der Sonnenstrahlung — Licht und die Impulse der trägen Photonenmassen raumzeitlich gemeinsam erleben und darum identifizieren. Denn für Identifizierung von Erfahrungen, die durch verschiedene Sinne erfasst werden, ist die raumzeitliche Übereinstimmung grundlegend. So aber konnte er primär nicht auf die Idee einer grundsätzlichen Verbundenheit kommen und es bedurfte etwa $2\frac{1}{2}$ Jahrtausende Physik bis zur Aufdeckung dieser Verbundenheit.

Physikalisches Institut der Universität Freiburg.

Zur Paartheorie der Kernkräfte

von Gregor Wentzel.

(12. I. 1942.)

Ein vereinfachtes Verfahren zur exakten Lösung der Eigenwertprobleme der Paartheorien wird angegeben. In der skalaren Paartheorie wird das Verfahren angewendet zur Berechnung der Selbstenergie eines Protons, der Kräfte zwischen zwei Protonen, und der Volumenergie eines Protonen-Kristallgitters. Die Ergebnisse entsprechen qualitativ den Anforderungen der phänomenologischen Kerntheorie, wenn man die in den Kopplungsansatz der Feldtheorie eingehende Abschneidelänge grössenordnungsmässig mit der Kraftreichweite der phänomenologischen Theorie ($\sim 10^{-13}$ cm) identifiziert, während die Comptonwellenlänge der Feldteilchen auch grösser angenommen werden kann.

In den Paartheorien¹⁾ bestimmen sich die Eigenwerte der Energie von Kernpartikeln und Feld bekanntlich durch die Eigenwerte einer quadratischen Form, und daher lassen sich solche Probleme in exakter Weise — d. h. ohne Verwendung der Störungsmethode — lösen. WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER²⁾, denen man diese Bemerkung verdankt, berechneten bereits die Selbstenergie, die ein ruhendes (unendlich schweres) Proton oder Neutron vermöge seiner Wechselwirkung mit dem Paarfelde besitzt, ferner die Selbstenergie von mehreren Protonen am gleichen Ort, woraus sich ein Hinweis auf den Sättigungscharakter der betreffenden Kernkräfte ergab. Betrachtet man mehrere ruhende Protonen an verschiedenen Orten, so hängt die Selbstenergie von den Protonenkoordinaten ab, d. h. man erhält die potentielle Energie der statischen Kernkräfte als Ortsfunktion³⁾. In einer früheren Arbeit des Verfassers⁴⁾ (im folgenden als I zitiert) wurde gezeigt, wie man die Abstandsabhängigkeit der Zweikörperkräfte berechnen kann, ein Problem, das z. B. im Hinblick auf die Proton-Proton-Streuung von Interesse ist. In der vorliegenden Arbeit wird das Rechenver-

¹⁾ Wir denken in erster Linie an die „Elektronpaar-Theorie“, die zuerst von GAMOW und TELLER (Phys. Rev. **51**, 289, 1937) und gleichzeitig vom Verfasser (Helv. Phys. Acta **10**, 107, 1937) vorgeschlagen wurde, sodann an die „Mesonpaar-Theorie“ von MARSHAK und WEISSKOPF (Phys. Rev. **57**, 1101, 1940 und **59**, 130, 1941).

²⁾ Phys. Rev. **56**, 530, 1939.

³⁾ CRITCHFIELD und LAMB, Phys. Rev. **58**, 46, 1940.

⁴⁾ ZS. f. Phys. **118**, 277, 1941. Vgl. auch JAUCH, Helv. Phys. Acta **15**, 175, 1942.

fahren vereinfacht und verallgemeinert. Um auch über die Energie eines Kerns von hohem Atomgewicht Auskunft zu erhalten, wird ferner das Problem sehr vieler Protonen in Kristallgitter-Anordnung behandelt.

Ob der Spin der Feldpartikeln ganz- oder halbzahlige gewählt wird, ist weder für den Gang der Rechnung noch für das qualitative Ergebnis entscheidend. Hat man ganzzahligen Spin und Bose-Einstein-Statistik, so betrachtet man die Energie der Nullpunktsschwingungen des Feldes und ihre Beeinflussung durch die anwesenden Kernpartikeln. Bei halbzahligen Spin und Quantisierung nach dem Pauli-Prinzip andererseits ist die Nullpunktsenergie durch die Energiewerte der besetzten Einzelzustände negativer Energie gegeben, und diese werden wieder durch die anwesenden Protonen beeinflusst. In Anbetracht dieser Analogie haben wir uns in der früheren Arbeit (I) damit begnügt, das Rechenverfahren am Beispiel des skalaren Feldes (Spin 0) zu erläutern, das natürlich den einfachsten Fall darstellt. Inzwischen hat JAUCH (l. c.) das Verfahren auf die Elektronpaartheorie (Spin $\frac{1}{2}$) angewendet und bestätigt, dass die Situation, abgesehen von den Komplikationen, die durch die grössere Zahl der Freiheitsgrade bedingt sind, die gleiche ist (bei Wahl eines Wechselwirkungsansatzes, der den Protonspin nicht enthält). Wir beschränken uns daher auch hier Einfachheit halber wieder auf das Beispiel der skalaren Paartheorie.

Wir führen also ein Pauli-Weisskopf'sches skalares komplexes Feld¹⁾ ψ ein mit der Vakuum-Hamiltonfunktion

$$H^0 = \int dX \{ \pi^* \pi + \psi^* (\mu^2 - \Delta) \psi \};$$

π, π^* bedeuten die zu ψ, ψ^* kanonisch konjugierten Wellenfunktionen, und die Konstante μ bestimmt die Ruhmasse der Feldteilchen (die Lichtgeschwindigkeit ist = 1 gesetzt). Das Feld sei räumlich periodisch, und zwar sei der Periodizitätsbereich ein Kubus vom Volumen $V = L^3$. Demgemäss setzen wir

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{t}} q_{\mathbf{t}} e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}}, \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{t}} p_{\mathbf{t}} e^{-i\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}};$$

der \mathbf{t} -Raum ist ein kubisches Gitter mit der Gitterkonstante $2\pi/L$. Bekanntlich wird dann

$$H^0 = \sum_{\mathbf{t}} \{ p_{\mathbf{t}}^* p_{\mathbf{t}} + \omega_{\mathbf{t}}^2 q_{\mathbf{t}}^* q_{\mathbf{t}} \}, \quad \text{wo} \quad \omega_{\mathbf{t}}^2 = \mu^2 + |\mathbf{t}|^2.$$

¹⁾ PAULI und WEISSKOPF, Helv. Phys. Acta 7, 709, 1934.

Die Protonen, mit denen das ψ -Feld gekoppelt werden soll, betrachten wir als unendlich schwer und ruhend; ihre Ortsvektoren seien \mathbf{r}_s ($s = 1, 2, \dots, Z$). Ein der Paartheorie entsprechender Wechselwirkungsansatz lautet:

$$H' = \lambda \sum_{s=1}^Z \psi^*(\mathbf{r}_s) \psi(\mathbf{r}_s) = \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{t}, \mathbf{t}'} q_{\mathbf{t}}^* q_{\mathbf{t}'} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{t}' - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}_s},$$

denn dieser Hamilton-Term beschreibt, wenn er als kleine Störung betrachtet wird, Paar-Erzeugungs- und -Vernichtungsprozesse sowie Streuprozesse, wie die Formeln der Pauli-Weisskopf'schen Theorie unmittelbar erkennen lassen. λ ist ein Kopplungsparameter von der Dimension einer Länge; wir wählen

$$\lambda > 0,$$

damit der positiv-definite Charakter der Hamiltonfunktion garantiert ist¹⁾. Wir müssen aber den obigen Wechselwirkungsansatz, der der Nahwirkungsvorstellung entspricht, noch abändern im Sinne einer „Abschneidung“ des $|\mathbf{k}|$ -Spektrums, um endliche Ergebnisse zu erhalten. Dabei wählen wir dasselbe Abschneideverfahren wie WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER: in H' werde $\psi(\mathbf{r}_s)$ durch einen Mittelwert $\int dX f(|\mathbf{x}|) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{r}_s)$ ersetzt. Die \mathbf{k} -Raum-Darstellung von H' ist dann von der Form

$$H' = \frac{\lambda}{V} \sum_{s=1}^Z \left| \sum_{\mathbf{t}} g_{\mathbf{t}} q_{\mathbf{t}} e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_s} \right|^2 = \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{t}, \mathbf{t}'} g_{\mathbf{t}}^* g_{\mathbf{t}'} q_{\mathbf{t}}^* q_{\mathbf{t}'} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{t}' - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}_s},$$

wo für die Gewichtsfunktion g gilt:

$$g_{\mathbf{t}} = g(|\mathbf{t}|) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathbf{t}| \leq A, \\ 0 & \text{für } |\mathbf{t}| \geq A \end{cases}$$

(A^{-1} = Abschneidelänge).

In der Hamiltonfunktion $H = H^0 + H'$ führen wir Normalkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{t}} &= \sum_{\mathbf{t}'} a_{\mathbf{t} \mathbf{t}'} Q_{\mathbf{t}'}, \quad p_{\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{t}'} a_{\mathbf{t} \mathbf{t}'}^* P_{\mathbf{t}'}, \\ \sum_{\mathbf{t}} a_{\mathbf{t} \mathbf{t}'}^* a_{\mathbf{t} \mathbf{t}''} &= \sum_{\mathbf{t}} a_{\mathbf{t} \mathbf{t}'}^* a_{\mathbf{t} \mathbf{t}''} = \delta_{\mathbf{t}' \mathbf{t}''}, \\ H &= \sum_{\mathbf{t}} \{ P_{\mathbf{t}}^* P_{\mathbf{t}} + \Omega_{\mathbf{t}}^2 Q_{\mathbf{t}}^* Q_{\mathbf{t}} \}. \end{aligned}$$

$Q_{\mathbf{t}}$, $P_{\mathbf{t}}$ sind natürlich kanonische Variable mit den bekannten Vertauschungsrelationen. Die Transformationskoeffizienten $a_{\mathbf{t} \mathbf{t}'}$ be-

¹⁾ Vgl. I, Fussnote 1, S. 284.

stimmen sich in bekannter Weise durch die Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$(\Omega^2 - \omega_{\mathbf{f}}^2) q_{\mathbf{f}} - \frac{\lambda}{V} g_{\mathbf{f}}^* \sum_{\mathbf{f}'} g_{\mathbf{f}'} q_{\mathbf{f}'} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{f}' - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{x}_s} = 0;$$

die zugehörige Säkulargleichung lautet:

$$\Delta(\Omega^2) \equiv \text{Det} \left| (\Omega^2 - \omega_{\mathbf{f}}^2) \delta_{\mathbf{f}\mathbf{f}'} - \frac{\lambda}{V} g_{\mathbf{f}}^* g_{\mathbf{f}'} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{f}' - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{x}_s} \right| = 0. \quad (1)$$

Wir denken uns die Wurzeln Ω^2 dieser Gleichung bestimmt (als Funktionen der \mathbf{x}_s) und numerieren sie wieder mit einem Index \mathbf{f} (etwa so, dass $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Omega_{\mathbf{f}} = \omega_{\mathbf{f}}$). Mit den $\Omega_{\mathbf{f}}$ kennt man sogleich die Eigenwerte der Energie H :

$$\sum_{\mathbf{f}} \hbar \Omega_{\mathbf{f}} (N_{\mathbf{f}}^+ + N_{\mathbf{f}}^- + 1)$$

($N_{\mathbf{f}}^+$, $N_{\mathbf{f}}^-$ = Anzahlen der positiven bzw. negativen Feldteilchen in den Einzelzuständen \mathbf{f}), und damit insbesondere die hier interessierende Nullpunktsenergie $\hbar \sum_{\mathbf{f}} \Omega_{\mathbf{f}}$. Ihren Überschuss über die Nullpunktsenergie des Vakuumfeldes nennen wir E :

$$E = \hbar \sum_{\mathbf{f}} (\Omega_{\mathbf{f}} - \omega_{\mathbf{f}}).$$

Die Energie E , die von den Protonenkoordinaten \mathbf{x}_s abhängt, enthält ausser der gesuchten Energie der Kernkräfte noch die Selbstenergie der Z Protonen. Sei $E(\infty)$ der Wert von E bei paarweise unendlichen Abständen der Protonen, so gibt

$$U = E - E(\infty)$$

das Potential der statischen Kräfte, welche die Protonen durch Vermittlung des ψ -Feldes aufeinander ausüben.

Die Berechnung der einzelnen Eigenwerte $\Omega_{\mathbf{f}}^2$ kann man auf folgende Weise umgehen: Indem wir

$$\Omega^2 = \zeta$$

setzen, schreiben wir die Determinante (1) in der Form:

$$\Delta(\zeta) = \prod_{\mathbf{f}} (\zeta - \Omega_{\mathbf{f}}^2).$$

Im Limes $\lambda = 0$ (Vakuumfeld) geht $\Delta(\zeta)$ über in

$$\Delta_0(\zeta) = \prod_{\mathbf{f}} (\zeta - \omega_{\mathbf{f}}^2).$$

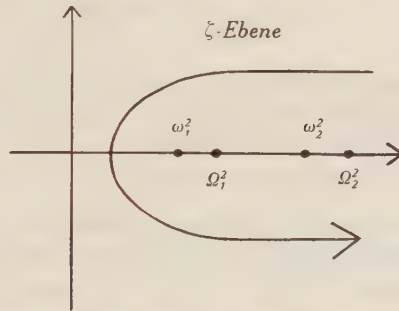
Wir bilden nun die rational-gebrochene Funktion

$$\varphi(\zeta) = \frac{\Delta(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)}, \quad (2)$$

deren Nullstellen und Pole in der komplexen ζ -Ebene alle auf die positiv-reelle ζ -Achse fallen. Ferner sei $f(\zeta)$ eine Funktion, die sich in der Umgebung dieser positiv-reellen Achse regulär verhält. Dann gilt offenbar:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{f}} \{f(\Omega_{\mathfrak{f}}^2) - f(\omega_{\mathfrak{f}}^2)\} &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \cdot f(\zeta) \sum_{\mathfrak{f}} \left(\frac{1}{\zeta - \Omega_{\mathfrak{f}}^2} - \frac{1}{\zeta - \omega_{\mathfrak{f}}^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \cdot f(\zeta) \frac{d \log \varphi(\zeta)}{d\zeta}, \end{aligned}$$

wo der Integrationsweg im positiven Sinne um alle Nullstellen und Pole von $\varphi(\zeta)$ herumführt (vgl. die Figur¹⁾. Bei einem Um-



lauf um diese Kurve kehrt $\log \varphi(\zeta)$ zum Ausgangswert zurück, da gleich viele Nullstellen ($\Omega_{\mathfrak{f}}^2$) wie Pole ($\omega_{\mathfrak{f}}^2$) im Innern liegen; daher kommt durch partielle Integration:

$$\sum_{\mathfrak{f}} \{f(\Omega_{\mathfrak{f}}^2) - f(\omega_{\mathfrak{f}}^2)\} = -\frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \cdot f'(\zeta) \log \varphi(\zeta).$$

Mit $f(\zeta) = \sqrt{\zeta}$ wird also

$$E = -\frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \log \varphi(\zeta). \quad (3)$$

(Bei einer Verschiebung des Integrationsweges ist natürlich auf den Verzweigungspunkt $\zeta = 0$ zu achten.) Für die Berechnung der Energie E und des Potentials U ist also die Kenntnis der $\Omega_{\mathfrak{f}}^2$) nicht erforderlich. Die Formel (3) ermöglicht auch unmittelbar den Grenzübergang zum kontinuierlichen \mathfrak{f} -Raum ($V \rightarrow \infty$), wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

¹⁾ Wenn $g_{\mathfrak{f}}$ oberhalb eines gewissen $|\mathfrak{f}|$ -Wertes nullgesetzt wird, so liegen alle Nullstellen und Pole von φ im Endlichen.

²⁾ Ihre Bestimmung machte den Hauptinhalt der früheren Arbeiten aus.

1. Ein einziges Proton.

Für $Z = 1$ lautet die Säkular determinante (1), wenn man den Koordinatenursprung einfachheitshalber an den Ort des Protons legt ($\mathbf{x}_1 = 0$):

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta) &= \text{Det} \left| (\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \frac{\lambda}{V} g_{\mathbf{k}}^* g_{\mathbf{k}'} \right| \\ &= \prod_{\mathbf{k}} (\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2) \cdot \left\{ 1 - \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2} \right\}. \end{aligned}$$

Für $\varphi(\zeta)$ erhält man also in diesem Falle die Funktion

$$\varphi_1(\zeta) = 1 - \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2}. \quad (4)$$

Im Limes $V \rightarrow \infty$ geht die \mathbf{k} -Summe in ein \mathbf{k} -Raum-Integral über:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \varphi_1(\zeta) = 1 - \lambda \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \int_0^\infty dk \frac{k^2 |g(k)|^2}{\zeta - (\mu^2 + k^2)}.$$

Die Nullstellen und Pole von $\varphi_1(\zeta)$ fallen alle auf die reell-positive ζ -Achse, und zwar auf den Abschnitt $\zeta \geq \mu^2$ (denn für reelles $\zeta < \mu^2$ ist $\varphi_1 > 0$); wir setzen daher

$$\zeta = \mu^2 + \xi + i\eta$$

und führen das Integral (3) in der $\xi\eta$ -Ebene in einer Schleife um die positive ξ -Achse herum, wobei wir die Schleife dieser Achse unbegrenzt annähern ($\xi \geq 0, \eta \rightarrow \pm 0$). Dann erhält man für E den Wert:

$$E_1 = \frac{\hbar}{4\pi i} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\mu^2 + \xi}} \log \frac{\varphi_+(\xi)}{\varphi_-(\xi)},$$

wo

$$\varphi_\pm(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow \pm 0} \varphi_1(\mu^2 + \xi + i\eta). \quad (5)$$

Im Limes $V = \infty$ bilden wir zunächst:

$$\frac{\varphi_+(\xi) + \varphi_-(\xi)}{2} \equiv \bar{\varphi}(\xi) = 1 + \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 |g(k)|^2}{k^2 - \xi}. \quad (6)$$

(Hauptwert)

Dann findet man (wir setzen $\xi = \kappa^2$):

$$\varphi_\pm(\kappa^2) = \bar{\varphi}(\kappa^2) \pm i \frac{\lambda}{4\pi} \kappa |g(\kappa)|^2, \quad (7)$$

also

$$\log \frac{\varphi_+(\kappa^2)}{\varphi_-(\kappa^2)} = 2i \arctg \frac{\lambda \kappa |g(\kappa)|^2}{4\pi \bar{\varphi}(\kappa^2)}.$$

Somit erhalten wir für die Selbstenergie eines Protons den Wert:

$$E_1 = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\kappa \cdot \kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \arctg \frac{\lambda \kappa |g(\kappa)|^2}{4\pi \bar{\varphi}(\kappa^2)}. \quad (8)$$

Dieses Ergebnis stimmt überein mit demjenigen, das man auf Grund des Rechenverfahrens von WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER (l. c.) erhält (Ersetzung des kontinuierlichen $|\mathbf{k}|$ -Spektrums durch eine Folge äquidistanter Punkte und Berechnung der $\Omega_{\mathbf{k}}$).

2. Zwei Protonen.

Im Falle $Z = 2$ erhält man durch Ausrechnung der Determinante (1) für die Funktion $\varphi(\zeta)$ (2):

$$\begin{aligned} \varphi_2(\zeta) = 1 - \frac{2\lambda}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2} \\ + \left(\frac{\lambda}{V} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2 |g_{\mathbf{k}'}|^2 (1 - \cos(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{(\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2)(\zeta - \omega_{\mathbf{k}'}^2)}, \end{aligned}$$

d. h. bei Verwendung der durch (4) definierten Funktion $\varphi_1(\zeta)$:

$$\varphi_2(\zeta) = [\varphi_1(\zeta)]^2 - \left(\frac{\lambda}{V} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2 |g_{\mathbf{k}'}|^2 \cos(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2)(\zeta - \omega_{\mathbf{k}'}^2)}.$$

Gehen wir sogleich zur Grenze $V = \infty$ über, so können wir in den \mathbf{k} - und \mathbf{k}' -Raum-Integralen die Richtungsintegrationen unmittelbar ausführen und erhalten:

$$\varphi_2(\zeta) = [\varphi_1(\zeta)]^2 - [\chi(r, \zeta)]^2,$$

wo

$$\begin{aligned} \chi(r, \zeta) &= \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 |g(k)|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{k}}^2} \frac{\sin kr}{kr} \\ &= \frac{\lambda i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{k |g(k)|^2 e^{ikr}}{k^2 - (\zeta - \mu^2)}; \end{aligned} \quad (9)$$

hier bedeutet $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ den Abstand der beiden Protonen. Lässt man diesen Abstand gegen ∞ gehen, so wird offenbar $\chi = 0$, also $\varphi_2 = \varphi_1^2$, und man erhält nach (3) den Energiewert:

$$E_2(\infty) = 2 E_1,$$

d. h. die Energie zweier Protonen in unendlichem Abstand ist das

doppelte der Selbstenergie des einzelnen Protons. Für das Potential U der Zweikörperkraft kommt hiermit:

$$U_2(r) = E_2(r) - E_2(\infty) = -\frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \log \left\{ 1 - \left[\frac{\chi(r, \zeta)}{\varphi_1(\zeta)} \right]^2 \right\}. \quad (10)$$

Für die weitere Rechnung wollen wir die Gewichtsfunktion $|g|^2$ speziell wählen:

$$|g(k)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{A^2}}. \quad (11)$$

Dann lässt sich χ (9) durch Verschiebung des k -Integrationsweges in die positiv-imaginäre Halbebene leicht berechnen. Man findet, mit $\zeta = \mu^2 + \kappa^2$:

$$\chi(r, \mu^2 + \kappa^2) = -\frac{\lambda}{4\pi} |g(\kappa)|^2 \cdot \frac{e^{\pm i\kappa r} - e^{-Ar}}{r}; \quad (12)$$

dabei gilt in $e^{\pm i\kappa r}$ das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem ob κ einen positiven oder negativen Imaginärteil hat. Führen wir in (10) κ als Integrationsvariable ein, so können wir den Integrationsweg beiderseits der positiv-reellen κ -Achse entlang führen; unter Verwendung der durch (5) definierten Funktionen φ_+ , φ_- können wir dann schreiben:

$$U_2(r) = \frac{\hbar}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{d\kappa \cdot \kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \log \frac{1 - \left[\frac{\lambda}{4\pi} \frac{|g(\kappa)|^2}{\varphi_+(\kappa^2)} \cdot \frac{1}{r} (e^{i\kappa r} - e^{-Ar}) \right]^2}{1 - \left[\frac{\lambda}{4\pi} \frac{|g(\kappa)|^2}{\varphi_-(\kappa^2)} \cdot \frac{1}{r} (e^{-i\kappa r} - e^{-Ar}) \right]^2} \quad (13)$$

Für φ_+ , φ_- erhält man bei Verwendung der Gewichtsfunktion (11) und auf Grund von (6) und (7) (oder auch direkt durch komplexe Integration¹⁾):

$$\varphi_\pm(\kappa^2) = 1 + \frac{\lambda}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A \pm i\kappa). \quad (14)$$

Bei der Diskussion der Formel (13) beschränken wir uns auf grosse r -Werte: der Protonen-Abstand r sei gross gegen die Abschneidelänge A^{-1} . Dann sind die Terme $\sim e^{-Ar}$ vernachlässigbar. Da ferner nach (14)

$$4\pi | \varphi_\pm(\kappa^2) | > \lambda |g(\kappa)|^2 \cdot A,$$

ist das Argument des Logarithmus im Integranden in (13) nahezu

¹⁾ Es gilt: $\varphi_\pm(\kappa^2) = 1 - \lim_{r \rightarrow 0} \chi(r, \mu^2 + \kappa^2)$.

$= 1$, nämlich bis auf Terme der Ordnung $(Ar)^{-1}$; man kann also den Logarithmus entwickeln:

$$U_2(r) = - \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \frac{\hbar}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{d\kappa \cdot \kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} |g(\kappa)|^4 \left(\frac{e^{2i\kappa r}}{[\varphi_+(\kappa^2)]^2} - \frac{e^{-2i\kappa r}}{[\varphi_-(\kappa^2)]^2} \right) + \dots$$

Zu diesem Fourier-Integral kann für $r \gg A^{-1}$ nur der Integrationsbereich $\kappa \ll A$ einen wesentlichen Beitrag liefern; in diesem Bereich ist aber $|g(\kappa)| \leq 1$ und nach (14)

$$\varphi_\pm(\kappa^2) \leq 1 + \frac{\lambda}{4\pi} \cdot A.$$

Somit wird

$$U_2(r) = - \frac{\hbar}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{4\pi}{\lambda} + A\right)^2} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^\infty \frac{d\kappa \cdot \kappa \sin 2\kappa r}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} (1 - \dots) \left. \vphantom{\int_0^\infty} \right\} (15)$$

$$\leq \frac{1}{2} \hbar \mu \frac{1}{\left(\frac{4\pi}{\lambda} + A\right)^2} \cdot \frac{1}{r^2} H_1^{(1)}(2i\mu r).$$

Die hier auftretende Hankel'sche Funktion hat folgendes asymptotische Verhalten:

$$H_1^{(1)}(2i\mu r) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi \mu r} + \dots & \text{für } r \ll \mu^{-1}. \\ -\frac{e^{-2\mu r}}{\sqrt{\pi \mu r}} + \dots & \text{für } r \gg \mu^{-1}. \end{cases}$$

$U_2(r)$ entspricht einer anziehenden Kraft, die eine „Reichweite“ der Größenordnung μ^{-1} besitzt. Die Formel (15) stimmt überein mit der Formel (30) der früheren Arbeit (I)¹⁾. Im Grenzfalle „schwacher Kopplung“, d. h. für $\lambda \ll 4\pi A^{-1}$, wird

$$U_2(r) \leq \lambda^2 \cdot \frac{\hbar \mu}{32\pi^2} \cdot \frac{1}{r^2} H_1^{(1)}(2i\mu r),$$

¹⁾ Zu beachten ist die etwas andere Bedeutung von λ und A : Der Parameter λ der gegenwärtigen Arbeit wurde in I mit λ' bezeichnet und gleich $\lambda \cdot (2\pi)^3$ gesetzt. Ferner wurde in I das Impulsspektrum „scharf“ abgeschnitten:

$$g_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathbf{k}| < A, \\ 0 & \text{für } |\mathbf{k}| > A, \end{cases}$$

während hier die Abschneidevorschrift (11) verwendet wurde. — Die in I, S. 290 und im Anhang erwähnten schwachen Kräfte grosser Reichweite sind offenbar durch die scharfe Abschneidung bedingt. Für den Hauptterm (15) dagegen ist die Wahl der Gewichtsfunktion g ohne Bedeutung.

in Übereinstimmung mit der störungstheoretischen Rechnung (zweite Näherung; vgl. I, Anhang). Bei stärkerer Kopplung ($\lambda \lesssim 4\pi A^{-1}$) liefert die exakte Rechnung die gleiche r -Abhängigkeit des Potentials wie die Störungsmethode (für $r \gg A^{-1}$), aber für den konstanten Faktor ergibt sich ein kleinerer Wert. Lässt man den Abschnide-Impuls A gegen ∞ gehen, so verschwindet das Potential U (für $r \neq 0$)¹.

Für Protonabstände $r \sim A^{-1}$ lässt sich die Formel (13) kaum vereinfachen. Im Grenzfalle $r \ll A^{-1}$ dagegen ist das Ergebnis wieder einfach, da in H'

$$e^{i(\mathbf{r}' - \mathbf{r})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \simeq 1$$

gesetzt werden kann. In dieser Näherung erhält man dasselbe Eigenwertproblem wie bei Anwesenheit nur eines Protons, wobei lediglich λ durch 2λ ersetzt ist. Es ist also

$$E_2(r, \lambda) \simeq E_1(2\lambda) \quad \text{für} \quad r \ll A^{-1};$$

folglich

$$U_2(r) \simeq E_1(2\lambda) - 2E_1(\lambda) \quad \text{für} \quad r \ll A^{-1}.$$

3. Protonen-Gitter.

Der Periodizitätskubus $V = L^3$ enthalte $Z = N^3$ Protonen in kubischer Gitteranordnung, d. h. die Protonenkoordinaten \mathbf{r}_{si} seien ganze Vielfache der Gitterkonstanten $a = L/N$. Die in der Säkulardeterminante (1) auftretende Summe

$$\sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{x}_s}$$

ist dann nur von Null verschieden, wenn $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ ein Vektor des reziproken Gitters ist. Bezeichnen wir diese Vektoren mit b_h ($b_{hi} = \frac{2\pi}{a} \cdot h_i$), so wird also

$$\frac{1}{V} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{x}_s} = \begin{cases} a^{-3}, & \text{wenn } \mathbf{r}' - \mathbf{r} = b_h \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (16)$$

In jeder Zelle des reziproken Gitters (Volumen $(2\pi/a)^3$) liegen $(L/a)^3 = Z$ Punkte des \mathbf{r} -Gitters; die Wechselwirkung H' koppelt nur solche \mathbf{r} -Punkte miteinander, die in verschiedenen Zellen des reziproken Gitters an äquivalenten Stellen liegen. Infolgedessen

¹) Wie in I, § 9 bemerkt wurde, verschwindet im Limes $A \rightarrow \infty$ auch die Streuung der Feldpartikeln an einem Proton (auf Grund des gleichen Wechselwirkungsansatzes H').

zerfällt die Säkular determinante (1) in ein Produkt von Z Determinanten der Form

$$\Delta_{\mathfrak{f}} = \text{Det} \left| (\Omega^2 - \omega_{\mathfrak{f}+b_h}^2) \delta_{hh'} - \frac{\lambda}{a^3} g_{\mathfrak{f}+b_h}^* g_{\mathfrak{f}+b_{h'}} \right|.$$

Es wird also

$$\log A = \sum_{[\mathfrak{f}]} \log \Delta_{\mathfrak{f}},$$

wo die Summe nur über die \mathfrak{f} -Punkte innerhalb einer Zelle des reziproken Gitters zu erstrecken ist. Jede einzelne Determinante $\Delta_{\mathfrak{f}}$ ist von derselben Struktur wie die oben behandelte Determinante A beim Problem eines einzelnen Protons; daher erhält man für die Funktion $\varphi(\zeta)$ (2) (vgl. (4)):

$$\left. \begin{aligned} \log \varphi(\zeta) &= \sum_{[\mathfrak{f}]} \log \varphi_{[\mathfrak{f}]}(\zeta), \\ \text{wo } \varphi_{[\mathfrak{f}]}(\zeta) &= 1 - \frac{\lambda}{a^3} \sum_h \frac{|g_{\mathfrak{f}+b_h}|^2}{\zeta - \omega_{\mathfrak{f}+b_h}^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Nach (16) kann man hierfür auch schreiben:

$$\varphi_{[\mathfrak{f}]}(\zeta) = 1 - \frac{\lambda}{V} \sum_{s=1}^Z e^{-i\mathfrak{f}x_s} \sum_{\mathfrak{f}'} e^{i\mathfrak{f}'x_s} \frac{|g_{\mathfrak{f}'}|^2}{\zeta - \omega_{\mathfrak{f}}^2}$$

(dabei läuft die \mathfrak{f}' -Summe wieder über den ganzen \mathfrak{f}' -Raum). In der Summe über die Gitterpunkte s spalten wir den Term „ $s = 1$ “ ab, der dem Proton im Koordinatenursprung entspricht ($x_1 = 0$); durch Vergleich mit (4) folgt

$$\varphi_{[\mathfrak{f}]}(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - \frac{\lambda}{V} \sum_{s=2}^Z e^{-i\mathfrak{f}x_s} \sum_{\mathfrak{f}'} e^{i\mathfrak{f}'x_s} \frac{|g_{\mathfrak{f}'}|^2}{\zeta - \omega_{\mathfrak{f}}^2}$$

(in dieser s -Summe fehlt also der Term $s = 1$). Wir schreiben hierfür abkürzend:

$$\varphi_{[\mathfrak{f}]}(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - \sum_{s=2}^Z e^{-i\mathfrak{f}x_s} \cdot \chi(x_s, \zeta), \quad (18)$$

wo χ die folgende Bedeutung hat:

$$\chi(x, \zeta) = \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathfrak{f}} e^{i\mathfrak{f}x} \frac{|g_{\mathfrak{f}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathfrak{f}}^2}. \quad (19)$$

Im Limes $V = \infty$ (d. h. $Z = \infty$) wird $\chi(x, \zeta)$ mit der durch (9) definierten Funktion $\chi(|x|, \zeta)$ identisch. Setzt man (18) in (17) und (3) ein, so kommt für E :

$$E_Z = - \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \sum_{[\mathfrak{f}]} \log \left\{ \varphi_1(\zeta) - \sum_{s=2}^Z e^{-i\mathfrak{f}x_s} \chi(x_s, \zeta) \right\}. \quad (20)$$

E_Z gibt für das unendliche Kristallgitter den Energieinhalt des Bereichs V an, d.h. E_Z/V ist die Dichte der Volumenergie des Kristalls.

Wir wollen untersuchen, wie E_Z von der Gitterkonstanten a abhängt. Dabei wollen wir das Periodizitätsvolumen V proportional zu a^3 variieren lassen, so dass Z , die Anzahl der Protonen in V , konstant bleibt. Im Limes $a \rightarrow \infty$ ($|\mathbf{r}_s| \rightarrow \infty$ für $s \neq 1$) verschwindet $\chi(\mathbf{r}_s, \zeta)$ (und zwar quasi-exponentiell für nicht-reelle ζ , vgl. (12)); nach (20) wird also (da die Summe über die \mathbf{k} -Punkte in einer Zelle des reziproken Gitters Z Terme enthält):

$$E_Z(\infty) = Z \cdot E_1.$$

Mit zunehmender Gitterkonstante strebt also die Volumenergie gegen die Summe der Selbstenergien der einzelnen Protonen. Für endliches a wird

$$U_Z(a) = E_Z(a) - E_Z(\infty) = -\frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \sum_{[1]} \log \left\{ 1 - \sum_{s=2}^Z e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_s} \frac{\chi(\mathbf{r}_s, \zeta)}{\varphi_1(\zeta)} \right\}. \quad (21)$$

U_Z stellt die potentielle Energie der Kernkräfte pro Volumen V dar.

Sei a zunächst so gross, dass der Logarithmus in (21) nach Potenzen von χ/φ_1 entwickelt werden kann. Der lineare Term dieser Entwicklung gibt keinen Beitrag zu U_Z , da

$$\sum_{[1]} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_s} = 0 \quad \text{für } \mathbf{r}_s \neq 0 \quad (s = 2 \text{ bis } Z).$$

Im quadratischen Term steht der Faktor

$$\sum_{[1]} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_{s'})} = \begin{cases} Z & \text{für } \mathbf{r}_s + \mathbf{r}_{s'} = 0 \pmod{L^1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der grösste Term der Entwicklung lautet also:

$$U_Z = \frac{Z}{2} \sum_{s=2}^Z \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \frac{\chi(\mathbf{r}_s, \zeta) \chi(-\mathbf{r}_s, \zeta)}{[\varphi_1(\zeta)]^2}.$$

Lassen wir nun Z und damit $V = Za^3$ gegen ∞ gehen, so geht $\chi(\mathbf{r}_s, \zeta)$, wie oben bemerkt wurde, in die durch (9) definierte Funktion $\chi(|\mathbf{r}_s|, \zeta)$ über, und damit wird

$$U_Z = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \left[\frac{\chi(|\mathbf{r}_s|, \zeta)}{\varphi_1(\zeta)} \right]^2.$$

¹⁾ „ $\mathbf{x} = 0 \pmod{L}$ “ soll heissen: die Komponenten von \mathbf{x} sind ganze Vielfache von $L = V^{1/3}$.

Andererseits erhielten wir aber für das Potential der Zweikörperkräfte in der gleichen Näherung ($r \gg A^{-1}$; vgl. (10) mit entwickeltem Logarithmus):

$$U_2(r) = \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \left[\frac{\chi(r, \zeta)}{\varphi_1(\zeta)} \right]^2;$$

d. h. es gilt asymptotisch für grosse Z :

$$U_Z = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} U_2(|\mathbf{r}_s|).$$

In dieser Näherung ist also U_Z gleich der potentiellen Energie der Zweikörperkräfte aller Paare pro Volumen V .

Bei weiterer Entwicklung des Logarithmus in (21) treten Terme höherer Ordnung in χ/φ_1 auf, die Mehrkörperkräften entsprechen. Beispielsweise enthält U_Z die folgenden Terme dritter Ordnung:

$$\frac{Z}{3} \sum \frac{\hbar}{4\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \frac{\chi(\mathbf{r}_s, \zeta) \chi(\mathbf{r}_{s'}, \zeta) \chi(\mathbf{r}_{s''}, \zeta)}{[\varphi_1(\zeta)]^3},$$

wo die Summe über alle nicht-verschwindenden Gittervektoren $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_{s'}, \mathbf{r}_{s''}$ zu erstrecken ist, für die

$$\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_{s'} + \mathbf{r}_{s''} = 0 \pmod{L^1}$$

ist. Analog ist der Bau der Terme höherer Ordnung. Die so erhaltene Entwicklung von U_Z nach n -Körperkräften hat also folgendes Aussehen:

$$U_Z = Z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{s_1>1} \sum_{s_2>1} \cdots \sum_{s_n>1} \delta_{s_1 s_2 \cdots s_n} U_n(\mathbf{r}_{s_1}, \mathbf{r}_{s_2}, \cdots, \mathbf{r}_{s_n}) \right\} \quad (22)$$

wo $\delta_{s_1 s_2 \cdots s_n} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathbf{r}_{s_1} + \mathbf{r}_{s_2} + \cdots + \mathbf{r}_{s_n} = 0 \pmod{L^1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Ist die Gitterkonstante a gross gegen die Abschneidelänge A^{-1} , so kann man die n -Körperpotentiale U_n ebenso abschätzen, wie dies oben speziell für U_2 geschah (vgl. die Formeln (11) bis (15)). Man findet:

$$U_n(\mathbf{r}_{s_1}, \mathbf{r}_{s_2}, \cdots, \mathbf{r}_{s_n}) \simeq (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \hbar \mu \frac{1}{\left(\frac{4\pi}{\lambda} + A\right)^n} \cdot \left. \begin{aligned} & \frac{1}{|\mathbf{r}_{s_1}| |\mathbf{r}_{s_2}| \cdots |\mathbf{r}_{s_n}|} H_1^{(1)}(i\mu\{|\mathbf{r}_{s_1}| + |\mathbf{r}_{s_2}| + \cdots + |\mathbf{r}_{s_n}|\}) \\ & \text{(für } a \gg A^{-1}, Z \rightarrow \infty). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

¹⁾ Vgl. die letzte Fussnote.

Ein Term $U_n(\mathbf{r}_{s_1}, \dots, \mathbf{r}_{s_n})$ ist mindestens um einen Faktor der Ordnung $(Aa)^{-1}$ kleiner als $U_{n-1}(\mathbf{r}_{s_1}, \dots, \mathbf{r}_{s_{n-1}})$; andererseits ist aber die Anzahl der n -Körper-Terme in der Summe (22) grösser als diejenige der $(n-1)$ -Körper-Terme. Falls a nicht nur gross gegen A^{-1} , sondern auch gross gegen

$$\mu^{-2/3} \left(\frac{4\pi}{\lambda} + A \right)^{-1/3}$$

ist, so konvergiert die n -Summe (22) rasch, d. h. die Zweikörperkräfte überwiegen stark.

Für den anderen Grenzfall, $a \rightarrow 0$, behaupten wir, dass $E_Z(0)$ verschwindet, d. h. dass für sehr kleine a -Werte gilt:

$$U_Z(a) \cong -E_Z(\infty) = -ZE_1 \quad (\text{für } a \rightarrow 0, Z \rightarrow \infty). \quad (24)$$

Bei der Bindung der Protonen in einem dicht gepackten Kristall wird also gerade deren Selbstenergie frei.

Zum Beweise gehen wir auf die Formel (17) zurück. Um zu einer einfachen Abschätzung von E_Z zu gelangen, wählen wir die Gewichtsfunktion:

$$g_{\mathbf{f}} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } |\mathbf{f}| < B, \\ 0, & \text{wenn } |\mathbf{f}| > B \end{cases} \quad (25)$$

($B \sim A$), d. h. wir schneiden das Impulsspektrum scharf ab. (Man überlegt sich leicht, dass das Ergebnis von der Art der Abschneidung nicht wesentlich abhängt.) Es sei daran erinnert, dass in (17) nur die \mathbf{f} -Punkte innerhalb *einer* Zelle des reziproken Gitters gemeint sind; für diese Zelle, die bisher beliebig wählbar war, nehmen wir jetzt speziell die den Ursprung enthaltende Zelle:

$$-\frac{\pi}{a} \leq \mathbf{f}_i < \frac{\pi}{a}.$$

Nun sei $B < \pi/a$ angenommen (also $a \lesssim A^{-1}$); dann sind in (17) nach (25) alle $g_{\mathbf{f}+b_h} = 0$ für $b_h \neq 0$, d. h. es bleibt in der \sum_h nur (höchstens) *ein* Summenterm stehen:

$$\varphi_{[\mathbf{f}]}(\zeta) = 1 - \frac{\lambda}{a^3} \frac{|g_{\mathbf{f}}|^2}{\zeta - \omega_{\mathbf{f}}^2}.$$

Diese Funktion von ζ hat (bei festem \mathbf{f}) nur *eine* Nullstelle:

$$\zeta = \omega_{\mathbf{f}}^2 + \frac{\lambda |g_{\mathbf{f}}|^2}{a^3} \equiv \Omega_{\mathbf{f}}^2.$$

Die Energie E wird hiermit nach (3) und (17):

$$E_Z(a) = \hbar \sum_{\{\mathbf{k}\}} (\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}) - Z \cdot \frac{\hbar a^3}{2\pi^2} \int_0^B dk \cdot k^2 \left\{ \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \frac{\lambda}{a^3}} - \omega_{\mathbf{k}} \right\} \quad (26)$$

Für $a \ll \lambda^{1/3} (\mu^2 + B^2)^{-1/3}$ wird hieraus:

$$E_Z(a) \cong Z \cdot \frac{1}{6\pi^2} \hbar B^3 \sqrt{\lambda a^3}, \quad (27)$$

und dies geht mit abnehmendem a gegen Null, wie behauptet wurde. Wählt man etwa $\lambda \sim B^{-1} \sim A^{-1}$ und $\mu \lesssim A$, so wird nach (27) $E_Z(a) \ll Z \cdot \hbar A$ für $a \ll A^{-1}$, während nach (8) $E_1 \sim \hbar A$ ist; also:

$$E_Z(a) \ll Z E_1, \quad U_Z(a) \cong -Z E_1 \text{ für } a \ll A^{-1}.$$

Die obigen Rechnungen lassen sich natürlich ebenso leicht für den nicht-kubischen Kristall ausführen. Auch die Übertragung in die Elektronenpaartheorie (Feldteilchen mit Spin $\frac{1}{2}$) dürfte keine Schwierigkeiten machen.

Es erhebt sich nun die Frage, wie weit man hoffen darf, eine solche Paartheorie zur Erklärung der wirklichen Kernkräfte heranziehen zu können. Nach den obigen Ergebnissen für die skalare Paartheorie zu urteilen, scheint diese Möglichkeit zu bestehen, wenn man die Länge, die man gewöhnlich als die *Reichweite der Kernkräfte* interpretiert und die für den *Abstand benachbarter Kernteilchen* massgebend ist, als im wesentlichen *durch die Abschneidelänge A^{-1} bestimmt* betrachtet. Denn diese trennt ja die a -Gebiete voneinander, in denen nach der Theorie die Volumenergie qualitativ durch (22), (23) bzw. durch (24) gegeben ist; im ersteren Falle ($a \gg A^{-1}$) handelt es sich um Zwei- und Mehrkörperkräfte ohne Sättigungscharakter, die mit wachsendem a stark abnehmen, während andererseits für kleine a -Werte nach (24) eine Absättigung eintritt, wobei die Bindungsenergie pro Kernteilchen den Maximalwert E_1 erreicht. Nimmt man an, dass in einem realen Kern die Abhängigkeit der potentiellen Energie von a eine ähnliche ist, wenn unter a der mittlere Abstand benachbarter Kernpartikeln verstanden wird, und dass die kinetische Energie wie üblich aus einem Fermi-Dirac-Gas-Modell abgeschätzt werden darf¹⁾, so ist zu erwarten, dass sich im Grundzustand des Kerns ein Wert von a einstellt, der grössenordnungsmässig von A^{-1} nicht

¹⁾ Vgl. etwa BETHE und BACHER, Rev. of Mod. Phys. **8**, 82, 1936, § 25.

sehr verschieden sein kann, so dass wir mit Rücksicht auf die Erfahrung $A^{-1} \sim 10^{-13}$ cm anzusetzen haben. Dabei hat die potentielle Energie pro Kernteilchen die Grössenordnung E_1 ; wählt man etwa $\lambda \sim A^{-1} (\lesssim \mu^{-1})$, so wird nach (8) $E_1 \sim \hbar A$, also $E_1 \sim 100$ MeV, in Übereinstimmung mit den üblichen Ansätzen für das statistische Kernmodell.

Im Gegensatz zum Abschneideimpuls würde der Masse $\hbar\mu$ der Feldteilchen in einer solchen Theorie nur eine sekundäre Bedeutung zukommen. Beispielsweise könnte man $\hbar\mu$ sehr klein, etwa von der Grössenordnung der Elektronenmasse annehmen, ohne dass dies die Theorie der schweren Kerne qualitativ wesentlich ändern würde. Zwar ist die „Reichweite“ der Zwei- und Mehrkörperkräfte nach Obigem durch μ^{-1} bestimmt, insofern als z. B. $U_2(r)$ für $r \ll \mu^{-1}$ wie r^{-3} variiert, während für $r \gtrsim \mu^{-1}$ ein exponentieller Abfall einsetzt, und dies ist natürlich für Probleme wie die Proton-Proton-Streuung von Wichtigkeit; aber nichtsdestoweniger würde sich in schweren Kernen der Abstand benachbarter Teilchen auf den ungefähren Wert $A^{-1} (\ll \mu^{-1})$ einstellen. Im Gegensatz zur Yukawa'schen Mesontheorie besteht also in der Paartheorie *keine Beziehung zwischen den Kernradien und der Masse der Feldteilchen*; jedenfalls ergibt sich eine solche Beziehung nicht zwangsläufig oder auch nur in zwangloser Weise, und man hat also von diesem Standpunkt aus keinen Grund, einer „Mesonpaartheorie“ vor einer „Elektronpaartheorie“ den Vorzug zu geben. Zwischen diesen Varianten der Paartheorie wird man also nur auf Grund anderweitiger Daten — z. B. aus Streuversuchen — entscheiden können.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

Ein Dreiphasen-Drehfeld-Sender für ultrakurze Wellen

von Walter Dieterle.

(24. XII. 1941.)

Einleitung.

1. Für die Fernsehtechnik haben „Rundstrahler“ Bedeutung erlangt, welche ein Feld abstrahlen, das in der Horizontalebene einen horizontal liegenden elektrischen Feldstärkevektor besitzt^{1) 4) 5)}.

Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Ausbreitungsverhältnisse im UKW-Gebiet für solche Wellen günstiger sind als für Wellen mit vertikal orientiertem elektrischem Feldstärkevektor^{3) 4)}.

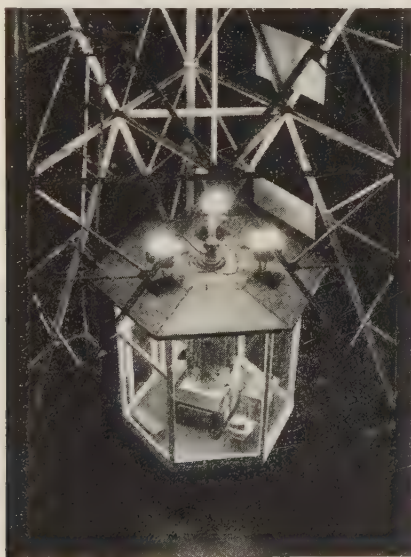


Fig. 1.

Der am Institut für Hochfrequenztechnik der ETH erbaute Drehfeld-Sender an der Schweizerischen Landesausstellung 1939.

Der Sender steht zwischen den 3 Turmfüssen und ist mit dem auf der Turmspitze, 48 m über dem Boden des Ausstellungsgeländes montierten Tripol durch ein Dreiphasen-Hochfrequenzkabel der Kabelwerke Brugg, verbunden. Die Wellenlänge beträgt 6 m.

Der ganz aus Leichtmetall gebaute Turm dient gleichzeitig als $\lambda/4$ -Strahler für den offiziellen Ausstellungs-Sender der SLA.



Fig. 2a.

Der auf der Spitze des Leichtmetall-Antennenturmes, 48 m über dem Boden des Ausstellungsgeländes, montierte Tripol des Drehfeld-Senders. Das Dreiphasen-Hochfrequenzkabel verläuft in dem 18 m langen selbsttragenden Leichtmetallrohr und anschliessend frei in der Turmachse nach unten.

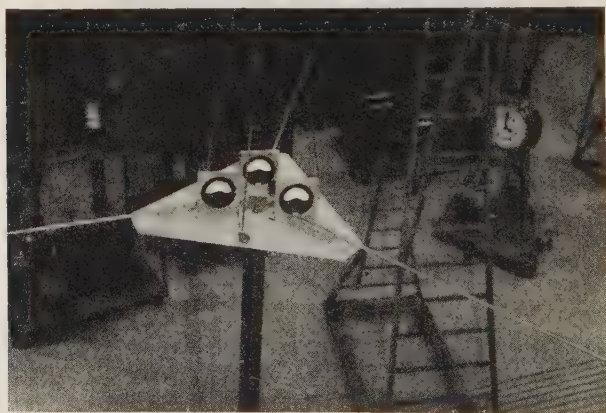


Fig. 2b.

Der über die Drehstromleitung (entsprechend Fig. 12a) gespiesene Tripol, mit welchem im Laboratorium die Messungen entsprechend II., B., b) bis d) durchgeführt wurden.

2. Ein Strahlungsfeld, das die genannten Forderungen erfüllt, kann durch eine horizontal liegende und entsprechend gespiesene Drehfeld-Antenne abgestrahlt werden⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾.

Jede Drehfeld-Antenne (Turnstyle-Antenna) ist äquivalent einem starren rotierenden elektrischen Dipol; die Frequenz der abgestrahlten Wellen ist gleich der Rotationsfrequenz des Dipols.

Praktisch lässt sich eine solche Drehfeld-Antenne in verschiedenen Formen verwirklichen, so z. B. durch zwei horizontal liegende, gekreuzte Dipol-Antennen, deren Ströme mit einer Phasendifferenz von 90° schwingen⁵⁾⁶⁾.

3. Eine weitere Möglichkeit liegt in der Verwendung einer Antenne, welche aus 3 in horizontaler Ebene liegenden Armen besteht, die vom Speisepunkt aus einen Stern bilden. („Tripol“, siehe Fig. 2a und 2b) wobei die Ströme in den einzelnen Armen mit Phasenverschiebungen von 120° gegeneinander schwingen⁷⁾⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾.

4. Die Verwendung einer solchen Tripol-Antenne bedingt eine als Dreiphasenleitung ausgebildete hochfrequente Speiseleitung und einen als Drehstrom-Sender gebauten Hochfrequenzgenerator.

Ein Mittel zur Erzeugung von Dreiphasen-Wechselstrom beliebig hoher Frequenz besteht in der Synchronisierung dreier selbst-erregter Röhrengeneratoren in streng symmetrischer Anordnung¹³⁾.

Diese Synchronisierung lässt sich in einfacher Weise mit grosser Stabilität durchführen, womit ein solcher Dreiphasengenerator hinsichtlich Konstanz der Frequenz und der Phasenverhältnisse dem einfachen Röhrengenerator ebenbürtig ist.

5. In der vorliegenden Arbeit werden die Probleme des Dreiphasen-Hochfrequenz-Senders im Zusammenhange behandelt, wobei im besonderen die praktisch-konstruktiven Gesichtspunkte berücksichtigt werden. Dabei hat sich gezeigt, dass der Dreiphasen-Drehfeld-Sender vom konstruktiven Standpunkte aus als eine konsequente Weiterentwicklung des bekannten Gegentaktsenders aufgefasst werden kann.

Mit dem Bau eines dreiphasigen Rundstrahlers und der Abstrahlung des Drehfeldes sind interessante Fragen konstruktiver und theoretischer Natur verbunden.

Davon seien erwähnt:

a) Die Frage nach einer möglichen Leistungserhöhung: die durch die Röhre einerseits und die Senderfrequenz andererseits begrenzte Sendeleistung der üblichen Senderschaltungen, wobei auch ein Parallelschalten mehrerer Röhren infolge der Erhöhungen der schädlichen Röhrenkapazitäten keine merkliche Steigerung erlaubt, kann bei dem Drehfeld-Sender der nachfolgend genannten Kon-

struktionsart prinzipiell, ohne die unerwünschte Parallelschaltung von Röhren, erzielt werden.

b) Die Eigenschaften von 3 (bzw. n) gekoppelten Kreisen.

c) Die Verstärkung des Drehfeldes, Bündelungsfragen.

d) Die Möglichkeit einer Mehrfachmodulation durch Modulation in jeder Phase, wobei eine weitgehende Entkopplung der drei Modulationsstufen erreicht wird. (Evtl. 3 (bzw. n) mal Vielfachmodulation.)

e) Die Energieleitung für den dreiphasigen Hochfrequenzstrom.

f) Die Antennenprobleme, insbesondere die Kenntnis des Strahlungswiderstandes und der Strahlungsleistung.

g) Die Frage nach dem Einfluss auf die Fading-Erscheinungen:

Durch ein solches Drehfeld werden in der Vertikalen zirkularpolarisierte Wellen emittiert, in der Horizontal-(Tripol-)Ebene ist die Strahlung linear polarisiert, während in den Zwischenlagen ein elliptischer Polarisationszustand besteht.

Die Verschiedenheit des Polarisationszustandes von Raum- und Bodenwelle kann sich durch eine Verminderung der zeitlichen Amplitudenfadings auswirken. (Verschiedene entsprechende Versuche sind schon durchgeführt worden³⁾⁴⁾, doch ist diese Frage noch nicht einwandfrei abgeklärt.)

Demgegenüber kann sich der elliptische Polarisationszustand in allgemeiner Strahlungsrichtung für die Ausbreitung und die Reduktion der selektiven Schwunderscheinungen in günstigem Sinne auswirken³⁾.

ABSCHNITT I:

Theoretischer und konstruktiver Teil.

Bezeichnungen.

1. Phasen: mit arabischen Zahlen, z. B. 1, 2 und 3.

2. Die die *Generatorstufe* des Senders betreffenden Grössen werden durch Anhängen *kleiner* Indices gekennzeichnet, z. B. U_g , U_a , J_g , J_a etc.

3. Die die *Verstärkerstufe* des Senders betreffenden Grössen werden durch Anhängen *grosser* Indices gekennzeichnet, z. B. U_G , U_A , J_G , J_A etc.

4. Im *Dreieck* geschaltete Grössen werden durch den Index Δ gekennzeichnet, z. B. R_Δ .

5. Im *Stern* geschaltete Grössen werden durch den Index Λ gekennzeichnet, z. B. R_Λ .

6. Zeitlich variable Grössen (Momentanwerte) werden mit kleinen lateinischen Buchstaben geschrieben, z. B. u , i etc.

7. Örtlich variable Grössen (z. B. Amplitudenwerte mit entsprechender Angabe des Ortes) werden mit grossen deutschen Buchstaben geschrieben, wobei die Ortsbezeichnung oben rechts des betreffenden Buchstaben gesetzt wird, z. B.

$$x = 0 \quad \mathfrak{U}, \mathfrak{I}^0 \text{ etc.}$$

$$x = l \quad \mathfrak{U}, \mathfrak{I}^l \text{ etc.}$$

Für $x = x$ kann die Ortsbezeichnung weggelassen werden,

$$\text{z. B. } x = x \quad \mathfrak{U}, \mathfrak{I} \text{ etc.}$$

8. Beziehen sich die entsprechenden Grössen auf eine bestimmte Phase *selbst* (Ströme, Widerstände), dann wird diese betr. Phase als Index der betreffenden Grösse gekennzeichnet,

$$\text{z. B. Strom im Leiter 1: } i_1 \text{ bzw. } \mathfrak{I}_1 \text{ etc.}$$

$$\text{Widerstand im Leiter 3: } R_3 \text{ etc.}$$

9. Handelt es sich aber um Grössen, wie z. B. Spannungen, Ableitungen, Kapazitäten und Induktivitäten, deren Grössen sich auf *zwei* Phasen beziehen, dann erhält die betreffende Grösse den Index der fehlenden (dritten) Phase,

$$\text{z. B. Spannung zwischen Leiter 1 und 2: } u_3 \text{ bzw. } \mathfrak{U}_3 \text{ etc.}$$

$$\text{Kapazität zwischen Leiter 1 und 3: } C_2 \text{ etc.}$$

(Umlaufsinn der „positiven“ Zählung von 1—2—3!)

10. Bei vollständiger Symmetrie zwischen allen drei Phasen kann die Bezeichnung einer bestimmten Phase durch ihren Zahlenindex weggelassen werden.

Unter spezieller Berücksichtigung der Leitungs-Theorie werden bezeichnet:

a) Pro Längeneinheit eines Leiters:

$$\text{Der Ohm'sche Widerstand } R_1, R_2 \text{ und } R_3$$

b) Pro Längeneinheit der (Drehstrom-)Leitung:

$$\text{Die Ableitung } A_1, A_2 \text{ und } A_3$$

$$\text{Die Induktivität (Drehinduktivität) . . . } L_1, L_2 \text{ und } L_3$$

$$\text{Die Kapazität (Drehkapazität) } C_1, C_2 \text{ und } C_3$$

c) Die entsprechenden, auf das Doppeldrahtsystem bezogenen Grössen werden durch einen * gekennzeichnet,

$$\text{z. B. also } L^*, R^*, C^* \text{ und } A^*.$$

A: Über die Synchronisierung und Mitnahme bei mehreren gekoppelten selbsterregten Röhrengeneratoren.

Die Erzeugung des hochfrequenten Drehstromes als resultierende Schwingung dreier gekoppelter selbsterregter Schwingungskreise, die auf gleiche oder nahezu gleiche Frequenz abgestimmt sind, so dass sie sich innerhalb des gegenseitigen Synchronisierungs- oder Mitnahmebereiches befinden:

Über die möglichen resultierenden Schwingungszustände, die man bei der gegenseitigen Kopplung von 3 (bzw. n) selbsterregten Kreisen erhält, ist bekannt, dass je nach der Eigenfrequenz und der Kopplung dieser Kreise die folgenden Fälle zu unterscheiden sind:

1. Sind alle Kreise genügend gegeneinander verstimmt, dann ist die gegenseitige Beeinflussung über die Kopplung gering und es wird jeder Kreis nahezu in seiner Eigenfrequenz schwingen.

Anders ist jedoch das Verhalten nahe beim

2. *Resonanzfall*, wo alle Kreise auf die gleiche oder nahezu gleiche Frequenz abgestimmt sind. Hier ist die gegenseitige Beeinflussung sehr stark und das System schwingt *nur noch gesamthaft mit einer bestimmten Eigenfrequenz und gegebener Phasendifferenz* von Kreis zu Kreis¹³).

Bei genauer Einstellung auf Resonanz stellen sich in einem System von 3 (bzw. n) gleichen und in zyklisch vertauschbarer Weise symmetrisch gekoppelten Röhrengeneratoren (Schwingungskreise) gleich grosse Ströme in den einzelnen Phasen und gleich grosse Spannungen zwischen den Phasen ein, wobei die Phasendifferenz zwischen entsprechenden Strömen und Spannungen aufeinanderfolgender Generatoren $\pm 2\pi/3$ (bzw. $\pm 2\pi/n$, $n = \text{Primzahl}$) oder ein ganzzahliges Vielfaches davon, beträgt.

Dieser Zustand ist in einem gewissen Bereiche stabil, d. h. geringe Änderungen in den Generatoren ändern den Schwingungszustand auch nur in geringem Masse. Dabei hängt es aber von den Einzelheiten beim Übergang vom asynchronen in den synchronisierten Zustand ab, ob entweder

a) eine Erregung im Dreiphasen-Typus als Drehstrom mit einer Phasendifferenz von $\pm 2\pi/3$ (bzw. $\pm 2\pi/n$) eintritt oder

b) eine Erregung sich einstellt, wobei alle Generatoren im „Gleichtakt“ schwingen und also die Phasendifferenz = 0 ist.

Schliesslich kann noch

c) eine Schwingung je zweier Kreise *zusammen* gegen den dritten Kreis erfolgen.

Die Möglichkeit des Zustandekommens einer hochfrequenten Schwingungserregung im symmetrischen Dreiphasen-Drehstrom-

Typus wurde dem Bau der Steuerstufe des Drehfeldsenders zugrunde gelegt und experimentell eingehend studiert.

Die drei Gitterkreise der in Huth-Kühn-Schaltung selbst-erregten Röhrengeneratoren wurden in vollständig symmetrischer Weise über kleine, mit grosser Genauigkeit einstellbare Zylinderkondensatoren (mit einer zwischen 0 und 7,5 pF variablen Kapazität) gekoppelt. Mit deren Änderung war eine gleichzeitige geringe Frequenzänderung verbunden.

Durch beidseitig dieser Kondensatoren angebrachte Konus-Stöpsel wurde die Verbindung zu den Gitterkreisen hergestellt, bzw. durch deren Entfernen unterbrochen (s. Fig. 3).

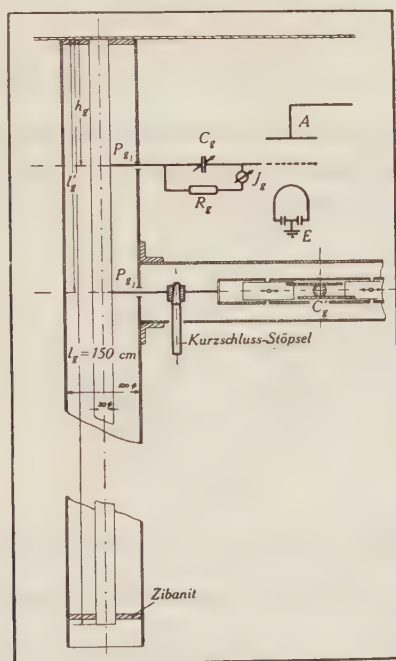


Fig. 3.

Der konstruktive Aufbau und die Kopplung der Gitterkreise. Der Gitterkreis erhielt durch seine mechanisch feste Konstruktion und die vollständige Abschirmung jeglichen Streufeldes eine hohe elektrische Stabilität.

Die durch einen symmetrischen Zylinderkondensator dargestellte Kopplungskapazität C_g' konnte im Bereiche von 0—7,5 pF sehr fein eingestellt werden.

Der Vorgang der Drehstrom-Erregung kann kurz wie folgt beschrieben werden (ausführliche theoretische und messtechnische Betrachtungen siehe¹²⁾¹³⁾).

Der das „Drehen“ bewirkende Synchronisier-Effekt ist ein sogenanntes „Auslöschen“:

Von den an sich möglichen Erregungsarten mit drei verschiedenen Koppelwellen bleibt nur diejenige Erregungsart bestehen, welche der Welle mit der geringsten Eigendämpfung oder dann einer schon vorhandenen Welle entspricht. Die anderen Wellen werden, ähnlich wie beim Zieh-Effekt im Zweikreis-Sender, „ausgelöscht“ oder „totgemacht“ und das System schwingt mit der *einen* Frequenz als Ganzes weiter (s. Fig. 20). Um solche Drehstrom-Schwingungen zu erzeugen, kann es u. U. notwendig sein, die Kreise zuerst gegeneinander etwas zu verstimmen und dann das ganze System in den „Dreh-Zustand“ hineinzuziehen.

Eine exakte Rechnung des Auslöschens erscheint äusserst kompliziert, weshalb die für die vorliegende Arbeit notwendigen Untersuchungen in experimenteller Weise durchgeführt wurden.

B: Zur Theorie der Dreiphasen-Energieleitung.

a) Die allgemeine Differentialgleichung für die dreifache Leitung.

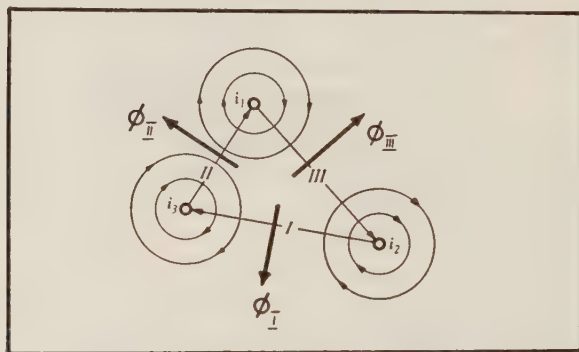


Fig. 4.

Die Ströme i_1 , i_2 und i_3 sind alle in gleichem Sinne nach hinten positiv zu rechnen.

Unter Bezugnahme auf Fig. 4 kann man sofort ablesen:

Es ist: $i_1 L'$ der Fluss durch die Fläche I erzeugt durch i_1

$i_2 L''$ „ „ „ „ „ II „ „ i_2

$i_3 L'''$ „ „ „ „ „ III „ „ i_3

$i_1 L_{12}$ „ „ „ „ „ III „ „ i_1

$i_2 L_{23}$ „ „ „ „ „ I „ „ i_2

$i_3 L_{31}$ „ „ „ „ „ II „ „ i_3

$i_1 L_{13}$ „ „ „ „ „ II „ „ i_1

$i_2 L_{21}$ „ „ „ „ „ III „ „ i_2

$i_3 L_{32}$ „ „ „ „ „ I „ „ i_3

Da der durch einen Strom i_1 (bzw. i_2 oder i_3) erzeugte und durch die Fläche I—II—III gehende Fluss gleich 0 sein muss (s. Fig. 4), wird

$$\begin{aligned} i_1 L' + i_1 L_{12} + i_1 L_{13} &= 0 \\ i_2 L'' + i_2 L_{23} + i_2 L_{21} &= 0 \\ i_3 L''' + i_3 L_{31} + i_3 L_{32} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Ferner gelten noch folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} L_{12} &= -L_{21} \\ L_{23} &= -L_{32} \\ L_{31} &= -L_{13} \end{aligned} \quad (2)$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (3)$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad (4)$$

Gl. (3) und (4) haben für jede Stelle der Leitung Gültigkeit.

Die Theorie der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs paralleler zylindrischer Leiter führt im allgemeinen Fall zu sehr komplizierten Beziehungen und Verhältnissen.

Sie wird nur für die — praktisch wohl allein in Frage kommenden — Fälle einfach, wo alle Leiter in demselben Medium eingebettet sind, die Wellen also homogen und eben werden und eine einheitliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit v

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$$

längs der zylindrischen Leiter besitzen; von besonderem Interesse ist hier wiederum der Spezialfall vollkommener Symmetrie. Dabei wird noch vorausgesetzt, dass in einem Querschnitt der Leitung die Summe der Ladungen und die Summe der Ströme Null sein soll.

Die elektrischen Feldstärkevektoren bilden dann transversale, ebene Felder und lassen sich aus einer elektrostatischen Potentialfunktion herleiten, während das magnetische Feld sich aus einer entsprechenden Stromfunktion ableiten lässt und die magnetischen Kraftlinien die orthogonalen Trajektorien zu den elektrischen Feldstärkelinien bilden. Ist also das elektrische Feld bekannt, so folgt daraus auch zugleich das magnetische Feld. Zwischen den pro Längeneinheit genommenen Induktivitätskoeffizienten und den Kapazitätskoeffizienten bestehen also mathematische Beziehungen¹⁸⁾.

Da das System nicht strahlt, kann man auch von den Kirchhoff'schen Sätzen ausgehen.

Durch die Anwendung des zweiten Satzes auf Fig. 5 erhält man:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial u_1}{\partial x} &= R_3 i_3 - R_2 i_2 + (L_{32} - L') \frac{\partial i_3}{\partial t} + (L_{23} - L') \frac{\partial i_2}{\partial t} \\
 -\frac{\partial u_2}{\partial x} &= R_1 i_1 - R_3 i_3 + (L_{13} - L'') \frac{\partial i_1}{\partial t} + (L_{31} - L'') \frac{\partial i_3}{\partial t} \\
 -\frac{\partial u_3}{\partial x} &= R_2 i_2 - R_1 i_1 + (L_{21} - L''') \frac{\partial i_2}{\partial t} + (L_{12} - L''') \frac{\partial i_1}{\partial t}
 \end{aligned} \quad (5)$$

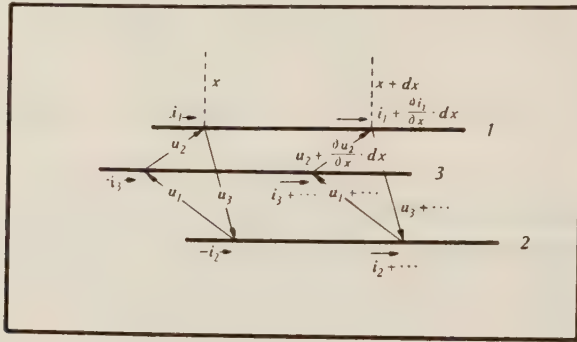


Fig. 5.

Die zur Aufstellung der Differentialgleichungen der allgemeinen Dreiphasen-Leitung notwendigen Bezeichnungen.

Da $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ist, gilt auch

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0$$

und nach Zuziehung der Gl. (1) und (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 -(L_{32} - L') &= (L_{31} - L'') = L_3 \\
 -(L_{13} - L'') &= (L_{12} - L''') = L_1 \\
 -(L_{21} - L''') &= (L_{23} - L') = L_2
 \end{aligned} \quad (6)$$

und die Gl. (5) kann geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial u_1}{\partial x} &= R_3 i_3 - R_2 i_2 + L_3 \frac{\partial i_3}{\partial t} - L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} \\
 -\frac{\partial u_2}{\partial x} &= R_1 i_1 - R_3 i_3 + L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} - L_3 \frac{\partial i_3}{\partial t} \\
 -\frac{\partial u_3}{\partial x} &= R_2 i_2 - R_1 i_1 + L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t}
 \end{aligned} \quad (7)$$

Die Anwendung des ersten Satzes von KIRCHHOFF auf Fig. 5 ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= A_3 u_3 - A_2 u_2 + C_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} - C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ -\frac{\partial i_2}{\partial x} &= A_1 u_1 - A_3 u_3 + C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - C_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} \\ -\frac{\partial i_3}{\partial x} &= A_2 u_2 - A_1 u_1 + C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

Diese beiden Gl. (7) und (8) stellen die allgemeinsten Differentialgleichungen für sämtliche Vorgänge auf der dreifachen Leitung allgemeinsten Art dar.

Für einen stationären Schwingungszustand kann man unter Einführung der Amplitudenwerte für Strom und Spannung schreiben:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \mathfrak{U}_1 \cdot e^{j\omega t} \\ u_2 &= \mathfrak{U}_2 \cdot e^{j\omega t} \\ u_3 &= \mathfrak{U}_3 \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(x); \quad \left. \begin{aligned} i_1 &= \mathfrak{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \\ i_2 &= \mathfrak{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \\ i_3 &= \mathfrak{I}_3 \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \mathfrak{I} = \mathfrak{I}(x)$$

Indem man Gl. (7) nochmals nach x ableitet und unter Verwendung der Gl. (8) erhält man 3 Gleichungen von der folgenden Form:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathfrak{U}_1}{\partial x^2} &= K_{11} \mathfrak{U}_1 + K_{12} \mathfrak{U}_2 + K_{13} \mathfrak{U}_3 \\ -\frac{\partial^2 \mathfrak{U}_2}{\partial x^2} &= K_{21} \mathfrak{U}_1 + K_{22} \mathfrak{U}_2 + K_{23} \mathfrak{U}_3 \\ -\frac{\partial^2 \mathfrak{U}_3}{\partial x^2} &= K_{31} \mathfrak{U}_1 + K_{32} \mathfrak{U}_2 + K_{33} \mathfrak{U}_3 \end{aligned} \quad (9)$$

wobei die Konstanten K als Abkürzungen für folgende Ausdrücke eingeführt wurden:

$$\begin{aligned} K_{11} &= -(A_1 + j\omega C_1) \cdot \{R_2 + R_3 + j\omega(L_2 + L_3)\} \\ K_{22} &= -(A_2 + j\omega C_2) \cdot \{R_3 + R_1 + j\omega(L_3 + L_1)\} \\ K_{33} &= -(A_3 + j\omega C_3) \cdot \{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)\} \\ K_{12} &= (A_2 + j\omega C_2) \cdot (R_3 + j\omega L_3) \\ K_{23} &= (A_3 + j\omega C_3) \cdot (R_1 + j\omega L_1) \\ K_{31} &= (A_1 + j\omega C_1) \cdot (R_2 + j\omega L_2) \\ K_{21} &= (A_1 + j\omega C_1) \cdot (R_3 + j\omega L_3) \\ K_{32} &= (A_2 + j\omega C_2) \cdot (R_1 + j\omega L_1) \\ K_{13} &= (A_3 + j\omega C_3) \cdot (R_2 + j\omega L_2) \end{aligned} \quad (10)$$

Da auch $(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3) = 0$ ist, gilt ferner folgende Beziehung für die Konstanten K_h :

$$\begin{aligned} K_{11} + K_{21} + K_{31} &= 0 \\ K_{12} + K_{22} + K_{32} &= 0 \\ K_{13} + K_{23} + K_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

b) Die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung.

Das System der Differentialgleichungen (9) kann durch folgenden Ansatz gelöst werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= \mathfrak{A}_1 \cdot e^{\gamma \cdot x} \\ \mathfrak{U}_2 &= \mathfrak{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x} \\ \mathfrak{U}_3 &= \mathfrak{A}_3 \cdot e^{\gamma \cdot x} \end{aligned} \quad (12)$$

womit man

$$\begin{aligned} a(K_{11} + \gamma^2) + b \cdot K_{12} + c \cdot K_{13} &= 0 \\ a \cdot K_{21} + b(K_{22} + \gamma^2) + c \cdot K_{23} &= 0 \\ a \cdot K_{31} + b \cdot K_{32} + c(K_{33} + \gamma^2) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

erhält. Die entsprechende Determinante muss gleich Null sein:

$$\begin{vmatrix} (-K_{21} - K_{31} + \gamma^2) & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & (-K_{32} - K_{12} + \gamma^2) & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & (-K_{13} - K_{23} + \gamma^2) \end{vmatrix} = 0$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\gamma^2 \left\{ \begin{aligned} &\gamma^4 - \gamma^2 (K_{12} + K_{21} + K_{23} + K_{32} + K_{31} + K_{13}) + (K_{12} \cdot K_{13} \\ &+ K_{12} \cdot K_{23} + K_{12} \cdot K_{31} + K_{32} \cdot K_{31} + K_{21} \cdot K_{31} + \\ &K_{21} \cdot K_{23} + K_{13} \cdot K_{32} + K_{31} \cdot K_{23}) \end{aligned} \right\} = 0$$

Daraus folgt ein Wert $\gamma = 0$, ferner noch zwei verschiedene Werte für γ^2 . Wenn aber längs des Dreileitersystems eine *ebene* Welle sich fortpflanzen soll (vgl. auch S. 135), so darf *nur eine* Lösung für γ existieren. Es muss dann infolge der Beziehungen zwischen den K (die Kapazitäts- und Induktivitätsgrößen sind nicht unabhängig voneinander) die Diskriminante der quadratischen Gleichung für γ^2 verschwinden und es bleibt

$$\gamma^2 = -1/2 \cdot (K_{11} + K_{22} + K_{33}) \quad (14)$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= \mathfrak{A}_1 \cdot e^{\gamma \cdot x} + \mathfrak{B}_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} \\ \mathfrak{U}_2 &= \mathfrak{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x} + \mathfrak{B}_2 \cdot e^{-\gamma \cdot x} \\ \mathfrak{U}_3 &= \mathfrak{A}_3 \cdot e^{\gamma \cdot x} + \mathfrak{B}_3 \cdot e^{-\gamma \cdot x} \end{aligned} \quad (15)$$

Die Koeffizienten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Die Behandlung des allgemeinsten Falles ist sehr kompliziert und ist kaum von technischem Interesse.

Ausgehend von der allgemeinsten Differentialgleichung der dreifachen Leitung lassen sich sämtliche Drehstromleitungen als Spezialfälle ableiten. Der wichtigste Fall ist der vollkommener Symmetrie, der im Folgenden behandelt werden soll.

c) Die vollständig symmetrische Dreiphasen-Leitung.

Durch die Symmetrie treten folgende Vereinfachungen auf:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R \\ C_1 &= C_2 = C_3 = C \\ A_1 &= A_2 = A_3 = A \\ L_1 &= L_2 = L_3 = L \\ L' &= L'' = L''' = 0 \\ L_{12} &= L_{23} = L_{31} = L \\ L_{13} &= L_{21} = L_{32} = -L \\ K_{11} &= K_{22} = K_{33} = -2K \\ K_{12} &= K_{23} = K_{31} = K \\ K_{21} &= K_{32} = K_{13} = K \end{aligned}$$

worin $K = (R + j\omega L) \cdot (A + j\omega C)$ wird.

Mit Gl. (4) kann man nun sofort die folgende spezielle Differentialgleichung anschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_1}{\partial x^2} &= 3 K \mathfrak{U}_1 \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_2}{\partial x^2} &= 3 K \mathfrak{U}_2 \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_3}{\partial x^2} &= 3 K \mathfrak{U}_3 \end{aligned} \tag{16}$$

woraus man

$$\gamma^2 = 3 K \tag{17}$$

erhält, was man andererseits auch durch Einführung der genannten Symmetriebedingungen in Gl. (14) ersieht.

Wir machen nun den für Drehstrom speziellen Ansatz:

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_1 &= \mathfrak{U} \\ \mathfrak{U}_2 &= \sigma \cdot \mathfrak{U} \\ \mathfrak{U}_3 &= \sigma^2 \cdot \mathfrak{U}\end{aligned}\quad (18)$$

Darin bedeuten

$$\sigma = e^{j \frac{2\pi}{3}} \quad \text{und} \quad \sigma^2 = e^{j \frac{4\pi}{3}}$$

Zudem gilt noch

$$(1 + \sigma + \sigma^2) = 0 \quad (19)$$

womit die drei folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_1 &= \mathfrak{A} \cdot e^{\gamma \cdot x} + \mathfrak{B} \cdot e^{-\gamma \cdot x} \\ \mathfrak{U}_2 &= (\mathfrak{A} \cdot e^{\gamma \cdot x} + \mathfrak{B} \cdot e^{-\gamma \cdot x}) \cdot \sigma \\ \mathfrak{U}_3 &= (\mathfrak{A} \cdot e^{\gamma \cdot x} + \mathfrak{B} \cdot e^{-\gamma \cdot x}) \cdot \sigma^2\end{aligned}\quad (20)$$

Wenn man die folgenden Abkürzungen einführt

$$\begin{aligned}A_1 + j \omega C_1 &= B_1 \\ A_2 + j \omega C_2 &= B_2 \\ A_3 + j \omega C_3 &= B_3\end{aligned}\quad (21)$$

erhält man aus Gl. (8)

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x} &= B_3 \cdot \mathfrak{U}_3 - B_2 \cdot \mathfrak{U}_2 \\ -\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial x} &= B_1 \cdot \mathfrak{U}_1 - B_3 \cdot \mathfrak{U}_3 \\ -\frac{\partial \mathfrak{F}_3}{\partial x} &= B_2 \cdot \mathfrak{U}_2 - B_1 \cdot \mathfrak{U}_1\end{aligned}\quad (22)$$

Nun machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{\sigma(1-\sigma)}{\gamma} \cdot B = \frac{1}{j \cdot Z} \quad \text{oder} \quad Z = \sqrt{\frac{R + j \omega L}{A + j \omega C}} \quad (23)$$

Damit wird dann

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1 &= \frac{1}{j} \left\{ -\frac{\mathfrak{A}}{Z} \cdot e^{\gamma \cdot x} + \frac{\mathfrak{B}}{Z} \cdot e^{-\gamma \cdot x} \right\} \\ \mathfrak{F}_2 &= \frac{1}{j} \left\{ -\frac{\mathfrak{A}}{Z} \cdot e^{\gamma \cdot x} + \frac{\mathfrak{B}}{Z} \cdot e^{-\gamma \cdot x} \right\} \cdot \sigma \\ \mathfrak{F}_3 &= \frac{1}{j} \left\{ -\frac{\mathfrak{A}}{Z} \cdot e^{\gamma \cdot x} + \frac{\mathfrak{B}}{Z} \cdot e^{-\gamma \cdot x} \right\} \cdot \sigma^2\end{aligned}\quad (24)$$

Nun können wir die Anfangs- und Randbedingungen einführen:

$$x = 0: \mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \text{ und } \mathfrak{U}_1^0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{U}_2^0 = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot \sigma$$

$$\mathfrak{U}_3^0 = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot \sigma^2$$

$x = l$: Die Leitung sei an dieser Stelle durch gleich grosse, entweder im *Dreieck* oder im *Stern* geschaltete Widerstände abgeschlossen (s. Fig. 6 bzw. 7).

α) Die Abschlusswiderstände \mathfrak{R}_Δ^l in Dreieckschaltung.

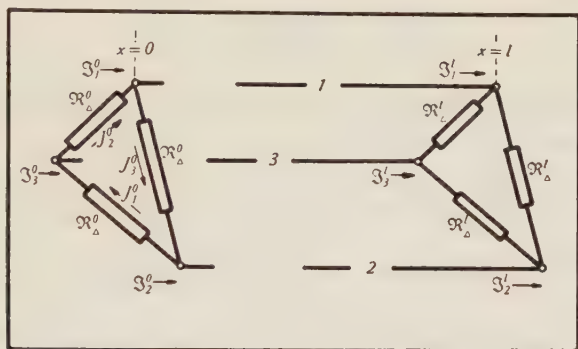


Fig. 6.

Die symmetrische, im Dreieck beliebig belastete Drehstromleitung. (Der Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ der Wechselstromgrößen wurde der Einfachheit halber weglassen.)

Für die Bezeichnungen der Fig. 6 gilt dann:

$$J_1^l = \frac{\mathfrak{J}_2^l - \mathfrak{J}_3^l}{3}$$

$$J_2^l = \frac{\mathfrak{J}_3^l - \mathfrak{J}_1^l}{3}$$

$$J_3^l = \frac{\mathfrak{J}_1^l - \mathfrak{J}_2^l}{3}$$

Damit wird für $x = l$:

$$\mathfrak{R}_\Delta^l = \frac{\mathfrak{U}_1^l}{J_1^l} = j \cdot \frac{3 (\mathfrak{A} \cdot e^{\gamma \cdot l} + \mathfrak{B} \cdot e^{-\gamma \cdot l})}{(\sigma - \sigma^2) (-\mathfrak{A} e^{\gamma \cdot l} + \mathfrak{B} \cdot e^{-\gamma \cdot l})} \cdot Z;$$

indem man $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ einführt und $\sigma - \sigma^2 = j\sqrt{3}$ setzt, wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_\Delta &= \frac{\mathfrak{U}^0 (\mathfrak{R}_\Delta^l - \sqrt{3} \cdot Z) e^{-\gamma \cdot l}}{(e^{\gamma \cdot l} + e^{-\gamma \cdot l}) \mathfrak{R}_\Delta^l + \sqrt{3} \cdot Z (e^{\gamma \cdot l} - e^{-\gamma \cdot l})}; \\ \mathfrak{B}_\Delta &= \frac{\mathfrak{U}^0 (\mathfrak{R}_\Delta^l + \sqrt{3} \cdot Z) e^{\gamma \cdot l}}{(e^{\gamma \cdot l} + e^{-\gamma \cdot l}) \mathfrak{R}_\Delta^l + \sqrt{3} \cdot Z (e^{\gamma \cdot l} - e^{-\gamma \cdot l})};\end{aligned}\quad (25)$$

womit für jeden Fall der symmetrischen dreifachen Leitung Strom- und Spannungsverteilung bekannt sind.

Nun fragen wir nach dem *Ersatzwiderstand* \mathfrak{R}_Δ^0 der Leitung; d. h. es ist an der Stelle $x = 0$ die mit dem Widerstand \mathfrak{R}^l in Dreieckschaltung abgeschlossene Leitung von der Länge l durch ebenfalls in Dreieck geschaltete Widerstände \mathfrak{R}_Δ^0 zu ersetzen (s. Fig. 6).

Es wird

$$\mathfrak{R}_\Delta^0 = \frac{\sqrt{3} \cdot \mathfrak{U}^0}{(-\mathfrak{A} + \mathfrak{B})} \cdot Z$$

was sich nach Einführung der Ausdrücke von Gl. (25) für \mathfrak{A}_Δ und \mathfrak{B}_Δ wie folgt schreiben lässt:

$$\mathfrak{R}_\Delta^0 = \frac{\mathfrak{R}_\Delta^l (e^{\gamma \cdot l} + e^{-\gamma \cdot l}) + \sqrt{3} \cdot Z (e^{\gamma \cdot l} - e^{-\gamma \cdot l})}{\sqrt{3} \cdot Z (e^{\gamma \cdot l} + e^{-\gamma \cdot l}) + \mathfrak{R}_\Delta^l (e^{\gamma \cdot l} - e^{-\gamma \cdot l})} \sqrt{3} \cdot Z. \quad (26)$$

Durch Einführung der folgenden Abkürzung

$$\sqrt{3} \cdot Z = Z_\Delta$$

d. h. also die Einführung eines neuen Wellenwiderstandes für die dreifache Leitung (in Dreieckschaltung) lauten die erhaltenen Gleichungen analog denen des Paralleldraht-Systems:

$$\mathfrak{R}_\Delta^0 = \frac{\mathfrak{R}_\Delta^l + th(\gamma \cdot l) \cdot Z_\Delta}{\mathfrak{R}_\Delta^l \cdot th(\gamma \cdot l) + Z_\Delta} \cdot Z_\Delta. \quad (27)$$

Für die verlustfreie Leitung ($R = 0$, $A = 0$) kann man schreiben:

$$Z \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ und } Z_\Delta \cong \sqrt{\frac{3L}{C}}; \gamma^2 = 3K \cong -3\omega^2 L \cdot C$$

und man erhält (nach einer Zwischenrechnung über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen längs der Drähte) den Ausdruck für \mathfrak{R}_Δ^0 in folgender Form:

$$\mathfrak{R}_\Delta^0 = \frac{\mathfrak{R}_\Delta^l + j \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{3L}{C}}}{j \mathfrak{R}_\Delta^l \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) + \sqrt{\frac{3L}{C}}} \cdot \sqrt{\frac{3L}{C}}. \quad (28)$$

Spezialfälle.

Von besonderem Interesse ist die Kenntnis von \Re_{Δ}^0 bei folgenden Werten des Abschlusswiderstandes:

$$\alpha_1) \Re_{\Delta}' = 0: \text{Kurzschluss der Leitung.}$$

Somit wird

$$\Re_{\Delta}^0 = j \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right) \sqrt{\frac{3L}{C}}, \quad (29)$$

d. h. es bilden sich stehende Wellen aus.

$$\alpha_2) \Re_{\Delta}' = \infty: \text{Leerlauf der Leitung.}$$

Somit wird

$$\Re_{\Delta}^0 = -j \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right) \sqrt{\frac{3L}{C}}, \quad (30)$$

d. h. auch in diesem Fall treten stehende Wellen auf.

$$\alpha_3) \Re_{\Delta}' = Z_{\Delta}.$$

Dann wird

$$\Re_{\Delta}^0 = \Re_{\Delta}^x = Z_{\Delta} \quad (31)$$

d. h. die Wellen auf der Leitung sind nur *fortlaufende Wellen*. Dies ist der Fall der *Anpassung*.

Diese hier erhaltenen Resultate unterscheiden sich von denen des Doppeldraht-Systems nur durch die Werte des Wellenwiderstandes, wobei hier (immer bei Voraussetzung verlustfreier Leitung)

$$Z_{\Delta} = \sqrt{\frac{3L}{C}} \text{ an Stelle von } Z^* = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$$

zu setzen ist.

$\beta)$ Die Abschlusswiderstände \Re_{Δ}' in Sternschaltung.

Für die Bezeichnungen der Fig. 7 gilt dann:

$$U_1 = \frac{\mathfrak{U}_1}{j \sqrt{3}}$$

$$U_2 = \frac{\mathfrak{U}_2}{j \sqrt{3}}$$

$$U_3 = \frac{\mathfrak{U}_3}{j \sqrt{3}}$$

und damit wird für $x = l$:

$$\mathfrak{R}_{\lambda}^l = \frac{1}{j \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\mathfrak{U}^l}{\mathfrak{I}_1^l} = \frac{\mathfrak{A} \cdot e^{\gamma \cdot l} + \mathfrak{B} \cdot e^{-\gamma \cdot l}}{-\mathfrak{A} \cdot e^{\gamma \cdot l} + \mathfrak{B} \cdot e^{-\gamma \cdot l}} \cdot \frac{Z}{\sqrt{3}};$$

indem man $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{A}_{\lambda} + \mathfrak{B}_{\lambda}$ einführt, wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\lambda} &= \frac{\mathfrak{U}^0 \left(\mathfrak{R}_{\lambda}^l - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z \right) \cdot e^{-\gamma \cdot l}}{\mathfrak{R}_{\lambda}^l (e^{\gamma \cdot l} + e^{-\gamma \cdot l}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z (e^{-\gamma \cdot l} - e^{-\gamma \cdot l})}; \\ \mathfrak{B}_{\lambda} &= \frac{\mathfrak{U}^0 \left(\mathfrak{R}_{\lambda}^l + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z \right) e^{\gamma \cdot l}}{\mathfrak{R}_{\lambda}^l (e^{\gamma \cdot l} + e^{-\gamma \cdot l}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z (e^{-\gamma \cdot l} - e^{-\gamma \cdot l})}; \end{aligned} \quad (32)$$

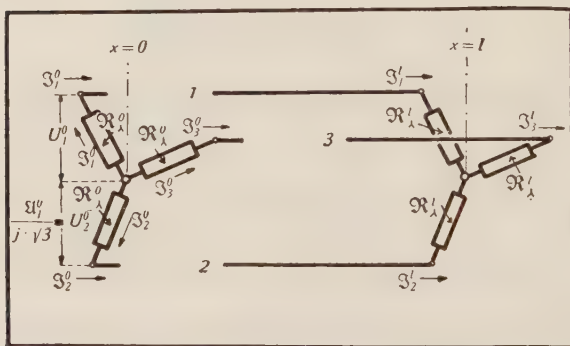


Fig. 7.

Die symmetrische, in Sternschaltung beliebig belastete Drehstromleitung. (Der Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ der Wechselstromgrößen wurde der Einfachheit wegen weggelassen.)

Nun bestimmen wir den *Ersatzwiderstand* \mathfrak{R}_{λ}^0 der Leitung, d. h.: die an der Stelle $x = l$ mit den in Stern geschalteten Widerständen \mathfrak{R}_{λ}^l abgeschlossene Leitung soll an der Stelle $x = 0$ durch ebenfalls in Stern geschaltete Widerstände \mathfrak{R}_{λ}^0 ersetzt werden.

Damit wird

$$\mathfrak{R}_{\lambda}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z \cdot \frac{\mathfrak{U}^0}{(-\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}$$

und nach Einsetzen der Ausdrücke von Gl. (32) erhält man

$$\mathfrak{R}_{\lambda}^0 = \frac{\mathfrak{R}_{\lambda}^l (e^{\gamma \cdot l} + e^{-\gamma \cdot l}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z (e^{\gamma \cdot l} - e^{-\gamma \cdot l})}{\mathfrak{R}_{\lambda}^l (e^{\gamma \cdot l} - e^{-\gamma \cdot l}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z (e^{\gamma \cdot l} + e^{-\gamma \cdot l})} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z. \quad (33)$$

Durch die Einführung der Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot Z = Z_{\lambda},$$

d. h. also die Einführung eines neuen Wellenwiderstandes für die dreifache Leitung (in Sternschaltung) lauten dann die Gleichungen ebenfalls analog denen des Doppeldraht-Systems:

$$\Re_{\lambda}^0 = \frac{\Re_{\lambda}^l + \operatorname{th}(\gamma \cdot l) \cdot Z_{\lambda}}{\Re_{\lambda}^l \cdot \operatorname{th}(\gamma \cdot l) + Z_{\lambda}} \cdot Z_{\lambda} \quad (34)$$

worin also, unter Voraussetzung einer verlustfreien Leitung,

$$Z = \sqrt{\frac{L}{3C}}$$

ist. Damit lässt sich Gl. (34) analog Gl. (28) in folgender Form schreiben:

$$\Re_{\lambda}^0 = \frac{\Re_{\lambda}^l + j \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{L}{3C}}}{j \cdot \Re_{\lambda}^l \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) + \sqrt{\frac{L}{3C}}} \cdot \sqrt{\frac{L}{3C}} \quad (35)$$

Spezialfälle.

Von besonderem Interesse ist die Kenntnis von \Re_{λ}^0 bei folgenden Werten des Abschlusswiderstandes:

$\beta_1) \Re_{\lambda}^l = 0$: Kurzschluss der Leitung

$$\Re_{\lambda}^0 = j \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{L}{3C}}; \quad (36)$$

$\beta_2) \Re_{\lambda}^l = \infty$: Leerlauf der Leitung

$$\Re_{\lambda}^0 = -j \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{L}{3C}}; \quad (37)$$

$\beta_3) \Re_{\lambda}^l = Z_{\lambda}$:

Dann wird

$$\Re_{\lambda}^0 = \Re_{\lambda}^x = Z_{\lambda} \quad (38)$$

d. h., die gesamte Energie läuft in Form von *fortlaufenden Wellen* in den Verbraucher; dies ist der Fall der *Anpassung*.

Man erkennt auch hier eine weitgehende Analogie zwischen den hier erhaltenen Resultaten und den vom Doppeldraht-System be-

kannten Gleichungen, wobei (unter Voraussetzung verlustfreier Leitung)

$$Z = \sqrt{\frac{L}{3C}} \quad \text{an Stelle von} \quad Z^* = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$$

zu setzen ist.

γ) Das ebene Dreileiter-System als Spezialfall der dreifachen Leitung.

Mit Fig. 8 lassen sich folgende vereinfachende Bedingungen anschreiben:

$$\begin{aligned} i_1 &= -i_3 = i; & u_1 &= -u_3 = \frac{1}{2}u \\ i_2 &= 0 & u_2 &= u \end{aligned}$$

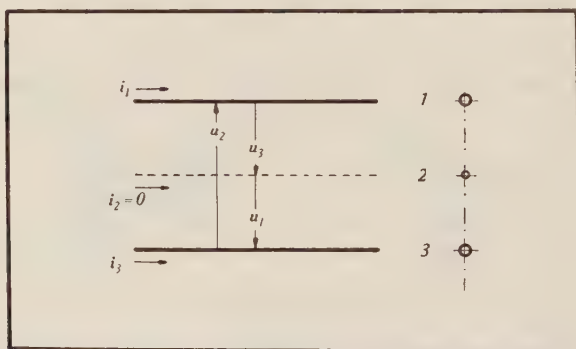


Fig. 8.

Das Paralleldraht-(Lecher-)System kann als Spezialfall der allgemeinen Dreiphasenleitung aufgefasst werden. Indem man die Leitungskonstanten so definiert, wie es beim Doppeldrahtsystem üblich ist, erhält man dieselben Ausgangs-Differentialgleichungen.

Um die Analogie mit den bekannten Gleichungen des Lecher-systems zu erhalten, haben wir daher zu setzen:

$$R_1 = R_3 = R = \frac{1}{2} R^*$$

$$A_1 = A_3 = A = A^*$$

$$A_2 = \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} A^*$$

$$C_1 = C_3 = 2 C = 2 C^*$$

$$C_2 = C = C^*$$

$$L_1 = L_3 = L = \frac{1}{2} L^*$$

$$L_2 = 2 L = L^*$$

wobei also der * die entsprechenden Grössen des Doppeldraht-systems kennzeichnen soll.

Dann erhält man aus Gl. (7):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{R^*}{2} \cdot i - \frac{L^*}{2} \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial u_2}{\partial x} &= R^* \cdot i + L^* \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial u_3}{\partial x} &= -\frac{R^*}{2} \cdot i - \frac{L^*}{2} \frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned} \quad (39)$$

oder

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R^* \cdot i + L^* \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ \text{und} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= A^* \cdot u + C^* \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (40)$$

womit die bekannten Gleichungen des Doppeldraht-Systems erhalten sind.

d) Der Dreiphasen-Anodenkreis.

Dieser wird, entsprechend der symmetrischen dreifachen Leitung, durch drei parallele Rohre gebildet (s. Fig. 10), so dass dessen Konstruktion und Berechnung auf Grund der gewonnenen Resultate durchgeführt werden kann.

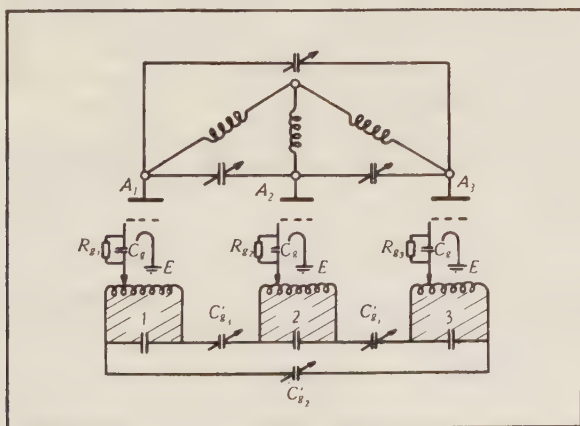


Fig. 9.

Das Ersatzschema des Drehfeld-Generators. Da der „Dreiphasen-Drehzustand“ bereits durch die Kopplung der drei Gitterkreise zustandekommt, kann im Anodenkreis *prinzipiell* eine symmetrische oder Drehstrom-Schaltung eingeführt werden.

Die Einhaltung einer strengen Symmetrie der drei Phasen unter sich und besonders in ihrem Aufbau gegen Erde war Voraussetzung zur Erzielung von einwandfreien Betriebsverhältnissen.

Durch diese Forderung war aber auch die Form der Ausführung des Senders festgelegt, so dass sämtliche Konstruktionselemente um *eine* Symmetrieachse angeordnet werden mussten und in der praktischen Ausführung das Sendergehäuse als Säule über einer regelmässigen 6-eckigen Grundfläche aufgebaut wurde (s. Fig. 1).

Die Gitterkreise und das Dreiphasen-Anodensystem konnten so ineinandergebaut werden (eine gegenseitige Beeinflussung war durch die abschirmende Wirkung der äusseren Rohre der Gitterkreise verunmöglicht), dass der Kurzschlusspunkt der äusseren Gitterkreise nach oben, der des inneren Dreiphasen-Anodenkreises (die verschiebbare Kurzschlussbrücke K_a) nach unten zu liegen kam. Dadurch konnte eine starre Konstruktion bei relativ kleinen Abmessungen des Drehfeldgenerators erzielt werden (s. Fig. 15).

Berechnung des Anodenkreises.

α) Ohne Berücksichtigung der angekoppelten Verstärkerstufe.

Der Dreiphasen-Anodenkreis von Fig. 10a kann durch sein Ersatzschema entsprechend Fig. 10b dargestellt werden.

Wenn dabei die Induktivitäten L_I bis L_{III} und die Röhrenkapazität zwischen Anode und Kathode, $C_{R(A-K)}$, bekannt sind, dann ist die Eigenfrequenz des Kreises bestimmt.

Eine Abstimmung kann durch Verändern der Länge l_a der Rohre erfolgen, was im Ersatzschaltbild einer Änderung von L_I gleichkommt.

Die Induktivitäten L_I bis L_{III} :

α_1) L_I : Die Leitung von der Länge x ($x \equiv l_a$) kann durch ihren Ersatzwiderstand $\Re_{1\Delta}$ dargestellt werden:

Es ist nach (29)

$$\Re_{1\Delta} = j \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{3};$$

Der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{L}{C}}$$

wird mit den der Konstruktion zugrundegelegten Massen ($D = 80 \text{ m/m}$, $d = 26 \text{ m/m}$)

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = Z_1 = \frac{276}{\sqrt{2}} \cdot \log \frac{D}{d} = 150 \text{ Ohm (Formel s. (15), S. 28)}$$

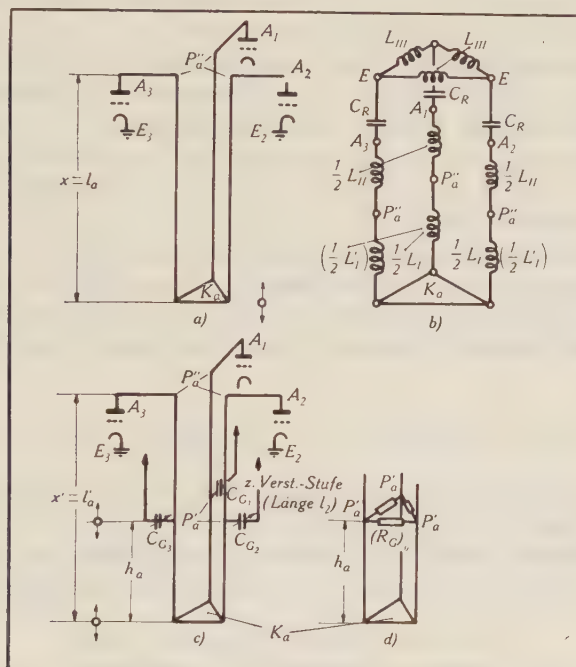


Fig. 10.

Die Abstimmung des Anodenkreises erfolgt durch Änderung der Länge l_a bzw. l_a' des Parallelrohr-Systems.

Durch die Ankopplung einer symmetrischen Belastung zwischen den Punkten P'_a des Anodenkreises wird dieser verstimmt, wonach der Kreis durch Verändern seiner Länge (was durch eine Verschiebung der Kurzschlussbrücke K_a erfolgt) wieder nachgestimmt werden muss.

Die Belastung durch die Verstärkerstufe (Kapazität C_{G-K} und Gitterstrom J_G) kann durch einen Dämpfungswiderstand (\mathfrak{R}_G)₀ ersetzt werden. Für die Schaltung nach β oder 10c) gilt das Ersatzschema 10h), doch ist an Stelle von L_I $L_{I'}$ zu setzen. Das zentrale, an Erde liegende Rohr wurde in der Zeichnung der Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

Da die Länge l_a der Rohre kleiner als $\lambda/4$ ist, so ist der Ersatzwiderstand $\mathfrak{R}_{1\Delta}$ ein rein induktiver und man kann

$$j \cdot \mathfrak{R}_{1\Delta} = j \omega L_I$$

setzen und erhält

$$L_I = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{150}{2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2 \pi x}{\lambda} \right) = L_I(x)$$

und damit die gesuchte Bedingung für Abstimmung, wenn man noch die Resonanzbedingung des ganzen Kreises einführt.

Dazu ist aber noch die Kenntnis der

α_2) Induktivitäten L_{II} und L_{III} notwendig. Die Induktivität $\frac{1}{2} L_{II}$ wird gebildet durch die Zuleitungen vom Anodensystem zur Röhre und die inneren Verbindungen der Röhre selbst. Die Induktivität L_{III} wird gebildet durch die Kathoden der Röhren und deren Verbindung untereinander (Rückleitung über die Erde ist zu berücksichtigen).

Die Rechnung wird am besten für die Summe ($L_{II} + L_{III}$) dieser Induktivitäten durchgeführt, wofür man sich ein Rechteck, z. B. $E_2-A_2-P_a''-P_a''-A_3-E_3-E_2$ (s. Fig. 10, b)) bilden kann.

Nach¹⁴⁾ lautet die Formel für die Induktivität einer Rechteckschleife:

$$L_{R \text{ (cm)}} = 4 \cdot \left\{ a \cdot \lg \frac{2ab}{r(a+p)} + b \cdot \lg \frac{2ab}{r(b+p)} - 2(a+b-p) \right\}$$

worin a und b die Rechteckseiten, $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ und r den Drahtradius in (cm) bedeuten.

Werden die Masse der praktischen Ausführung verwendet, so erhält man für die folgenden verschiedenen Drahtdurchmesser:

$$\begin{array}{ll} d = 2 \cdot r = 2 \text{ m/m} & L_R \leq 600 \text{ (cm)} \\ & 4 \text{ m/m} \quad 500 \text{ (cm)} \\ & 20 \text{ m/m} \quad 300 \text{ (cm)} \end{array}$$

Der Einfluss des Drahtdurchmessers ist nicht gross, so dass wir ruhig mit einem solchen von 4 m/m und dem entsprechenden Wert für

$$L_R = (L_{II} + L_{III}) \leq 500 \text{ (cm)}$$

weiterrechnen dürfen.

Damit lässt sich unter Zuhilfenahme der Resonanzbedingung für den Kreis des Ersatzschaltbildes von Fig. 10, b) schreiben:

$$L_I = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot C_R} - (L_{II} + L_{III})_{\Delta} \right\}$$

Nach Einführung der Zahlenwerte erhält man die gesuchte Länge des Anodensystems für optimale Abstimmung:

$$x = l_{a \text{ (Abstimmung)}} \leq 147 \text{ cm}$$

β) Die Berechnung des Dreiphasen-Anodenkreises unter Berücksichtigung der Dämpfung durch die angekoppelte Verstärker-Stufe.

Die Ankopplung der Verstärkerröhren an den Anodenkreis erfolgt über die Drehkondensatoren C_{G1-3} und über eine weitere Dreiphasenleitung auf das Gitter der Verstärkerröhren.

Diese Kopplungsleitung habe den Wellenwiderstand Z_2 .

Die Verstärkerröhren können durch eine Kapazitäts-Widerstandsschaltung in bekannter Weise ersetzt werden, wobei die Kapazität der zwischen dem Gitter und der Kathode liegenden Röhrenkapazität C_{G-K} entspricht und der Parallelwiderstand den Gitterstrom darstellt.

Bei der verwendeten Senderöhre (Type ST 86, Signum-A.G., Wallisellen) betrug diese Kapazität 7,8 pF, so dass bei der verwendeten Sendefrequenz der Parallelwiderstand daneben vernachlässigt werden konnte.

Die Röhren können also durch den die Kopplungsleitung im Dreieck belastenden Widerstand

$$j \cdot \Re_2 = 2 \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_{G-K}} \cong 820 \text{ Ohm}$$

ersetzt werden.

Wird die Länge der Kopplungsleitung mit l_2 bezeichnet, dann kann die Kopplungskapazität C_G durch eine Verlängerung von l_2 wie folgt ersetzt werden:

$$l_2' = l_2 + \frac{\lambda}{2\pi} \arctg(Z_2 \cdot \omega \cdot C_G)$$

Dieser Einfluss der Kopplungskapazität C_G ist störend, kann aber durch die Anpassung der Leitung Z_2 an den Verbraucher, hier also an die Gitterseite der Verstärkerröhre (dargestellt durch $j \cdot \Re_2$), ausgeschaltet werden.

Da eine Dreieckschaltung vorliegt, hat man also

$$Z_2 = \frac{\Re_2 \triangle}{\sqrt{3}} \cong 475 \text{ Ohm}$$

zu machen. Wir konstruieren diese Kopplungsleitung mit einem Wellenwiderstand

$$Z_2 = 500 \text{ Ohm}$$

dann ist der durch die Zuleitungen der Verstärkerröhre dargestellten Induktivität noch Rechnung getragen.

Schliesslich kann die über C_G angekoppelte und durch die Verstärkerröhre belastete Kopplungsleitung Z_2 durch einen Wider-

stand $(\mathfrak{R}_G)_0$ zwischen den Anzapfpunkten P_a' ersetzt werden (s. Fig. 10, c); womit also auch

$$j \cdot (\mathfrak{R}_G)_0 = 500 \text{ Ohm} \text{ wird.}$$

Nun kann die durch die Impedanz $(\mathfrak{R}_G)_0$ gedämpfte Leitung Z_1 von der gesuchten Länge x' (bzw. l'_a) durch je eine Induktivität L_1' (s. Fig. 10, b)) ersetzt werden:

Dazu ersetzen wir zuerst den durch K_a kurzgeschlossenen Leitungsteil von der Länge h_a auf die Stelle zwischen den Punkten P_a' : der dort resultierende Widerstand \mathfrak{R}_1'' wird:

$$\mathfrak{R}_1'' = \frac{j \cdot (\mathfrak{R}_G)_0 \cdot j \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right) \cdot Z_1 \cdot \sqrt{3}}{j (\mathfrak{R}_G)_0 + j \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right) \cdot Z_1 \cdot \sqrt{3}};$$

Schliesslich kann die ganze Leitung durch den zwischen den Punkten P_a'' liegenden Widerstand $\mathfrak{R}_{1\Delta}$ ersetzt werden:

Dieser wird:

$$j \mathfrak{R}_{1\Delta} = \frac{(\mathfrak{R}_G)_0 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right) + \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right)} \cdot Z_1 \cdot \sqrt{3}}{\left| \frac{(\mathfrak{R}_G)_0 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right)}{(\mathfrak{R}_G)_0 + \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right) Z_1 \sqrt{3}} \right| \left| \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi h_a}{\lambda} \right)} - Z_1 \right|}$$

Darin ist also h_a zwischen 30 und 60 cm variabel.

Nach Einführung der folgenden Abkürzungen

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi h_a}{\lambda} = E, \quad \frac{E \cdot (\mathfrak{R}_G)_0}{E \cdot Z_1 \cdot \sqrt{3} + (\mathfrak{R}_G)_0} = F, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{\lambda} = y$$

wird:

$$j \mathfrak{R}_{1\Delta} = \frac{F - E + y(1 + E \cdot F)}{Z_1 - E \cdot F + y(F - E \cdot Z_1)} \cdot Z_1 \cdot \sqrt{3}.$$

Da das ganze Dreiphasen-Anodensystem nur induktiv wirkt, kann man

$$j \mathfrak{R}_{1\Delta} = j \omega L_1'$$

setzen.

Durch Einführung der Resonanzbedingung auf den Anodenkreis des Ersatzschemas von Fig. 10, b) erhält man schliesslich für

die verschiedenen Werte von h_a folgende Werte der gesuchten Länge für optimale Abstimmung l_a' :

$h_a = 30$ cm	$l_a' = 149$ cm
40 cm	147 cm
50 cm	146 cm
60 cm	145 cm

Aus dem Resultat erkennt man eine merkliche Verstimmung des Anodenkreises, verursacht durch die Ankopplung der Ver-

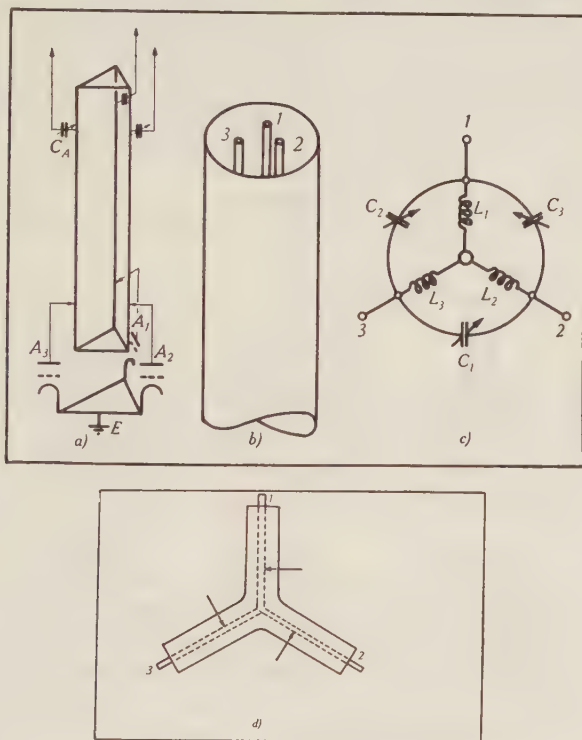


Fig. 11.

Einige mögliche Ausführungen von Dreiphasen-Schwingkreisen: In der Schaltung von 11a) sind alle weiteren Möglichkeiten der Verwendung von parallelen Rohren, je nach deren Länge im Verhältnis zur Wellenlänge, der Ankopplung an die Anode und der Speiseleitung, enthalten.

Alle diese möglichen Schaltungen können durch Abschirmung und Einbau in ein Rohr wesentlich verbessert werden. Eine solche Anordnung liesse sich mechanisch sehr stabil und einfach konstruieren, wobei sämtliche Abstimm- oder Kopplungselemente sich *in* oder *an* dem äusseren Rohr unterbringen lassen.

Aus dieser letzteren Ausführung lässt sich die für Dm-Wellen wohl besonders geeignete Form entsprechend Fig. 11d) ableiten. Dabei ist jede Kopplung und Anpassung durch variable Anzapfung (durch Pfeil angedeutet) in einfachster Weise möglich.

stärkerstufe. Deshalb wurde die Konstruktion mit einer verschiebbaren Kurzschlussbrücke, sowohl im Generator, als auch im Verstärker, durchgeführt, so dass jede Verstimmung in gewissen Grenzen durch Änderung von l_a' kompensiert werden konnte.

e) Die Energieleitung.

Um eine einwandfreie Anpassung der Dreiphasen-Speiseleitung an die Drehfeldantenne (deren Strahlungswiderstand R_s etwas grösser als derjenige des Dipols zu erwarten ist) zu erzielen, muss also die Dreiphasenleitung niederen Wellenwiderstand besitzen.

Eine aus parallelen Rohren oder Drähten konstruierte dreifache Leitung kommt nicht mehr in Frage, da mit einer solchen Anordnung ein Wellenwiderstand Z^* unter 100 Ohm nicht mehr zu erreichen ist.

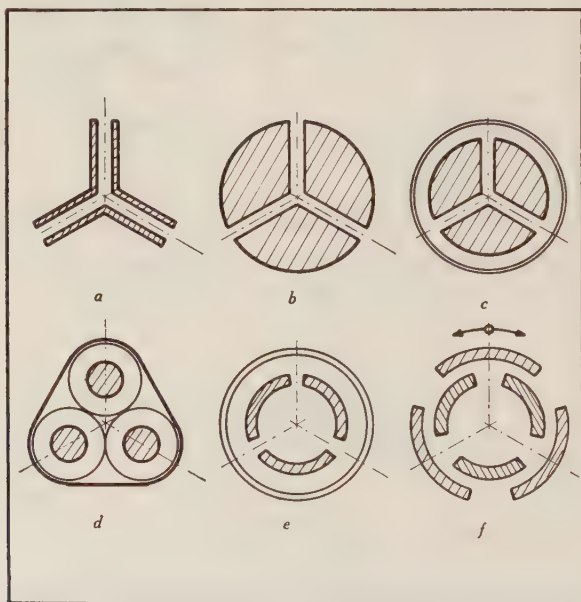


Fig. 12.

Verschiedene Ausführungsmöglichkeiten von symmetrischen Dreiphasen-Hochfrequenzleitungen.

Für die Versuche dieser Arbeit wurde eine Leitung entsprechend Fig. 12a) verwendet. Fig. 12d) zeigt das HF-Kabel, wie es zur Speisung des Tripols auf dem Antennenturm der SLA in einer Länge von 50 m von den Kabelwerken Brugg in entgegenkommendster Weise zur Verfügung gestellt wurde.

Eine Ausführung entsprechend Fig. 12f) ermöglicht durch Drehung der drei äusseren Leiter eine stete Änderung des Wellenwiderstandes und kann bei genauen Messungen (im Laboratorium) wertvolle Dienste leisten.

Dagegen können Anordnungen entsprechend den Fig. 12, a) bis f), verwendet werden, womit sich leicht ein Wellenwiderstand zwischen 20 und 100 Ohm erreichen lässt. Die Ausführung, wie sie Fig. 12, a), zeigt, eignet sich da besonders gut, wo Messungen an der Leitung selbst, sowie die Änderung des Wellenwiderstandes (was leicht durch Einsetzen verschiedener Distanzierungsstücke erfolgen kann) notwendig werden. Für längere Speiseleitungen dagegen kommt nur eine Konstruktion nach Fig. 12, d), in Frage.

Kommt die Verwendung einer solchen niederohmigen Dreiphasenleitung aus irgendwelchen Gründen nicht in Frage, dann kann eine Anpassung auch durch eine *Transformation* stattfinden.

Diese kann durch Erweiterung der vom Dipol her bekannten Schaltungen auf das Dreiphasen-System entsprechend in Dreieck-Dreieck, Stern-Stern oder gemischter Schaltung (Dreieck-Stern oder umgekehrt) erfolgen, wobei die letztere Möglichkeit die Wirksamkeit der Transformation noch erhöhen kann.

Schliesslich kann eine Anpassung, ähnlich wie dies auch beim Dipol gemacht wird, durch entsprechendes Spreizen der Leitungsenden der Leitung erreicht werden¹⁶⁾.

f) Die Bestimmung des Strahlungswiderstandes der Drehfeldantenne.

Die Drehfeldantenne (Tripol) repräsentiert die Strahlung eines in horizontaler Ebene umlaufenden elektrischen Vektors konstanter Grösse, d. h. eine Rundstrahlung mit horizontal liegendem elektrischen Feldstärkevektor.

Bei der Berechnung der Wellenstrahlung kommt es nur darauf an, jederzeit die Grösse und die räumliche Orientierung des Dipolmomentes zu kennen. Eine erste Berechnung des Strahlungswiderstandes der Drehfeldantenne wurde im Jahre 1939 von Dr. HARDUNG durchgeführt und erfuhr zur Zeit, da die vorliegende Arbeit abgeschlossen werden konnte, einige Erweiterungen¹⁰⁾.

Als Strahlungswiderstand R_s der Drehfeldantenne sei (in Übereinstimmung mit ¹⁰⁾) definiert: „Die total vom Tripol abgestrahlte Leistung (Watt), dividiert durch das Quadrat des in *einem* Tripol-Arm fliessenden Antennenstromes (Amp)“, d. h. also

$$R_s = N_s / J_{\text{Ant}}^2$$

Man kann sich nun den abgestimmten Tripol, in dessen Armen je der Strom J_{Ant} (gemessen im Strombauch) fliesst, ersetzt denken durch eine Sternschaltung von drei gleichen Widerständen R_λ , welche ebenfalls vom Strome J_{Ant} durchflossen werden, wenn man

die Strahlungsleistung N_s gleich der in den drei Widerständen verbrauchten Leistung N setzt: es ist also

$$N_s = N \text{ oder } J_{\text{Ant}}^2 \cdot R_s = 3 \cdot J_{\text{Ant}}^2 \cdot R_\lambda,$$

wobei auch R_λ die auf S. 145 errechnete Bedingung für Anpassung zu erfüllen hat:

$$R_\lambda = Z_\lambda = \sqrt{\frac{L}{3 \cdot C}} = \sqrt{\frac{L^*}{6 \cdot C^*}}$$

Der Vollständigkeit wegen seien im folgenden die wesentlichen Resultate der genannten theoretischen Arbeit¹⁰⁾ wiedergegeben:

a) Der Strahlungswiderstand eines im Raume frei aufgestellten Tripols mit der Armlänge $l = \lambda/4$ beträgt (Näherungswert):

$$R_s \cong 90 \text{ Ohm};$$

b) Der Strahlungswiderstand eines Tripols in der Höhe h über leitender Erde beträgt (Näherungswert):

$$R_s = 145,2 \cdot F_h \text{ Ohm};$$

darin ist

$$F_h = \left\{ \frac{2}{3} - \frac{\sin \frac{4\pi h}{\lambda}}{\frac{4\pi h}{\lambda}} + \frac{1}{\left(\frac{4\pi h}{\lambda}\right)^2} \left[\frac{\sin \frac{4\pi h}{\lambda}}{\frac{4\pi h}{\lambda}} - \cos \frac{4\pi h}{\lambda} \right] \right\} \text{ Ohm.}$$

Für grosse Werte von h ist der Tripol weit von der Erde entfernt und wirkt wie ein freier Tripol. Die Funktion F_h erreicht dabei den Wert $2/3$ und es wird

c) der Strahlungswiderstand für den in grosser Höhe h aufgestellten Tripol

$$R_s = 145,2 \cdot 2/3 = 97 \text{ Ohm.}$$

Wenn sich h zwischen $h = \lambda/4$ und $h =$ sehr gross bewegt, so schwankt F_h zwischen 0,9 und 0,55; bewegt sich aber h zwischen $h = 3/4 \lambda$ und $h =$ sehr gross, dann schwankt die Funktion F_h nur noch zwischen 0,75 und 0,6, d. h. je nach dem Einfluss der näheren Umgebung wird der Strahlungswiderstand zwischen 80 Ohm und 110 Ohm betragen.

Da 1. für die Anpassung eines Abschlusswiderstandes an eine vorgegebene Energieleitung dessen Grösse, sowohl für Dreieck- als auch für Sternschaltung bekannt ist, und man auch

2. den notwendigen Wellenwiderstand der an die abgestimmte Antenne angepassten Speiseleitung kennt, so kann der Strahlungswiderstand der Drehfeldantenne auch *experimentell* bestimmt werden (s. II., B., d).

C: Die Konstruktion des Drehfeld-Senders.

Da eine Rundstrahlemission durch ein Drehfeld sowohl für das Fernsehen, als auch für den UKW-Rundspruch von technischem Interesse ist, fällt die Wahl einer über dem UKW-Bereich liegenden Welle ausser Betracht. Als Betriebswellenlänge wurde eine solche zwischen 6 und 7 m gewählt.

Vorversuche*) über Synchronisierung und Stabilität mehrerer Röhrengeneratoren, welche vor der Konstruktion und dem Bau des Senders durchgeführt wurden, haben ergeben, dass für eine stabile Mitnahme eine gute mechanische Stabilität notwendig ist. Dieser Forderung kann bei UKW in vollkommenster Weise durch Verwendung von nichtquasistationären Schwingungskreisen (Concentric Line Circuits, Parallel Rod Circuits) genügt werden.

Für die experimentelle Ermittlung der Anpassung der Antenne und deren Strahlungswiderstand ist die Messung von Strom und Spannung auf der Speiseleitung über eine Strecke von mindestens einer halben Wellenlänge notwendig. Bei Verwendung einer UKW wird die Durchführung aller dieser Messungen auf einer relativ kleinen Mess-Strecke ermöglicht und die Antennenanordnung wird sehr einfach, da sie sich ohne besondere Schwierigkeiten selbsttragend ausführen lässt und keine störenden Abspannungen notwendig macht.

Es war vorgesehen, die Gelegenheit der ersten betriebsmässigen Aufstellung des Drehfeld-Senders anlässlich der SLA dazu zu benutzen, um Feldstärke- und Ausbreitungsmessungen durchzuführen, wofür in Richtung über den Zürichsee nahezu theoretisch ideale Verhältnisse vorgelegen hätten.

Um für diese geplanten Messungen genügend Energie zur Verfügung zu haben, in erster Linie aber um die gestellte Aufgabe bis zur technischen Reife zu vervollkommen, wurde der Einbau einer Dreiphasen-Verstärkerstufe zur Abgabe einer Strahlungsleistung von einigen hundert Watt an die Antenne vorgesehen und durchgeführt. Durch diese Verstärkerstufe wurde gleichzeitig eine vollständige Entkopplung zwischen Antenne und Drehfeld-Generator erreicht, wodurch rückwirkungsfreie Messungen an der Speiseleitung sowie eine einwandfreie Modulation ohne Beeinflussung des Generators gewährleistet wurden.

*) Ich möchte nicht unterlassen, auch gewisse am Institut für Hochfrequenztechnik der ETH von Herrn Dipl.-Ing. H. BAUMGARTNER durchgeführte Vorstudien über den Drehfeld-Sender, aus welchen ich einige wertvolle Anregungen schöpfen konnte, zu erwähnen.

Die Aufstellung der gesamten Apparatur an der SLA bedingte eine äusserst sorgfältige und über das Versuchs- und Laboratoriumstadium hinausgehende saubere Ausführung aller mechanischen und elektrischen Konstruktionen. Der gesamte Aufbau erfolgte in Leichtmetall und wurde in den physikalischen Werkstätten der ETH ausgeführt.

Sämtliche Teile des Senders waren für den Anschluss an ein 220-Volt Wechselstrom-Netz gebaut, wodurch der Bau der folgenden *Gleichrichtergeräte* notwendig wurde.

1. Für die Anodengleichspannung der Generatorstufe (U_a):
500—1500 Volt, in 8 Stufen regulierbar, mit einer maximalen Gleichstrombelastung von 500 mA.
2. Für die Gittervorspannung der Verstärkerröhren (U_g):
0—400 Volt, stetig regulierbar, mit einer maximalen Belastbarkeit von 200 mA.
3. Für die Anodengleichspannung der Verstärkerstufe (U_d):
1000—3000 Volt, in 3 Grobstufen, jedoch von Stufe zu Stufe fein regelbar, mit einer totalen Belastbarkeit durch 1 Amp.
4. Ein komplettes Betriebsgerät für die zentral montierte Hochvakuum-Kathodenstrahlröhre.

Alle diese Geräte waren in einem Leichtmetallgehäuse untergebracht, welches gleichzeitig als Konsole für den Sender diente und dessen vordere Schrägwand die zur Messung sämtlicher Betriebsgrössen notwendigen Einbau-Instrumente trug (s. Fig. 1).

Die Gitterkreise der *Generatorstufe* wurden als konzentrische $\lambda/4$ -Rohre ausgebildet. Dies ermöglichte, eine grosse mechanische Stabilität bei gleichzeitiger Verringerung der Verluste zu erlangen, wodurch die Resonanzschärfe

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

gross wird. Die dämpfende Streustrahlung, welche zusammen mit dem Skin-Effekt den Widerstand R im allgemeinen und bei UKW ganz besonders um ein Vielfaches erhöhen kann, wird durch die abschirmende Wirkung des äusseren Rohres wesentlich vermindert; der Fluss verläuft ganz im Inneren des Hohlraumes und die Folge ist eine gute Frequenzkonstanz des Senders.

Die Länge des inneren Rohres bestimmt im wesentlichen die Eigenfrequenz des Kreises. Infolge des kapazitiven Einflusses der beiden Rohre gegeneinander (inneres Rohr gegen Erde) wird die

resultierende Welle etwas länger, als es der Rohrlänge l_g entsprechen würde. Diese Wirkung wird durch die Kopplung C'_g der Gitterkreise untereinander und durch die Ankopplung der Oscillatorröhre noch etwas erhöht (s. Fig. 3, 9 und 13).

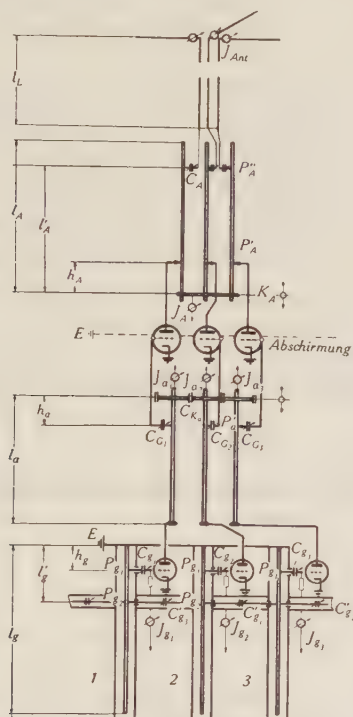


Fig. 13.

Prinzipielles Schaltbild des Drehfeld-Senders.

Da sich das konzentrische Rohr als idealer Hochfrequenztransformator verhält (s. auch die vorhergehenden entsprechenden Rechnungen für den Parallel Rod Circuit, S. 148—153), kann durch Verschieben des Anschlusspunktes des Gitters der Oscillatorröhre auf dem inneren Rohr (Punkt P_{g-1} in Fig. 3 und 13) der im Gitter wirkende Widerstand (dargestellt durch den Gitterkreis) und damit die Schwingintensität des Generators verändert werden.

Eine ähnliche Rechnung, wie die des Gitterkreises, unter Berücksichtigung der dämpfenden Wirkungen der Ankopplungen von C_g und C'_g , wurde auf S. 148—153 für den Anodenkreis des Generators durchgeführt, so dass hier darauf verzichtet werden kann.

Die Verstärkerstufe.

Die Aussteuerung der Verstärkerröhren erfolgte über die an den Anodenkreis des Generators kapazitiv angekoppelte Dreiphasenleitung Z_2 und liess sich durch die Veränderung der Ankopplungskapazität C_G einerseits und durch die Wahl des Abstandes des Anzapfpunktes P_A' von der Kurzschlussbrücke anderseits in weiten Grenzen einstellen.

Durch die Verlegung der Kurzschlussbrücke K_A auf die Anodenseite stellt sich eine solche Spannungsverteilung ein, dass der Spannungsbauch an dem der Röhre entfernten Ende der Rohre auftritt, womit eine Selbsterregung der Verstärkerstufe weitgehend vermieden werden konnte. Diese stellte sich nur bei Betrieb im Leerlauf mit hohen Anodengleichspannungen ein.

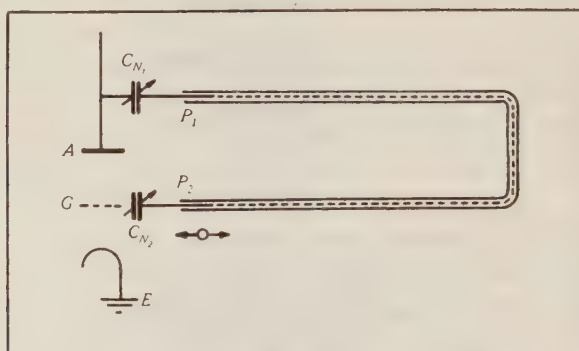


Fig. 14.

Die Neutralisation beim Drehfeld-Sender: Die für die Neutralisation benötigte Spannung wird von der Anode über ein Hochfrequenzkabel oder ein konzentrisches Rohr, welches mit Vorteil einen posaunenartig ausziehbaren Teil zur Änderung und damit zur Einstellung der Weglänge $P_1 - P_2$ besitzt, dem Gitter der Röhre zugeführt.

Eine Schaltung — ähnlich der, wie sie für den Anodenkreis des Generators verwendet wurde — bei der also die Kurzschlussbrücke auf der der Anode entfernten Seite der Rohre läuft, hat zur Folge, dass die Röhre praktisch im Leerlauf arbeitet und entsprechend hohe Hochfrequenzspannungen führt, wodurch dann eine Neutralisation unumgänglich wird.

Die Neutralisation der Verstärkerröhren kann entweder so erfolgen, dass 1. dem Gitter der betreffenden Röhre von den Anoden der beiden anderen Röhren über je einen Neutralisationskondensator C_N eine der die Selbsterregung verursachenden Spannung um $\pm 2\pi/3$ verschobene, aber gleich grosse Spannung zugeführt wird.

Dies erfordert einen Aufwand von 6 Neutralisationskondensatoren und verursacht in der konstruktiven und praktischen Verwirklichung (Abgleichen von 6 Kondensatoren) grosse Schwierigkeiten.

Oder 2. die rückgekoppelte Spannung wird durch eine gleich grosse, von der *gleichen* Verstärkerröhre (gleiche Phase) abgezapften und gegen die erstere um $= \pi$ verschobene Spannung kompensiert (s. Fig. 14).

Zusammenfassend kann man sagen, dass die gesamte Konstruktion des Drehfeld-Senders durch den wesentlichen Gesichtspunkt der Einhaltung einer strengen Symmetrie im Aufbau gegen Erde gekennzeichnet ist. Damit liegt der Konstruktion eine innere Zwangsläufigkeit zugrunde, und der Drehfeld-Sender kann in allen seinen Teilen als eine *sinngemässe Weiterentwicklung des Gegentakt-senders* aufgefasst werden.

Demzufolge darf prinzipiell jede vom Gegentaktsender her bekannte Schaltung in entsprechender Weise für den Drehfeld-Sender erweitert werden, wobei die Konstruktionen bei logischem Aufbau durchwegs im Rahmen der vom Gegentaktsender gewohnten und bekannten Einfachheit bleiben.

(Der 2. Teil erscheint im nächsten Heft.)

Influence des vibrations thermiques sur la diffraction des rayons X et réseau de Fourier

par Jean Weigle.

(20. I. 42.)

1. Introduction.

La notion de réseau réciproque, introduite d'une façon générale par GIBBS, puis appliquée aux cristaux par EWALD et LAUE, est extrêmement utile en particulier quand on désire calculer la diffraction des rayons X par les cristaux. En 1938, deux travaux¹⁾ ont élargi cette notion en la basant sur la représentation en série de Fourier des propriétés périodiques des cristaux. C'est ainsi qu'EWALD proposait le nom de réseau de Fourier plutôt que celui de réseau réciproque, alors qu'à la suite du travail d'EXTERMANN²⁾ sur la diffraction de la lumière par les ultrasons, nous introduisons l'idée de réseau de couplage. Nous désirons montrer ici comment cette méthode peut être appliquée au problème de l'effet de la température sur la diffraction des rayons X par les cristaux. Ce problème ancien a été remis à l'ordre du jour par toute une série de travaux expérimentaux et théoriques récents³⁾. Jusqu'ici, on s'était préoccupé de calculer et de mesurer l'effet de la température sur les réflexions ordinaires des cristaux, alors que, dernièrement, on a pu expliquer par cet effet des observations expérimentales sur les réflexions diffuses nouvelles en dehors de l'angle de BRAGG. Cette explication se trouvait déjà dans les travaux de FAXEN⁴⁾ et de WALLER⁵⁾, mais elle était cachée dans des complications mathématiques dont il était difficile de la dégager. C'est pourquoi ZACHARIASEN⁶⁾ a repris la théorie sous une forme plus simple et il a ainsi obtenu, pour des réseaux simplement cubiques

¹⁾ EWALD, Nachr. Göttingen **3**, 55, 1938. — WEIGLE, Arch. des Sc. Phys. et Nat. **20**, 164, 1938.

²⁾ EXTERMANN, Helv. Phys. Acta **10**, 185, 1938.

³⁾ On trouvera la littérature concernant ces travaux dans le numéro d'août 1941 des Proc. Roy. Soc. (n° 976, vol. 179), qui est entièrement consacré au sujet de la réflexion diffuse des rayons X par les cristaux.

⁴⁾ FAXEN, Z. Phys. **17**, 266, 1923.

⁵⁾ WALLER, Thèse Upsala.

⁶⁾ ZACHARIASEN, Phys. Rev. **57**, 597, 1940, et **59**, 860, 1941.

faits d'atomes ponctuels, des résultats qui peuvent servir à interpréter directement les observations expérimentales. BORN et SARGINSON¹⁾ ont, eux aussi, repris la théorie sous une forme générale, qui ne nous semble toutefois pas faire ressortir les points essentiels du phénomène. Nous avons déjà montré²⁾ comment, au moyen de l'emploi du réseau réciproque, on peut parvenir très facilement aux résultats de ZACHARIASEN par exemple, et comment on peut appliquer ceux-ci au calcul d'un cristal typique comme le Diamant. Les expérimentateurs du reste ont trouvé nécessaire d'exprimer leurs observations, pour les coordonner, dans le réseau réciproque et W. L. BRAGG³⁾ a donné une description qualitative de l'influence des mouvements thermiques sur le réseau réciproque.

La méthode que nous avons employée consistait à calculer explicitement la valeur des coefficients de Fourier de la distribution de matière dans le cristal perturbé par les ondes thermiques. Elle est trop encombrante pour qu'on puisse l'appliquer à des réseaux un peu compliqués et pour voir, par exemple, quels rôles jouent séparément les facteurs de structure et de forme d'atome. Mais, comme nous le montrons ci-dessous, tous ces calculs sont extrêmement simplifiés si l'on aborde le problème par le réseau de Fourier.

On sait que si l'on représente la densité électronique d'un cristal à l'endroit \mathbf{a} par $F(\mathbf{a})$, on a :

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \sum_{h_3} F_{h_1 h_2 h_3} e^{2\pi i \mathbf{b}_{h_1 h_2 h_3} \cdot \mathbf{a}} \quad (1)$$

car cette densité est périodique avec la maille du cristal donnée par les trois vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. On a, pour les coefficients de cette série de Fourier :

$$F_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{v_a} \int \int \int_{v_a} F(\mathbf{a}) e^{-2\pi i \mathbf{b}_{h_1 h_2 h_3} \cdot \mathbf{a}} d\mathbf{a}$$

avec $v_a = (\mathbf{a}, [\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3])$ le volume de la maille. Les vecteurs

$$\mathbf{b}_{h_1 h_2 h_3} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3$$

sont définis par

$$(\mathbf{b}_i \mathbf{a}_j) = 0 \quad \text{et} \quad (\mathbf{b}_i \mathbf{a}_i) = 1 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

pour qu'on ait bien

$$F(\mathbf{a} + l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3) = F(\mathbf{a})$$

¹⁾ BORN et SARGINSON, Proc. Roy. Soc. **179**, 69, 1941.

²⁾ WEIGLE et SMITH, Phys. Rev. (sous presse). — WEIGLE, Helv. Phys. Acta **14**, 595, 1941.

³⁾ W. L. BRAGG, Proc. Roy. Soc. **179**, 61, 1941.

La série des vecteurs $\mathbf{b}_{h_1 h_2 h_3}$ définit donc un réseau, le réseau réciproque ou réseau de Fourier, dont la maille est construite sur $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Si l'on calcule la diffraction que subit une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde $\mathbf{s}_i \left(s_i - \frac{1}{\lambda} \right)$ tombant sur le cristal, on trouve, soit avec la théorie dynamique, soit avec la théorie cinématique, qu'il y a des ondes planes $\mathbf{s}_d \left(s_d = \frac{1}{\lambda} \right)$ diffractées dans des directions définies par

$$\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_d = \mathbf{b}_{h_1 h_2 h_3} \quad (2)$$

On dit alors, suivant le langage de BRAGG, qu'il y a eu « réflexion » de l'onde incidente \mathbf{s}_i sur le plan réticulaire dont les indices de MILLER sont (h_1, h_2, h_3) . L'intensité intégrée des ondes diffractées est alors proportionnelle, soit à $F_{h_1 h_2 h_3}$ dans la théorie dynamique, soit à $F_{h_1 h_2 h_3}^2$ dans la théorie cinématique. On exprime quelquefois ces facteurs de structure en fonction des facteurs de forme d'atome

$$F_{h_1 h_2 h_3} = \sum_m f_m^{(h_1 h_2 h_3)} e^{-2\pi i (h_1 \alpha_{1m} + h_2 \alpha_{2m} + h_3 \alpha_{3m})} \quad (3)$$

où la somme est à prendre sur tous les atomes numérotés par m de la maille du cristal et dont les facteurs sont $f_m(h_1, h_2, h_3)$ et les positions \mathbf{q}_m sont

$$\mathbf{q}_m = \alpha_{1m} \mathbf{a}_1 + \alpha_{2m} \mathbf{a}_2 + \alpha_{3m} \mathbf{a}_3$$

On voit donc que, pour connaître la diffraction à laquelle le cristal donne lieu, il suffit de calculer la série de Fourier représentant la densité électronique du cristal, puisque, l'ayant calculée, on a d'une part les vecteurs $\mathbf{b}_{h_1 h_2 h_3}$ qui, par (2), déterminent la géométrie, c'est-à-dire la direction des ondes diffractées, et d'autre part les facteurs $F_{h_1 h_2 h_3}$, qui donnent l'intensité de ces ondes. C'est cette méthode que nous allons employer pour l'appliquer plus loin aux cristaux perturbés par les mouvements thermiques, c'est-à-dire aux réseaux d'atomes modulés par les ondes thermiques.

2. Cristal simple (sans base).

Un cristal simple est formé par des atomes semblables, dont les noyaux se trouvent placés aux points définis par les vecteurs \mathbf{a}_i

$$\mathbf{a}_i = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3 \quad (l_1, l_2, l_3 \text{ entiers})$$

Nous supposons que la densité électronique des atomes est connue, soit qu'elle ait été calculée par la méthode de THOMAS-

FERMI, soit par celle de HARTREE. Cette façon de procéder exclut évidemment la possibilité d'un changement de la densité électronique produit par les liaisons qui attachent les atomes les uns aux autres, mais nous verrons que, pour les mouvements thermiques, cet effet est négligeable. En un point du cristal défini par \mathbf{a} , l'atome en $l_1 l_2 l_3$ donne donc une densité connue

$$f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l)$$

Le vecteur \mathbf{a} est donc le vecteur de position dans le réseau cristallin, c'est-à-dire dans l'espace ordinaire. Nous avons admis, pour plus de généralité, que la densité dépendait non seulement de la distance $|\mathbf{a} - \mathbf{a}_l|$ mais aussi de la direction car, en effet, le raisonnement que nous faisons s'applique non seulement à la densité mais à toute propriété additive des atomes qui peut être représentée par une fonction $f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l)$ (voir EWALD, loc. cit.).

Au point \mathbf{a} , la densité due à tous les atomes du cristal est donc

$$F(\mathbf{a}) = \sum_l f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l)$$

la somme sur l étant une somme triple sur $l_1 l_2 l_3$. Or, cette fonction est périodique avec la maille du réseau et donc, en l'étendant en série de Fourier,

$$F(\mathbf{a}) = \sum_h F_h e^{2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})} \quad (h = h_1, h_2, h_3 \text{ entier})$$

Les vecteurs \mathbf{b}_h sont ceux que nous avons définis plus haut. Ils forment un réseau dans un espace où les distances sont mesurées en cm^{-1} ; nous appellerons ce réseau le réseau de Fourier. De même, nous donnerons à l'espace dans lequel il est construit le nom d'espace de Fourier et nous dénoterons par \mathbf{b} le vecteur de position dans cet espace.

Admettons maintenant qu'on puisse exprimer la fonction $f(\mathbf{a})$ en intégrale de Fourier; on a donc:

$$f(\mathbf{a}) = \int_{\infty} \varphi(\mathbf{b}) e^{2\pi i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} d\mathbf{r}_a \quad \text{et} \quad \varphi(\mathbf{b}) = \int_{\infty} f(\mathbf{a}) e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} d\mathbf{v}_b \quad (4)$$

les deux intégrales étant triples, $d\mathbf{r}_a$ et $d\mathbf{r}_b$ étant les éléments de volume de l'espace ordinaire et de l'espace de Fourier respectivement. Ces transformations nous permettent de connaître l'image $\varphi(\mathbf{b})$ de la fonction $f(\mathbf{a})$ dans l'espace de Fourier et, comme on le voit, la valeur de φ en un point \mathbf{b} dépend des valeurs de f dans tout l'espace ordinaire.

Nous pouvons alors calculer les coefficients de Fourier F_h en fonction de la densité $f(\mathbf{a})$. On a en effet

$$F_h = \frac{1}{v_a} \int_{v_a} \sum_l f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l) e^{-2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})} dv_a$$

Au lieu d'intégrer sur une seule maille v_a et de faire la somme sur toutes les autres mailles l , on peut directement intégrer sur tout l'espace car les contributions des autres atomes à l'intérieur d'une maille sont exactement ce que donne l'atome considéré dans les autres mailles. On pourrait dire que la fonction $F(\mathbf{a})$ est faite d'un repliement de la fonction $f(\mathbf{a})$ à l'intérieur d'une maille. On a donc

$$F_h = \frac{1}{v_a} \int_{\infty} f(\mathbf{a}) e^{-2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})} dv_a$$

et, en comparant cette expression avec l'intégrale de Fourier (4), on voit que

$$F_h = \frac{1}{v_a} \varphi(\mathbf{b})_h$$

Autrement dit, les F_h sont les valeurs (au facteur $1/v_a$ près) que la fonction $\varphi(\mathbf{b})$ prend dans les points \mathbf{b}_h formant les sommets des mailles du réseau de Fourier. La superposition des densités atomiques $f(\mathbf{a})$ donne la densité du cristal $F(\mathbf{a})$, qui est périodique. F est donc une connaissance moins étendue que f , puisque, comme nous le disions ci-dessus, on a en quelque sorte replié f sur elle-même à l'intérieur d'une maille, puis additionné en chaque point de celle-ci les valeurs de f . C'est ce qu'on voit clairement dans l'espace de Fourier puisque, pour connaître $f(\mathbf{a})$, il faudrait connaître $\varphi(\mathbf{b})$ en chaque point de cet espace. Tandis que, pour connaître $F(\mathbf{a})$, il suffit d'avoir les valeurs de φ dans les points dénombrables \mathbf{b}_h . On pourrait dire, avec EWALD¹⁾, dont nous n'avons fait jusqu'ici que résumer les résultats, que F est la fonction f vue à travers les fenêtres que sont les points discrets du réseau de Fourier.

3. Cristal avec base.

La position des atomes dans le cristal est maintenant donnée par

$$\mathbf{a}_{l, m} = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3 + \mathbf{q}_m$$

Le vecteur \mathbf{q}_m définit à l'intérieur de la maille la position de l'atome numéro m , dont la densité (connue) au point \mathbf{a} du cristal, est

$$f_m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{l, m})$$

¹⁾ EWALD, loc. cit.

et la densité du cristal devient

$$F(\mathbf{a}) = \sum_l \sum_m f_m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{l,m}) = \sum_h F_h e^{2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})}$$

avec

$$F_h = \frac{1}{v_a} \sum_l \sum_m \int_{v_a} f_m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l - \mathbf{q}_m) e^{-2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})} dv_a$$

ce qu'on peut écrire avec $\mathbf{a} - \mathbf{a}_{l,m} - \mathbf{q}_m = \mathbf{a}'$

$$\frac{1}{v_a} \sum_m e^{2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{q}_m)} \cdot \sum_l \int_{v_a} f_m(\mathbf{a}') e^{-2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a}')} dv_a$$

et donc, en remplaçant la somme sur l par l'intégrale sur tout l'espace

$$F_h = \frac{1}{v_a} \sum_m \varphi_m(\mathbf{b}_l) e^{2\pi i \mathbf{h} \cdot \mathbf{a}_m}$$

On a écrit

$$(\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{q}_m) = h_1 \alpha_{1,m} + h_2 \alpha_{2,m} + h_3 \alpha_{3,m} = h \alpha_m.$$

On voit qu'on retrouve bien ainsi l'expression (3) du facteur de structure. Lorsqu'on calcule, par la méthode de THOMAS-FERMI, la densité électronique d'un atome, on trouve, pour le nombre d'électrons par cm^3 ,

$$f(a) = \frac{Z}{4\pi\alpha^3} \left[\frac{y\left(\frac{a}{\alpha}\right)}{\left(\frac{a}{\alpha}\right)} \right]^{3/2}$$

avec

$$\alpha = Z^{-1/3} \left(\frac{3}{32\pi^2} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m\varepsilon^2},$$

où Z est le nombre atomique de l'atome considéré, h la constante de Planck et m et ε la masse et la charge de l'électron respectivement. On voit que cette densité a une symétrie sphérique et l'on trouvera que l'image $\varphi(b)$ de cette fonction dans l'espace de Fourier a , elle aussi, une symétrie sphérique. La fonction $y(x)$ a été donnée en valeurs numériques par FERMI. En calculant $\varphi(b)$, on trouve

$$\varphi(b) = \frac{Z}{2\pi b \alpha} \int_0^\infty \sqrt{\frac{y^3(x)}{x}} \sin 2\pi b \alpha x \, dx$$

Cette fonction $\varphi(b)/Z$ a été donnée en valeurs numériques par DEBYE¹⁾ en fonction de $2\pi b \alpha$ car, évidemment, elle joue un

¹⁾ DEBYE, Phys. Z. **31**, 419, 1930.

rôle fondamental pour le calcul des facteurs F_h pour les atomes relativement lourds (à partir du Rb). Mais DEBYE n'avait pas mis en évidence que cette fonction était simplement la transformée de Fourier de la densité électronique.

Si, au lieu de considérer des atomes dont la densité est répartie suivant la loi de THOMAS-FERMI, on prend des atomes sphériques (ou ponctuels à la limite), on trouve

$$\varphi(b) = \frac{A}{2\pi^2 b^3} (\sin 2\pi bc - 2\pi bc \cos 2\pi bc)$$

si l'atome a une densité A constante dans une sphère de rayon c . Et si, maintenant, on fait tendre $\frac{4\pi}{3} c^3$ vers zéro et A vers l'infini de façon à laisser $A \frac{4\pi}{3} c^3 = Z$, on trouve

$$\varphi(b) = Z$$

La transformée de Fourier est donc constante dans tout l'espace de Fourier.

4. Modulation en amplitude.

Supposons que les atomes fixés dans leurs positions aient leur densité modulée en amplitude par une onde plane dont nous négligeons la propagation. Ce problème, appliqué à la densité électronique, ne correspond à aucune expérience; par contre, dans la théorie dynamique, on a besoin de calculer le champ résultant des moments électriques induits dans les atomes et ce calcul serait alors du type que nous considérons dans ce paragraphe. Supposons que le vecteur de l'onde modulatrice soit \mathbf{k} (il est tracé dans l'espace de Fourier), on a donc

$$F(\mathbf{a}) = \sum_l f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l) e^{2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_l)} = e^{2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})} \sum_l f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l) e^{-2\pi i (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a}_l))}$$

La fonction F n'est donc plus périodique, mais elle est faite du produit d'une fonction périodique modulée par $e^{2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})}$. On peut donc écrire

$$F(\mathbf{a}) = e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \sum_h \Phi_h e^{2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})}$$

avec

$$\Phi_b = \frac{1}{v_a} \int_{v_a} \sum_l f(\mathbf{a}) e^{-2\pi i ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a})} dv_a = \frac{1}{v_a} \varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{k})$$

et donc, finalement,

$$F(\mathbf{a}) = \frac{1}{v_a} \sum_h \varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) e^{2\pi i ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a})}$$

Ainsi, pour connaître $F(\mathbf{a})$, il faut donner les valeurs de $\varphi(\mathbf{b})$ non plus aux points \mathbf{b}_h du réseau de Fourier, mais aux points $(\mathbf{b}_h + \mathbf{k})$. La fonction $F(\mathbf{a})$ n'est plus périodique avec les périodes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, mais elle possède une représentation dans l'espace de Fourier, qui donne un réseau de points comme une fonction périodique. On pourrait dire que la modulation en amplitude est équivalente à une translation \mathbf{k} du réseau de Fourier non modulé.

5. Modulation en phase.

Admettons maintenant que les atomes soient déplacés par une onde (thermique par exemple), dont, de nouveau, nous négligeons la propagation. La densité dans le cristal devient

$$F(\mathbf{a}) = \sum_l f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l - \xi_l)$$

avec

$$\xi_l = \xi e^{2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_l)}$$

ξ étant l'amplitude de l'onde modulante de vecteur \mathbf{k} .

Supposons, en plus, que ξ est très petit par rapport aux \mathbf{a}_l ¹⁾. On peut alors étendre en série de Taylor la fonction f et l'on a

$$f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l - \xi_l) = f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l) - (\xi_l \cdot \text{grad } f) + \dots (\xi_l)^2 - \dots$$

et donc

$$F(\mathbf{a}) = \sum_l f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l) - \sum_l (\xi \cdot \text{grad } f) e^{2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_l)} + \sum_l \dots e^{2\pi i (2\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_l)} + \dots$$

La première somme est celle du réseau non perturbé, la seconde donne un résultat semblable à celui obtenu pour une modulation en amplitude (translation \mathbf{k}), la troisième une translation $2\mathbf{k}$, etc. On voit donc immédiatement que le réseau de Fourier sera constitué du réseau original et de points supplémentaires décalés de $\mathbf{k}, 2\mathbf{k}$, etc. par rapport à celui-ci.

En admettant que $\varphi(\mathbf{b})$ converge plus rapidement que $1/b$ on peut différencier (4) et l'on obtient

$$(\xi \cdot \text{grad } f(\mathbf{a})) = 2\pi i \int_{\infty} (\mathbf{b} \cdot \xi) \varphi(\mathbf{b}) e^{2\pi i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} d\mathbf{v}_b$$

et, en retournant cette intégrale de Fourier,

$$2\pi i (\mathbf{b} \cdot \xi) \varphi(\mathbf{b}) = \int (\xi \cdot \text{grad } f(\mathbf{a})) e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} d\mathbf{v}_a \quad (6)$$

¹⁾ Nous montrerons dans une prochaine publication que cette supposition n'est pas nécessaire et que l'on peut traiter rigoureusement le cas des ondes de grandes amplitudes.

On peut écrire, pour la deuxième somme de (5)

$$e^{2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})} \sum_l (\xi \operatorname{grad} f) e^{-2\pi i (\mathbf{k}(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l))} = e^{2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})} \sum_h g_h e^{2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})}$$

avec

$$\begin{aligned} g_h &= \frac{1}{v_a} \sum_l \int_{v_a} (\xi \cdot \operatorname{grad} f) e^{-2\pi i ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a})} d v_a \\ &= \frac{1}{v_a} \int_{\infty} (\xi \cdot \operatorname{grad} f) e^{-2\pi i ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a})} d v_a \end{aligned}$$

et donc, avec (6)

$$g_h = \frac{2\pi i}{v_a} ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \xi) \varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{k})$$

La fonction $F(\mathbf{a})$ prend alors la forme

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}) &= \sum_h \frac{1}{v_a} \varphi(\mathbf{b}_h) e^{2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})} \\ &\quad - \sum_h \frac{2\pi i}{v_a} ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \xi) \varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) e^{2\pi i ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a})} + \dots \end{aligned}$$

Les nouveaux points du réseau de Fourier ont donc les facteurs $\frac{2\pi i}{v_a} ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \xi) \varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{k})$ et si ξ est petit, comme nous l'avons supposé, ces facteurs seront beaucoup plus petits que $\varphi(\mathbf{b}_h)/v_a$, le facteur des points du réseau non perturbé. Nous discuterons plus loin l'effet de ces points supplémentaires du réseau sur la diffraction des rayons X, après avoir calculé le réseau de Fourier d'un cristal avec base et après avoir introduit non pas une seule onde thermique ξ mais toutes celles qui se propagent dans le cristal.

Cristal avec base.

On écrira que les différents atomes m de la maille ont des amplitudes différentes

$$\xi_{l,m} = \xi_m e^{2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{l,m})}$$

et l'on cherchera à calculer la représentation dans l'espace de Fourier de la densité cristalline

$$F(\mathbf{a}) = \sum_l \sum_m f_m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{l,m} - \xi_{l,m})$$

En prenant, comme précédemment, l'extension en série de Taylor de chaque fonction f_m , on trouve

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}) &= \frac{1}{v_a} \left\{ \sum_h \left(\sum_m \varphi_m(\mathbf{b}_h) e^{-2\pi i h \cdot \mathbf{a}_m} \right) e^{2\pi i (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})} \right. \\ &\quad \left. - \sum_h \left(\sum_m 2\pi i ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \xi_m) \varphi_m(\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) e^{-2\pi i h \cdot \mathbf{a}_m} \right) \cdot e^{2\pi i ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a})} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le réseau de Fourier non perturbé avec les mêmes facteurs de structure et, en plus de celui-ci, un réseau décalé de \mathbf{k} avec les nouveaux facteurs

$$\sum_m \frac{2\pi i}{v_a} ((\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\xi}_m) \varphi_m(\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) e^{-2\pi i \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\alpha}_m} \quad (8)$$

Remarquons que l'expression (7) est tout à fait générale puisqu'elle s'applique à tous les cristaux quel que soit le système cristallin auquel ils appartiennent et quels que soient le nombre et la disposition des atomes à l'intérieur de la maille. Si l'on avait eu des atomes ponctuels ($\varphi(\mathbf{b}) = \text{constante}$), on n'aurait pas eu à tenir compte de la translation \mathbf{k} dans la fonction φ . C'est cette translation qui exprime donc l'effet d'extension dans l'espace des atomes. Il est vrai que, pour des valeurs de \mathbf{k} allant jusqu'à 10% de \mathbf{b} , la variation de φ est au plus de 4%, comme on peut le voir grâce à la fonction de THOMAS-FERMI donnée par DEBYE.

La raison pour laquelle ces fonctions modulées peuvent être représentées par des points dans le réseau de Fourier, quoiqu'elles n'aient plus la périodicité du réseau, provient du fait qu'elles sont encore périodiques, mais avec une période beaucoup plus grande que la maille du réseau. On peut en effet supposer que, si l'on prend un nombre de longueurs d'ondes assez grand pour contenir un nombre entier d'atomes, le cristal devient alors un milieu périodique avec une période égale à cette nouvelle longueur. Le réseau de Fourier est alors formé d'un très grand nombre de points, très rapprochés les uns des autres si la période est grande, mais ayant pour la plupart un facteur nul. Seuls les points \mathbf{b}_h et $\mathbf{b}_h + \mathbf{k}$ ont des facteurs différents de zéro et ainsi on ne voit plus tout le réseau de Fourier construit sur des vecteurs beaucoup plus petits que les \mathbf{b}_i ou \mathbf{k} . C'est ce qu'on voit bien dans le travail¹⁾ que nous avons publié précédemment, dans lequel nous avons considéré un cristal fini dont les ondes modulantes étaient des ondes stationnaires choisies parmi les vibrations propres. Ainsi c'était le cristal fini qui devenait la période du milieu périodique par une sorte de condition aux limites de BORN KARMAN. Pour obtenir les coefficients de Fourier, nous avons alors intégré la densité électronique des atomes déplacés par l'onde sur tout le cristal. Ce procédé, qui donne le même résultat que (7) pour le cas des réseaux cristallins simples (atomes ponctuels) que nous avons seuls considérés, est évidemment beaucoup plus compliqué que la méthode

¹⁾ WEIGLE et SMITH, loc. cit.

suivie ici, qui donne le résultat général s'appliquant à tous les réseaux pour ainsi dire sans calculs.

D'une façon générale, on peut dire que les fonctions périodiques modulées, soit en amplitude soit en phase, donnent toujours dans l'espace de Fourier un réseau de points discrets. Comme nous l'avons dit, cela est vrai quelle que soit l'amplitude des ondes modulantes, alors que la démonstration ci-dessus n'est valable que pour de petites amplitudes.

On pourrait aussi se demander pourquoi une onde plane harmonique se propageant dans un cristal donne naissance à une infinité de points nouveaux dans le réseau de Fourier alors que, dans un milieu continu, elle ne donnerait qu'un seul point en plus de l'origine. Autrement dit, alors que, dans un milieu continu, l'onde donne des stratifications de longueur d'onde $\lambda = 1/k$, elle donne, dans un cristal, des stratifications de différentes longueurs d'ondes: en plus de $\lambda = 1/k$, elle donne encore des stratifications beaucoup plus fines de $\lambda_n = \frac{1}{(b_n + k)}$. Cela provient de ce que l'on peut décrire la position des atomes déplacés par l'onde non seulement par une onde de vecteur \mathbf{k} mais aussi par des ondes de longueurs d'onde plus petites, comme cela est bien connu dans la théorie des chaleurs spécifiques. En fait, si l'on cherche à calculer les longueurs des ondes, de fréquence donnée, se propageant dans une chaîne linéaire d'atomes ponctuels liés par des ressorts, en représentant la distribution de matière comme continue par une série de Fourier, on trouve exactement les différentes ondes de vecteurs $\mathbf{k} + n \mathbf{b}$ (n entier).

6. Ondes thermiques.

Pour appliquer les résultats que nous avons obtenus aux ondes thermiques en propageant dans le cristal, il est nécessaire tout d'abord de connaître leurs vecteurs d'onde \mathbf{k} . Nous admettrons pour cela les conditions aux limites de BORN KARMAN, qui supposent que le système des ondes contenues dans un bloc du cristal de dimensions $N_1 \mathbf{a}_1, N_2 \mathbf{a}_2, N_3 \mathbf{a}_3$ se répète semblable à lui-même dans les autres blocs. Comme on le voit, cela revient à dire que le cristal perturbé a une distribution de matière périodique avec une maille $N_1 \mathbf{a}_1, N_2 \mathbf{a}_2, N_3 \mathbf{a}_3$. Si donc l'atome m dans la maille l du cristal est déplacé suivant l'onde

$$\xi_{m,l} = \xi_m e^{2\pi i (\mathbf{k} \mathbf{a}_l, m - \nu t)}$$

il faudra, pour assurer la périodicité, qu'on ait

$$\xi_{m,l} = \xi_{m, l_1 + N_1, l_2, l_3} = \xi_{m, l_1, l_2 + N_2, l_3} = \xi_{m, l_1, l_2, l_3 + N_3}$$

ou, en écrivant l'une de ces relations explicitement,

$$\xi_m e^{2\pi i (\mathbf{k}(\mathbf{a}_l + N_1 \mathbf{a}_1) + \mathbf{k} \varrho_m - \nu t)} = \xi_m e^{2\pi i (\mathbf{k} \mathbf{a}_l + \mathbf{k} \varrho_m - \nu t)}$$

On voit donc qu'il faut choisir \mathbf{k} de façon à satisfaire les relations

$$\begin{aligned} N_1 (\mathbf{k} \mathbf{a}_1) &= p_1 \\ N_2 (\mathbf{k} \mathbf{a}_2) &= p_2 \\ N_3 (\mathbf{k} \mathbf{a}_3) &= p_3 \end{aligned} \quad (p_1, p_2, p_3 \text{ entiers})$$

Si, alors, on exprime \mathbf{k} en coordonnées du réseau de Fourier

$$\mathbf{k} = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3$$

on trouve

$$\beta_i = \frac{p_i}{N_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

On sait d'autre part que les ondes de vecteurs $\mathbf{k} + \mathbf{b}_h$ donnent des déplacements semblables aux ondes \mathbf{k} . Il suffira donc, pour avoir tous les vecteurs d'onde, de choisir les p_i entre $-N_i/2$ et $+N_i/2$.

Le réseau de Fourier devient ainsi, en vertu de (7), rempli de points nouveaux, dont la densité est constante. A chaque vecteurs d'onde \mathbf{k} , plusieurs ondes correspondent, dont les fréquences sont différentes. Il y a tout d'abord les trois ondes acoustiques, l'une «longitudinale», les deux autres «transversales». Puis, ayant des fréquences en général beaucoup plus élevées, il y a les ondes optiques. On sait qu'on trouve ainsi $3n N_1 N_2 N_3$ ondes différentes, lorsque n est le nombre d'atomes contenus dans une maille. Comme $n N_1 N_2 N_3 = N$, le nombre d'atomes du cristal, on retrouvera bien ainsi $3N$ modes de vibrations du cristal correspondant aux $3N$ degrés de liberté des atomes.

Pour obtenir les facteurs de structure (8) attachés à chaque nouveau point du réseau de Fourier, il faut calculer les amplitudes ξ des différentes ondes. Or chacune possède une énergie

$$2\pi^2 \varrho v^2 \xi^2 = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{h\nu}{2} \quad (9)$$

où ϱ et V sont la densité et le volume du cristal

Par conséquent, il faut connaître la fréquence ν en fonction de k . Ce calcul, déjà compliqué¹⁾ pour des cristaux simples comme NaCl, devient très difficile pour des cristaux moins simples. Si, par contre, on demande les facteurs de structure aux alentours des points \mathbf{b}_h du réseau de Fourier seulement, on peut pousser

¹⁾ BLACKMAN, Proc. Roy. Soc. **159**, 416, 1937; KELLERMAN, Roy. Soc. Phil. Trans. A. **238**, 513, 1940.

le calcul plus loin. Les résultats expérimentaux ont montré que c'est dans cette région seulement que l'intensité des rayons X diffusés est considérable et cela est compréhensible puisque l'amplitude ξ des ondes diminue rapidement avec l'augmentation de fréquence (9). C'est donc pour de petites valeurs de k que les ondes auront des amplitudes relativement grandes et donc des facteurs de structure (proportionnels à ξ) relativement grands eux aussi. Cette restriction simplifie considérablement les calculs. En effet, lorsque k est petit (grandes longueurs d'ondes), il suffit de considérer les ondes acoustiques car les ondes optiques ont des fréquences en général beaucoup plus grandes et donc des amplitudes beaucoup plus petites. En plus, il n'y a pas de dispersion, la fréquence est directement proportionnelle à k ; puis, tous les atomes constituant la maille ont la même amplitude (les molécules se déplacent en bloc), et enfin l'énergie de chaque onde est $\propto T$ (limite de (9) pour $h\nu \ll \propto T$).

On trouve alors

$$\xi = \sqrt{\frac{\propto T}{2\pi^2 \rho V}} \frac{1}{k v}$$

v étant la vitesse de l'onde de vecteur k , vitesse qu'on calculera en connaissant les constantes élastiques du cristal; car, en effet, pour ces ondes, les lois de propagation sont celles des milieux continus.

Nous avons montré¹⁾ comment ces calculs s'appliquaient au diamant et comment, en introduisant la densité de facteur de structure dans l'espace de Fourier, les dimensions V du cristal s'éliminaient.

Nous avons supposé, dans ce dernier paragraphe, que les différentes ondes thermiques se superposaient comme si chacune était seule, c'est-à-dire que la présence d'une onde ne modifiait pas le facteur de structure des autres. Dans un article suivant, nous donnerons la théorie des ondes de grandes amplitudes déjà esquissée précédemment²⁾ et nous justifierons alors cette supposition. En plus, nous pourrions calculer l'effet de la température sur le facteur de structure du point non perturbé, effet qui est dû principalement aux ondes de grandes fréquences parce que le nombre de celles-ci est très grand quoique leurs amplitudes soient très petites.

Institut de physique de l'Université de Genève.

¹⁾ WEIGLE, loc. cit.

²⁾ WEIGLE et SMITH, loc. cit.

Kernkräfte in der Elektronenpaartheorie

von J. M. Jauch.

(13. XII. 1941.)

Es werden die Kernkräfte gerechnet in der Elektronenpaartheorie unter Zugrundelegung des skalaren Kopplungstyps. Es gelingt, exakte (nicht störungsmässige) Lösungen zu finden im Falle sehr schwacher und sehr starker Kopplung ($K^2\eta \ll 1$ und $\eta \gg r^2$, wobei Kmc der Abschnideimpuls ist). Im ersten Falle stimmt der Ausdruck für das Kräftepotential im Bereich $Kr \gg 1$ mit dem störungstheoretischen überein. Im zweiten Falle lässt sich die Störungstheorie nicht mehr anwenden. In diesem Zusammenhang ist auch das Verhältnis der beiden Rechnungsarten für das zugehörige Streuprobblem diskutiert. Die Bedingung für die Gültigkeit der Störungstheorie ist dort ebenfalls $K^2\eta \ll 1$.

§ 1. Einleitung.

Unter den Feldtheorien, welche bis jetzt zur Beschreibung der Kernkräfte herangezogen worden sind, zeichnet sich die sogenannte Elektronenpaartheorie dadurch aus, dass sie eine exakte, d. h. nicht störungsmässige Behandlung gestattet. Das liegt an der Tatsache, dass in den Paartheorien die Wechselwirkungsenergie quadratisch in den Wellenfunktionen der Paarteilchen ist. Ganz abgesehen von der physikalischen Bedeutung, welche einer solchen Theorie zukommen mag, ist es von Interesse, das Verhältnis der exakten zur störungsmässigen Lösung zu diskutieren. Die mathematische Methode der exakten Behandlung läuft im wesentlichen auf die Bestimmung der Eigenwerte einer linearen Integralgleichung hinaus, und ist von WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER¹⁾ zur Berechnung der Selbstenergie eines einzelnen schweren Teilchens verwendet worden. Die Anwendung dieser Methode zur Berechnung der Kernkräfte durch CRITCHFIELD und LAMB²⁾ führte jedoch zu so verwickelten Rechnungen, dass von den Autoren kein expliziter Ausdruck für das Potential angegeben worden ist. Eine etwas modifizierte Methode, die von WENTZEL³⁾ am Beispiel der skalaren Paartheorie entwickelt worden ist, ergab dort eine gute Näherung für das Potential, welche für alle Werte des Kopplungsparameters η gültig bleibt. Sie stimmt für sehr kleine Werte von η mit dem

¹⁾ WIGNER CRITCHFIELD und TELLER, Phys. Rev. **56**, 531 (1939).

²⁾ CRITCHFIELD und LAMB, Phys. Rev. **58**, 46 (1940).

³⁾ WENTZEL, Zs. f. Phys. **118**, 277 (1941).

Ausdruck für das Kräftepotential überein, das man mittelst der Störungstheorie erhält. Die Anwendung dieser Methode auf die Elektronenpaartheorie gestattet, wenigstens für sehr schwache und sehr starke Kopplung, Näherungslösungen zu berechnen. Für schwache Kopplung erhalten wir wiederum Übereinstimmung mit dem Resultat aus der Störungstheorie¹⁾.

Die physikalischen Vorstellungen, welche man mit den beiden Rechnungsmethoden verknüpfen kann, sind grundsätzlich voneinander verschieden. Bei der störungsmässigen Rechnung erzeugt der Wechselwirkungsterm Übergänge des Systems: schweres Teilchen plus Elektronenfeld. Die Übergänge, welche zu einem Potential Anlass geben, sind dann die folgenden beiden Prozesse:

1. Das eine schwere Teilchen (N) emittiert ein Elektron-Positron-paar.
2. Dieses Paar wird vom andern Teilchen (P) absorbiert.

$$N + P \rightarrow N + e^+ + e^- + P \rightarrow N + P$$

Bei der strengen Rechnung dagegen stellt man sich alle negativen Zustände besetzt und die positiven leer vor. Durch die Wechselwirkung mit einem schweren Teilchen erfahren nun alle Energieeigenwerte eine Verschiebung. Die Energie der Elektronen in den negativen Zuständen enthält also vermöge dieser Wechselwirkung einen Zusatzterm, den man als eine Selbstenergie des schweren Teilchens interpretieren kann.

Bei Anwesenheit zweier Teilchen ist nun diese Verschiebung nicht einfach das Doppelte der Verschiebung bei einem Teilchen, weil die Eigenfunktionen der Elektronen am Orte des einen Teilchens durch die Anwesenheit des andern gestört sind. Die Verschiebung und damit die Energie des Gesamtsystems hängt also vom Abstand ab, und das gibt zu einer Kraft zwischen den schweren Teilchen Anlass.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den skalaren Koppungstyp, der sich durch grösste Einfachheit auszeichnet. Obwohl mit einem solchen Typ allein keine Übereinstimmung mit der Erfahrung erreicht werden könnte, da er nur spinunabhängige Kräfte liefert, haben wir ihn hier gewählt, da er sich zu einem Studium der mathematischen Methoden besonders gut eignet.

Die Paragraphen 2 bis 7 sind der Behandlung der Kernkräfte gewidmet, welche bei einer solchen Wechselwirkung auftreten. Paragraph 8 enthält eine kurze Diskussion des dazugehörigen Streuproblems. Alle Einheiten sind in \hbar , m und c gemessen.

¹⁾ MARSHAK, Phys. Rev. **57**, 1101 (1940).

§ 2. Allgemeine Ansätze.

Wir betrachten zwei ruhende schwere Teilchen an den Orten ξ und $-\xi$ ($2|\xi| = r$)¹⁾. Die Hamiltonfunktion für das Elektronenfeld lautet dann

$$\bar{H} = \bar{H}^0 + \bar{H}^1$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{H}_0 &= \int \psi^* \{ (\alpha, p) + \beta \} \psi dV_x \\ \bar{H}^1 &= \frac{\eta}{2} \{ \psi^*(-\xi) \beta \psi(-\xi) + \psi^*(\xi) \beta \psi(\xi) \}\end{aligned}\quad (2.1)$$

η ist der Kopplungsparameter. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist aus Bequemlichkeitsgründen beigelegt. Es ist bekannt und wird sich auch im Laufe der Rechnung ergeben, dass ein solcher Term, welcher einer Nahewirkung entspricht, zu Divergenzschwierigkeiten Anlass gibt. Um das zu vermeiden, haben WIGNER et al.²⁾ unter Verzicht auf die relativistische Invarianz der Theorie, den Term (2.1) ersetzt durch

$$\begin{aligned}\bar{H}^1 &= \frac{\eta}{2} \int dV_x \psi^*(x) u^*(x - \xi) \beta \int dV_{x'}, \psi(x') u(x' - \xi) \\ &+ \frac{\eta}{2} \int dV_x \psi^*(x) u^*(x + \xi) \beta \int dV_{x'}, \psi(x') u(x' + \xi)\end{aligned}$$

worin $u(x)$ eine Funktion von $|x|$ allein ist, welche nur innerhalb eines sehr kleinen Bereiches wesentlich von Null verschieden sein soll. Wir wählen in der folgenden Rechnung für diese Funktion

$$u(x) = \left(\frac{K}{x} \right)^{3/2} J_{3/2}(Kx) = (2\pi)^{-3/2} \int_{|k| < K} e^{-i(k, x)} dV_k$$

worin K eine Konstante ist, welche in dieser Theorie die Rolle eines Abschneideimpulses spielt. K betrachten wir als einen neuen Parameter der Theorie. Es ist dann

$$\lim_{K \rightarrow \infty} u(x) = (2\pi)^{3/2} \delta(x)$$

Die Verwendung dieser speziellen Funktion vereinfacht nun die

¹⁾ Wir lassen im Folgenden den Pfeil zur Bezeichnung der Vektoren weg. Den Betrag eines Vektors werden wir, wo es nötig ist, durch Absolutstriche bezeichnen.

²⁾ loc. cit.

Behandlung des Hamiltonoperators im Impulsraum ganz wesentlich. Wir transformieren in den Impulsraum mittelst

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \varphi(k) e^{i(k, x)} dV_k$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \int \varphi^*(k) \{(\alpha, k) + \beta\} \varphi(k) dV_k \\ & + \eta \int \int_{\substack{|k| < K \\ |k'| < K}} \cos(k - k', \xi) \varphi^*(k) \beta \varphi(k') dV_k dV_{k'} \end{aligned}$$

\bar{H} stellt, wenn die Integrale durch Summen ersetzt werden, eine quadratische Form dar. Um sie auf Hauptachsen zu transformieren, bestimmt man die Normalkoordinaten aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \{(\alpha, k) + \beta - \Omega\} \varphi(k) + \eta \cos(k, \xi) \beta \int_{|k'| < K} \cos(k', \xi) \varphi(k') dV_{k'} \\ + \eta \sin(k, \xi) \beta \int_{|k'| < K} \sin(k', \xi) \varphi(k') dV_{k'} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Wir interessieren uns nicht für die Normalkoordinaten selbst, sondern nur für die dazugehörigen Eigenwerte $\Omega(\eta)$, welche von den Vakuum eigenwerten $\Omega(0) \equiv \omega = (1 + k^2)^{1/2}$ verschieden sein können. Multiplizieren wir die Gleichung (2.2) einmal mit

$$\frac{(\alpha, k) + \beta + \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(k, \xi)$$

und einmal mit

$$\frac{(\alpha, k) + \beta + \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(k, \xi)$$

und integrieren wir jedesmal über das Innere einer Kugel $|k| < K$, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die Grössen $\lambda = \int \cos(k, \xi) \varphi(k) dV_k$ und $\mu = \int \sin(k, \xi) \varphi(k) dV_k$

$$\begin{aligned} (1 + \eta A) \lambda + \eta B \mu &= 0 \\ \eta B \lambda + (1 + \eta C) \mu &= 0 \end{aligned}$$

Die A , B und C sind vierreihige Matrizen, welche auf die vierkomponentigen Grössen λ und μ operieren:

$$\begin{aligned} A &= \int \{(\alpha, k) + \beta + \Omega\} \beta \frac{\cos^2(k, \xi)}{\omega^2 - \Omega^2} dV_k \\ B &= \int \{(\alpha, k) + \beta + \Omega\} \beta \frac{\cos(k, \xi) \sin(k, \xi)}{\omega^2 - \Omega^2} dV_k \\ C &= \int \{(\alpha, k) + \beta + \Omega\} \beta \frac{\sin^2(k, \xi)}{\omega^2 - \Omega^2} dV_k \end{aligned}$$

Alle Integrale sind auf das Innere der Kugel $|k| < K$ zu erstrecken. Durch Ausführung der Richtungsintegration in A , B und C erhält man, wenn die Verbindungslinie der beiden schweren Teilchen die x_3 -Richtung ist

$$A = (1 + \beta \Omega) D \quad B = \alpha_3 \beta E \quad C = (1 + \beta \Omega) F$$

$$D = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^K \frac{k^2 r^2 + k r \sin kr}{\omega^2 - \Omega^2} dk$$

$$E = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^K \frac{\sin kr - kr \cos kr}{\omega^2 - \Omega^2} k dk$$

$$F = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^K \frac{k^2 r^2 - kr \sin kr}{\omega^2 - \Omega^2} dk$$

Das Verschwinden der Determinante Δ des Gleichungssystems für λ, μ ergibt uns die Säkulargleichung für Ω .

$$\Delta \equiv \{1 + \eta(1 + \Omega)D + \eta(1 - \Omega)F + \eta^2(1 - \Omega^2)DF + \eta^2 E^2\}^2 \\ + \{1 + \eta(1 - \Omega)D + \eta(1 + \Omega)F + \eta^2(1 - \Omega^2)DF + \eta^2 E^2\}^2 \quad (2.3)$$

Nach dem Vorgehen von WIGNER et al. ersetzen wir das kontinuierliche Spektrum im k -Raum durch ein diskontinuierliches.

$$k = n\kappa \quad n = 0, 1, \dots, N \quad \omega^2 = 1 + n^2 \kappa^2 \\ K = N\kappa \quad N \gg 1 \quad \Omega^2 = 1 + \nu^2 \kappa^2$$

Die Integrale D , E und F gehen dann in Summen über.

$$D = 2\pi\kappa \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \left\{ 1 + \frac{\sin n\kappa r}{n\kappa r} \right\} \\ E = \frac{2\pi\kappa}{r} \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \left\{ \frac{\sin n\kappa r}{n\kappa r} - \cos n\kappa r \right\} \quad (2.4) \\ F = 2\pi\kappa \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \left\{ 1 - \frac{\sin n\kappa r}{n\kappa r} \right\}$$

Wir setzen $\nu = n + \varepsilon_n$. Die Bestimmungsgleichung für ε_n ist $\Delta = 0$; zu jedem n gibt es acht Lösungen ε_{ns} ($s = 1, 2, \dots, 8$) dieser Gleichung. In den langsam veränderlichen Termen in Δ können wir Ω durch ω ersetzen, da die Abweichung von den Vakuum eigen-

werten nur infinitesimal ist¹⁾. Aus dem gleichen Grunde können wir für die Gesamtenergie des Systems schreiben

$$U(r, \eta, K) = -\kappa^2 \sum_{n=1}^N \frac{n}{(1 + \kappa^2 n^2)^{1/2}} \sum_s \varepsilon_{ns}$$

Das Minuszeichen steht hier, weil es sich um die Verschiebung der negativen Energieniveaux handelt. Der Nullpunkt der Energie ist gleich der Energie des Vakuums gewählt. In der Grenze $\kappa \rightarrow 0$ kann man diese Summe über n durch ein Integral ersetzen

$$U(r, \eta, K) = - \int_0^K \frac{k}{(1 + k^2)^{1/2}} \left\{ \sum_s \varepsilon_{ns}(k) \right\} dk \quad (2.5)$$

§ 3. Auswertung der Summen.

Die Summen, die in (2.4) auftreten, lassen sich mit Hilfe der folgenden Fourier'schen Reihe auswerten²⁾. Sei $\varphi(\varrho) = \cos v(\pi - \varrho)$ für $0 \leq \varrho \leq 2\pi$ und sonst periodisch, mit der Periode 2π , dann gilt für $\varphi(\varrho)$ die Fourier'sche Reihe

$$\varphi(\varrho) = \cos v(\pi - \varrho) = \frac{v}{\pi} \sin v\pi \left\{ \frac{1}{v^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varrho}{n^2 - v^2} \right\}$$

Daraus gewinnt man für $\varrho = 0$ die bekannte Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - v^2} = \frac{1}{2v^2} - \frac{\pi}{2v} \cotg v\pi$$

Ferner erhält man für die Ableitung

$$\varphi'(\varrho) = v \sin v(\pi - \varrho) = \frac{2v}{\pi} \sin v\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\varrho}{n^2 - v^2}$$

daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\varrho}{n^2 - v^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin v(\pi - \varrho)}{\sin v\pi} \quad \text{für } 0 < \varrho < 2\pi$$

¹⁾ Dies gilt allerdings nicht für die äussersten Eigenwerte ($n = 0$ und $n = N$), die sich bei wachsender Kopplungsstärke η vom kontinuierlichen Spektrum ablösen können. In § 7 wird aber gezeigt, dass diese diskreten Eigenwerte in den hier interessierenden Grenzfällen keinen Beitrag zu den Kernkräften liefern.

²⁾ WENTZEL, loc. cit.

Wir setzen also

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \frac{n \sin n \kappa r}{n^2 - \nu^2} &= \frac{\pi}{2} \frac{\sin \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} - R(\nu) \\ \sum_{n=1}^N \frac{n^2 \cos n \kappa r}{n^2 - \nu^2} &= -\frac{\nu \pi}{2} \frac{\cos \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} - T(\nu) \\ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 - \nu^2} &= \frac{1}{2 \nu^2} - \frac{\pi}{2 \nu} \cotg \nu \pi - S(\nu) \\ \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} &= N + \frac{1}{2} - \frac{\pi \nu}{2} \cotg \nu \pi - \nu^2 S(\nu)\end{aligned}$$

Die Reste schätzen wir durch Integrale ab

$$R(\nu) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n \sin n \kappa r}{n^2 - \nu^2} \approx \int_N^{\infty} \frac{\sin n \kappa r}{n} \frac{dn}{1 - \frac{n^2}{N^2}} = \frac{\cos Kr}{Kr \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right)} + \dots$$

$$T(\nu) = \frac{d}{d(\kappa r)} R(\nu) \approx -\frac{\sin Kr}{\kappa r \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right)} + \dots$$

In $T(\nu)$ und $R(\nu)$ sind nur die ersten Terme einer Entwicklung nach fallenden Potenzen von Kr angeschrieben. Weitere Terme erhält man durch partielle Integration. Wir werden im Folgenden Terme von der relativen Grössenordnung $(Kr)^{-1}$ vernachlässigen und beschränken uns damit für r auf den Bereich $r \gg 1/K$. In dieser Näherung können wir R vernachlässigen. (Ausgenommen davon ist die Diskussion des Spezialfalles $r = 0$, s. u.). Mit den so gewonnenen Ausdrücken gehen wir in (2.3) ein und ersetzen überall, ausser in der trigonometrischen Funktion ν durch n . Dann wird

$$\begin{aligned}D &= Z - \pi^2 k \cotg \nu \pi + \frac{\pi^2}{r} \frac{\sin \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} \\ E &= Y + \frac{\pi^2}{r^2} \frac{\sin \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} + \frac{k \pi^2}{r} \frac{\cos \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi} \\ F &= Z - \pi^2 k \cotg \nu \pi - \frac{\pi^2}{r} \frac{\sin \nu(\pi - \kappa r)}{\sin \nu \pi}\end{aligned} \quad (3.1)$$

mit

$$\begin{aligned}Z &= 2 \pi \left(K - \frac{k}{2} \ln \frac{K+k}{K-k} \right) \\ Y &= \frac{2 \pi}{r^2} \frac{\sin Kr}{1 - \frac{k^2}{K^2}}\end{aligned}$$

§ 4. Diskussion zweier Spezialfälle.

Bevor wir zur Berechnung der Kernkräfte übergehen, wollen wir zwei Spezialfälle diskutieren.

1. $r \sim 0$. Bei sehr kleinem Abstand sind die vorstehenden Formeln nicht gültig, denn wir haben darin Terme von der relativen Grössenordnung $(Kr)^{-1}$ vernachlässigt. Wir gehen deshalb von den exakten Formeln (2.4) aus und entwickeln darin nach Potenzen von κr .

$$D = 2\pi\kappa \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \{2 - 1/6 n^2 \kappa^2 r^2 + \dots\} = 2 D_0$$

$$E = \frac{\pi \kappa^2 r}{3} \sum \frac{n^4}{n^2 - \nu^2} + \dots \sim r$$

$$F \sim r^2$$

Die Säkulargleichung (2.3) lautet im Limes $r = 0$:

$$\{1 + 2\eta(1 + \omega)D_0\}^2 \{1 + 2\eta(1 - \omega)D_0\}^2 = 0$$

Es gibt nur zwei ε_{ns} -Werte, welche von Null verschieden sind, aber jeder zählt doppelt.

$$U(0, \eta, K) = -2\kappa^2 \sum \frac{n}{(1 + \kappa^2 n^2)^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_{n1} + \varepsilon_{n2})$$

Man hätte dasselbe Resultat erhalten, wenn man mit einem einzigen schweren Teilchen gerechnet, aber in der Hamiltonfunktion η durch 2η ersetzt hätte, wie man unmittelbar aus (2.2) entnimmt. Bezeichnen wir die Selbstenergie eines schweren Teilchens mit $U(\eta, k)$, so gilt folglich

$$U(0, \eta, K) = U(2\eta, K)$$

2. $r \rightarrow \infty$. In D und F verschwinden für diesen Grenzfall die Terme mit dem Sinus, während E überhaupt verschwindet. $D = F = D_0, E = 0$

$$\Delta = \{1 + \eta(1 - \omega)D_0\}^4 \{1 + \eta(1 + \omega)D_0\}^4 \quad (4.1)$$

Wir erhalten in diesem Fall also wiederum dieselben Wurzeln, wie für ein einziges Teilchen, aber jede der Wurzeln zählt jetzt vierfach statt zweifach

$$U(\infty, \eta, K) = -4\kappa^2 \sum \frac{n}{(1 + \kappa^2 n^2)^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_{n1} + \varepsilon_{n2}) = 2U(\eta, K)$$

Zwei Teilchen, die unendlich weit entfernt sind, haben also die doppelte Selbstenergie eines einzigen Teilchens. Setzen wir gemäss (3.1) für

$$D_0 \equiv 2\pi\kappa \sum_{n=1}^N -\frac{n^2}{n^2 - \nu^2} \cong Z - \pi^2 k \cotg \nu\pi$$

so wird nach (4.1)

$$1 + \eta(1 \mp \omega)D_0 = 0$$

$$\cotg \nu\pi = \frac{1}{\pi^2 k} \left\{ \frac{1 \pm \omega}{\eta(1 - \omega^2)} + Z \right\} \quad (4.2)$$

Wir setzen wieder $\nu = n + \varepsilon$ und unterscheiden die beiden Lösungen von (4.2) als ε_1 und ε_2 . Dann wird vermöge der Formel

$$\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi = \frac{\cotg \varepsilon_1 \pi + \cotg \varepsilon_2 \pi}{\cotg \varepsilon_1 \pi \cotg \varepsilon_2 \pi - 1}$$

$$\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi = 2\eta\pi^2 k \frac{1 - Z\eta k^2}{1 + 2Z\eta - (Z^2 - k^2\pi^4)\eta^2 k^2} \quad (4.3)$$

Für die Gesamtenergie erhalten wir

$$U(\infty, \eta, k) = +2U(\eta, k) =$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^K \frac{k dk}{(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}} \arctg 2\pi^2 \eta k \frac{1 - Z\eta k^2}{1 + 2Z\eta - (Z^2 - k^2\pi^4)\eta^2 k^2} \quad (4.4)$$

Die Formel (4.4) ist identisch mit der Formel (10) in der Arbeit von CRITCHFIELD und LAMB, wenn man in dieser η durch $-\eta/2$, $f(q)$ durch $-2Z$ und $v(p)$ durch die Funktion $v(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p < K \\ 0 & \text{für } p > K \end{cases}$ ersetzt. Man sieht, dass die Verschiebung der Energieniveaux und auch die Selbstenergie für sehr kleine η proportional zu η ist. In der Störungstheorie entspricht diesem Term das Diagonalelement der Störungsfunktion \bar{H} .

§ 5. Potential bei schwacher Kopplung.

Zur Berechnung der Energie des Systems, bestehend aus schweren Teilchen in endlichem Abstand und Elektronenfeld, gehen wir aus von den Ausdrücken (3.1), welche wir in die Säkular-

gleichung (2.3) einsetzen. Wenn wir noch mit $\sin^2 \nu$ durchmultiplizieren, lautet die Säkulargleichung

$$\begin{aligned} & \sin^2 \nu \pi \{1 + \eta(D + F) \pm \eta \omega(D - F) + \eta^2(1 - \omega^2)DF + \eta^2 E^2\} \\ &= \sin^2 \nu \pi + 2 \eta \sin \nu \pi (Z \sin \nu \pi - \pi^2 k \cos \nu \pi) \\ & \quad \pm 2 \eta \omega \frac{\pi^2}{r} \sin \nu \pi \sin \nu(\pi - \kappa r) \\ & - \eta^2 k^2 (Z \sin \nu \pi - \pi^2 k \cos \nu \pi)^2 + \eta^2 \frac{\pi^4}{r^2} k^2 + \eta^2 \frac{\pi^4 k}{r^3} \sin 2 \nu(\pi - \kappa r) \\ & + \eta^2 \frac{\pi^4}{r^4} \sin^2 \nu(\pi - \kappa r) + \eta^2 Y^2 \sin^2 \nu \pi + 2 Y \eta^2 \frac{\pi^2}{r^2} \sin \nu \pi \sin \nu(\pi - \kappa r) \\ & + 2 \eta^2 Y \frac{k \pi^2}{r} \sin \nu \pi \cos \nu(\pi - \kappa r) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Wir haben nur einen der Faktoren von (2.3) angeschrieben. Wir setzen nun $\nu = n + \varepsilon$, dann geht ε mit η nach Null, und entwickeln alles nach Potenzen von η bis zur dritten Ordnung in η . Wenn wir nur bis zur zweiten Ordnung gingen, erhielten wir ein r -unabhängiges Potential, nämlich die Selbstenergie zweier unendlich weit entfernter Teilchen (Spezialfall 2 in § 4). Wir vernachlässigen $\kappa \nu$ gegen 1 und erhalten für (5.1)

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon A_1 + A_0 = 0 \\ & A_0 = \eta^2 \pi^4 k^2 \left(\frac{1}{k^4 r^4} \sin^2 k r - \frac{1}{k^3 r^3} \sin 2 k r + \frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \\ & A_1 = -2 \eta \left\{ \eta \pi^3 k \left(1 + \omega \frac{\sin k r}{k r} \right) - \eta^2 \left[\pi^3 k^3 Z + \frac{\pi^5 k}{r^3} \cos 2 k r \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\pi^5}{2 r^2} \sin 2 k r + Y \frac{\pi^3 k}{r} \left(\cos k r - \frac{\sin k r}{k r} \right) \right] \right\} \\ & A_2 = \pi^2 + 2 \eta \pi^2 \left(Z + \frac{\omega \pi^2}{r} \cos k r \right) \end{aligned}$$

Eine Abschätzung der höhern Terme zeigt, dass diese verschwindend sind, falls $K^2 \eta \ll 1$ ist, was wir im folgenden immer voraussetzen. Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist immer positiv, die Wurzeln sind also reell. Wir benötigen nur die Summe der beiden Wurzeln $-A_1/A_2$. Wegn $Z \eta \ll 1$ können wir in A_2 nach η entwickeln. In dem so erhaltenen Ausdruck nehmen wir nur die r -abhängigen Terme und summieren über alle Lösungen der Säkulargleichung. Ferner können wir die

Terme mit $Y \left(\sim \frac{\sin Kr}{r^2} \right)$ streichen. Sie geben nämlich zu kurzperiodischen Schwankungen des Potentials Anlass, welche nur von unserer scharfen Abschneidegrenze herrühren, und denen offenbar keine physikalische Bedeutung zukommen kann. Wir können sie durch eine Mitteilung über einen r -Bereich von der Grössenordnung $1/K$ beseitigen. Das so gemittelte Potential wird schliesslich mittelst (2.5)

$$V(r) = \bar{U}(r, \eta, K) = + \frac{8 \pi^3 \eta^2}{r^2} \int_0^K \frac{k dk}{(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left(1 + k^2 - \frac{1}{2 r^2} \right) \sin 2 k r + \frac{k}{r} \cos 2 k r \right\}$$

Die vorkommenden Integrale lassen sich alle durch Differentiation nach r aus dem einen ableiten

$$\int_0^K \frac{\cos 2 k r dk}{(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{i \pi}{2} H_0^{(1)}(2 i r)$$

wo $H_0^{(1)}$ die Hankel'sche Zylinderfunktion ist. Aus den bekannten Differentialbeziehungen der Zylinderfunktionen folgt

$$V(r) = 6 \pi^4 \eta^2 \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{r^2} H_1^{(1)}(2 i r) - \frac{i}{r} H_0^{(1)}(2 i r) \right\}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem störungsmässig berechneten überein¹⁾. Die Bedingungen für die Gültigkeit dieser Näherung sind $\eta K^2 \ll 1$ und $Kr \gg 1$.

§ 6. Potential bei starker Kopplung.

In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf den Fall der starken Kopplung, insbesondere auf den Grenzfall $\eta \rightarrow \infty$. In diesem Grenzfall können wir uns in der Säkulargleichung (2.3) auf die Terme beschränken, welche η^2 enthalten. Das Resultat der Rechnung ist dann das erste Glied einer Entwicklung nach fallenden Potenzen von η .

$$\Delta = \eta^2 \Delta_0^4 + \dots = b_2 \eta^2 + b_1 \eta + \dots$$

¹⁾ MARSHAK, Phys. Rev. **57**, 1101 (1940), Formel (7) erster Term. Es ist nur zu beachten, dass η in unserer Formel durch 2η zu ersetzen ist, um Übereinstimmung zu erhalten, da wir in Gleichung (2.1) einen Faktor $1/2$ explizite eingeführt haben.

$r^2 b_2$ und b_1 sind von derselben Grössenordnung. Unser erstes Glied stellt also dann eine gute Näherung dar, wenn $\eta \gg r^2$ ist.

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (1 - \Omega^2) DF + E^2 \\ &= \left\{ (Z - \pi^2 k \cotg v\pi)^2 - \frac{\pi^4}{r^2} \frac{\sin^2 v (\pi - \kappa r)}{\sin^2 v\pi} \right\} (1 - \Omega^2) \\ &\quad + \left\{ Y + \frac{\pi^2}{r^2} \frac{\sin v (\pi - \kappa r)}{\sin v\pi} + \frac{k\pi^2}{r} \frac{\cos v (\pi - \kappa r)}{\sin v\pi} \right\}^2 = 0 \end{aligned}$$

Wir schreiben diese Gleichung

$$\begin{aligned} \{Z \sin v\pi - \pi^2 k \cos v\pi\}^2 &= \frac{\pi^4}{r^2} \sin^2 v (\pi - \kappa r) \\ + \frac{1}{k^2} \left\{ Y \sin v\pi + \frac{\pi^2}{r^2} \sin v (\pi - \kappa r) + \frac{k\pi^2}{r} \cos v (\pi - \kappa r) \right\}^2 &\equiv B(r, v) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Der Term auf der linken Seite ist unabhängig von r , und $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r, v) = 0$.

Die Verschiebung des n -ten Eigenwertes bei unendlichem Abstand der beiden Kerne ist $\nu_0 = n + \varepsilon_n$ und bestimmt sich aus

$$Z \sin \nu_0 \pi - \pi^2 k \cos \nu_0 \pi = 0 \quad \text{tg } \nu_0 \pi = \frac{\pi^2 k}{Z} \quad (6.2)$$

Man hätte dasselbe auch aus der Formel (4.2) durch den Grenzübergang $\eta \rightarrow \infty$ erhalten können. Bei endlichem Abstand der beiden Kerne betrachten wir $B(r, v)$ als eine Störung und setzen $v = \nu_0 + \delta$. Wir entwickeln dann linke und rechte Seite von (6.1) nach Potenzen von δ . Die linke Seite wird wegen (6.2) mit einem quadratischen Term beginnen, wir gehen deshalb auf der rechten Seite bis zum linearen Term.

$$(Z \sin v\pi - \pi^2 k \cos v\pi)^2 = C \delta^2 + \dots$$

$$B(r, v) = B_0 + \delta B_1 + \dots$$

$$C = \pi^2 (Z^2 + \pi^4 k^2)$$

$$B_0 = \frac{\pi^4}{r^2} \sin^2 \nu_0 (\pi - \kappa r) + \frac{1}{k^2 r^4} \left\{ r^2 Y \sin \nu_0 \pi + \pi^2 \sin \nu_0 (\pi - \kappa r) + \pi^2 k r \cos \nu_0 (\pi - \kappa r) \right\}^2 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\pi^5}{r^2} \sin 2 \nu_0 (\pi - \kappa r) + \frac{2\pi}{k^2 r^4} \left\{ r^2 Y \sin \nu_0 \pi + \pi^2 \sin \nu_0 (\pi - \kappa r) + \pi^2 k r \cos \nu_0 (\pi - \kappa r) \right\} \\ &\quad \times \left\{ r^2 Y \cos \nu_0 \pi + \pi^2 \cos \nu_0 (\pi - \kappa r) - \pi^2 k r \sin \nu_0 (\pi - \kappa r) \right\} \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{B_1 \pm (B_1^2 + 4 B_0 C)^{\frac{1}{2}}}{2 C}$$

Damit $\delta \ll 1$ ist, müssen sowohl B_1/C als auch $B_0/C \ll 1$ sein. Für B_0/C ist das wegen $Kr \gg 1$ für alle k , welche nicht zu nahe an K liegen erfüllt, denn für kleine k ist die quadrierte geschweifte Klammer rechterhand $\sim k^2$ und hebt den Faktor $1/k^2$ im Limes $k \rightarrow 0$ weg. Das ist jedoch nicht der Fall für B_1/C . Durch die Differentiation von B_0 werden einige der Sinusfunktionen durch Kosinusfunktionen ersetzt, so dass jetzt das Produkt der geschweiften Klammern rechterhand nur noch $\sim k$ ist. Der Ausdruck B_1/C ist deshalb nur noch klein, solange $k \gg 1/K^3 r^4$. Der Fehler, den wir machen, wenn wir trotzdem mit unserer Näherung für δ bis $k = 0$ weiterrechnen, ist aber höchstens von der Grössenordnung $1/K^6 r^8$ und kann neben dem Hauptterm vernachlässigt werden. Wir benötigen wiederum nur die Summe der beiden Wurzeln: $\delta_1 + \delta_2 = B_1/C$.

Wenn wir mit den Ausdrücken (6.3) $U(r, \eta, K)$ ausrechnen, so erhalten wir wieder kurzperiodische Schwankungen, welche von der scharfen Abschneidegrenze herrühren. Wenn wir sie wieder durch eine Mitteilung über einen r -Bereich von der Grössenordnung $\sim 1/K$ beseitigen, so hat das zur Folge, dass wir im Ausdruck für δ die in Y linearen Terme streichen können. Ferner können wir uns auf die kleinen k -Werte beschränken ($k \ll K$). Der Term mit Y^2 , der noch stehen bleibt, gibt zu einem Potential langer Reichweite Anlass. Innerhalb der Reichweite des Potentials der beiden andern Terme ist er jedoch um eine Grössenordnung Kr kleiner als dieses. Wir lassen ihn deshalb ebenfalls weg. In den übrigbleibenden Termen können wir noch ν_0 durch n ersetzen, denn die oben erwähnte Mitteilung über einen r -Bereich der Grösse $1/K$ hat zur Folge, dass nur aus dem Bereich $k \ll K$ ein wesentlicher Beitrag zum Potential geliefert wird. Für diesen Bereich ist aber gemäss (6.2) $\varepsilon_n \ll 1$.

Die Summation über alle k Werte ersetzen wir durch eine Integration

$$U = 4 \int_0^K \frac{dk}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{B_1}{C}$$

Gemäss (6.3) wird daraus mit den oben erwähnten Vereinfachungen

$$\begin{aligned} V(r) = \bar{U}(r, \eta, k) &= -\frac{\pi}{K^2 r^3} \int_0^\infty \left(\cos 2kr - \frac{\sin 2kr}{2kr} \right) \frac{dk}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{i\pi^2}{2K^2 r^3} \left\{ H_0^{(1)}(2ir) + \frac{1}{r} \int_r^\infty H_0^{(1)}(2i\rho) d\rho \right\} \end{aligned}$$

$V(r)$ stellt ein anziehendes Potential von der Reichweite 1 dar. Der Gültigkeitsbereich der Näherung ist $\eta \gg r^2$. $V(r)$ strebt im Limes $K \rightarrow \infty$ nach Null. Wenn $r > 1$ ist, dann müsste der schwache Zusatzterm langer Reichweite mitberücksichtigt werden, den wir weggelassen haben. Doch wird ihm kaum eine physikalische Bedeutung zukommen.

§ 7. Diskussion der diskreten Zustände.

Wenn die Kopplung stark genug ist, dann können sich diskrete Eigenwerte vom kontinuierlichen Spektrum sowohl am oberen als auch am unteren Ende ablösen. Die Verschiebung, welche diese diskreten Eigenwerte bei einer Abstandsänderung der beiden schweren Teilchen erfahren, ist dann nicht mehr infinitesimal und kann deshalb zum Potential einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag geben.

Wie im Folgenden gezeigt werden soll, ist dieser Beitrag für die beiden von uns betrachteten Grenzfälle gerade Null. Das braucht aber durchaus nicht für den allgemeineren Fall beliebiger η zuzutreffen.

Für das obere Ende ($|\Omega| < 1$) kann man sofort sehen, dass bei unendlich starker Kopplung keine diskreten Zustände auftreten können. In der Gleichung $(1 - \Omega^2)DF + E^2 = 0$ sind nämlich beide Summanden positiv und auch für $|\Omega| = 1$ wird E^2 nicht gleich Null. Es gibt also keine Lösung dieser Gleichung für $|\Omega| \leq 1$.

Für endliche Werte des Kopplungsparameters kann man bei unendlichem Abstand der beiden schweren Teilchen das diskrete Ω leicht berechnen. Ω ist dann die Lösung der Gleichung

$$1 + 2\eta D_0 + \eta^2(1 - \Omega^2) D_0 \equiv \{1 + \eta(1 + \Omega) D_0\} \{1 + \eta(1 - \Omega) D_0\} = 0$$

die man erhält, indem man in (2.3) $r = \infty$ setzt

$$(1 \pm \Omega) D_0 = -\frac{1}{\eta}$$

Diese Gleichung ist bei CRITCHFIELD¹⁾ eingehend diskutiert. Sie hat zwei Lösungen, welche mit wachsendem η nach ± 1 streben. Eine genauere Analyse zeigt, dass bei festgehaltenem η aber abnehmendem Abstand der beiden Teilchen die beiden Lösungen ebenfalls nach ± 1 streben.

Unterhalb des kontinuierlichen Spektrums ($\Omega < -\sqrt{1 + K^2}$)

¹⁾ CRITCHFIELD, Phys. Rev. **59**, 48 (1941).

tritt für alle Werte von η ein vierfach entarteter diskreter Eigenwert auf, welcher im Grenzfalle $r \rightarrow \infty$ aus der Gleichung

$$\{1 + \eta(1 - \Omega) D_0\}^4 \{1 + \eta(1 + \Omega) D_0\}^4 = 0$$

zu berechnen ist.

$$\Omega = -(1 + L^2)^{\frac{1}{2}} \quad L > K$$

$$D_0 = 2\pi \int_0^K \frac{k^2}{k^2 - L^2} = 2\pi \left((K - \frac{L}{2}) \ln \frac{L+K}{L-K} \right) \\ - \frac{1}{\eta} = y(L) \equiv \pm 2\pi L \left(K - \frac{L}{2} \ln \frac{L+K}{L-K} \right)$$

Für $L \gg K$ verhält sich der Ausdruck rechts wie $1/L$. Daraus folgt, dass für grosse η L wie η nach unendlich geht. Wir können also für endliche η eine Potenzreihe nach fallenden Potenzen von η ansetzen, deren erstes Glied proportional η ist.

$$L(\eta) = a_1 \eta + a_0 + \text{Glieder mit } 1/\eta$$

Um nun die r -Abhängigkeit der beiden Koeffizienten a_1, a_0 zu untersuchen, welche einen Zusatzterm zum Potential ergäbe, gehen wir mit diesem Ansatz in die Säkulargleichung mit den r -abhängigen Termen ein. Da wir den Grenzfall $\eta \rightarrow \infty$ untersuchen wollen, entwickeln wir in den Integralen alles nach fallenden Potenzen von η . Der höchste Term von Δ (2.3) ist dann unabhängig von η und ist, wenn wir $Kr \gg 1$ voraussetzen $= 1 - \frac{4\pi^2}{9} \frac{K^6}{a_1^3}$.

Daraus folgt, wenn wir ihn gleich Null setzen: $a_1 = \frac{2\pi}{3} K^3$.

Der Koeffizient von $1/\eta$ ist proportional zu $1 - \frac{2\pi}{3} K^3 \frac{a_0}{a_1}$. Daraus ergibt sich $a_0 = \frac{3}{2\pi} \frac{a_1}{K^3} = 1$.

Es wird somit für endlichen Abstand r

$$L(\eta) \approx \frac{2\pi}{3} K^3 \eta + 1 + \text{Glieder mit } \frac{1}{\eta}$$

Die beiden Koeffizienten a_1 und a_0 sind also r -unabhängig und der diskrete Eigenwert unterhalb des Spektrums trägt im Limes $\eta \rightarrow \infty$ ($\eta \gg 1$) nichts zum Potential bei.

Im Grenzfalle der schwachen Kopplung ($K^2 \eta \ll 1$) kann am obern Ende des Spektrums ($|\Omega| < 1$) kein diskreter Eigenwert auftreten, wie schon CRITCHFIELD in der oben zitierten Arbeit gezeigt hat. Am untern Ende tritt zwar ein solcher auf, doch ist seine Abweichung von K nur infinitesimal, nämlich von der Grössenordnung $e^{-1/K^2|\eta|}$, und er trägt deshalb nichts zum Potential bei.

§ 8. Berechnung der Streuung für $K^2 \eta \ll 1$.

Für schwache Kopplung lässt sich die Streuung entweder mittels der Störungstheorie, oder durch strenge Lösung der Wellengleichung im x -Raum und nachherige Entwicklung nach Potenzen von η berechnen. Beide Methoden ergeben dasselbe Resultat.

In der Störungstheorie ist der Streuquerschnitt proportional dem Matrixelement der Störungsfunktion.

$$I(\vartheta) = \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2 |(p | H' | p_0)|^2$$

$H' = \eta \beta$ (Es ist jetzt nur ein schweres Teilchen anwesend.)

$$|(p | H' | p_0)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{(\lambda, \lambda_0)} |(\lambda p | H' | \lambda_0 p_0)|^2$$

p_0 ist der Anfangsimpuls und p der Impuls nach der Streuung. λ, λ_0 numeriert die beiden Spinzustände

$$(\lambda, p | H' | \lambda_0 p_0) = a^{*(\lambda)}(p) \beta a^{(\lambda_0)}(p_0) \quad |p - p_0| < K$$

darin sind $a^{(\lambda)}(p)$ die Amplituden der ebenen Welle mit dem Impuls p und dem Spin λ .

Es ist also

$$\begin{aligned} |(p | H' | p_0)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{(\lambda, \lambda_0)} (a^{*(\lambda)}(p) \beta a^{(\lambda_0)}(p_0)) (a^{*(\lambda_0)}(p_0) \beta a^{(\lambda)}(p)) \\ &= \frac{1}{2} \text{sp} \{ V(p) \beta v(p_0) \beta \} \end{aligned}$$

worin

$$V = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(z, p) - \beta^2}{\omega} \right)$$

Die Ausrechnung ist elementar und ergibt direkt

$$I(\vartheta) = \left(\frac{\eta}{2\pi} \right)^2 \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 - \beta^2} \quad (7.1)$$

worin ϑ den Streuwinkel und β die Geschwindigkeit darstellt.

Die Streuung ist nach der „exakten“ Methode von WEINBERG gerechnet worden¹⁾. Sein Resultat lautet in unserer Bezeichnung

$$\sigma_{\text{el}} = \left(\frac{\eta}{2\pi} \right)^2 \frac{k^2 (1 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) + 1 - k^2 (|\eta k F|^2 - 2 \eta f)}{|1 + 2 \eta F - |\eta k F|^2|^2}$$

mit

$$f = -\frac{K}{2\pi^2} \quad F = -\frac{2k + \pi i}{4\pi^2}$$

und geht für $K^2 \eta \ll 1$ in die Formel (7.1) über.

¹⁾ WEINBERG, Phys. Rev. 59, 776 (1941).

Der Gültigkeitsbereich der Störungsrechnung ist somit für Kernkräfte und Streuung $K^2\eta \ll 1$.

Herr Prof. WENTZEL hat durch seine unermüdliche Bereitschaft zu Diskussionen und Ratschlägen diese Arbeit wesentlich gefördert. Ihm sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Physikalisches Institut der E.T.H., Zürich.

Classement des Masses atomiques III.

Les atomes radioactifs naturels.

par Adrien Jaquerod.

(22. I. 42.)

Les masses des atomes radioactifs ne sont pas connues avec une grande précision. Par contre, l'énergie mise en jeu dans les transformations radioactives permet de calculer avec une exactitude remarquable les défauts de masse que présentent ces atomes les uns par rapport aux autres. Il est donc possible d'étendre aux atomes en question le classement exposé dans les deux premières parties de ce travail.

Dans le tableau I ne figuraient que quatre atomes radioactifs: il s'agissait d'une première étude sommaire. Dans le tableau V ci-joint on a par contre reproduit toutes les données fournies par HAHN, FLÜGGE et MATTAUCH¹⁾; on y a ajouté celles relatives aux atomes qui précèdent immédiatement les éléments radioactifs: Os, Ir, Pt, Au, Tl, Pb, Bi, de façon à opérer le raccordement avec les atomes stables.²⁾

Dans ce tableau V figurent, pour chaque atome, en plus de Z et A , le nombre n de part. α contenues dans le noyau; l'excès proton-neutron tel qu'il est précisé dans la seconde partie de ce travail, (p. 74); le défaut de masse ΔM ; la valeur de $\Delta'M$ donnée par l'expression (9); enfin des données calculées dont il sera question plus bas.

Si l'on porte sur un graphique les valeurs de ΔM figurant dans la 6ème colonne du tableau V en fonction de A , on constate que les points s'alignent de façon admirable. L'effet n'est saisissant que si l'on opère avec une très grande échelle, de sorte qu'il a paru inutile de reproduire ici ce graphique. Seuls les premiers atomes radioactifs: Po, AcC', ThC', RaC' sortent très sensiblement de l'alignement. La droite qui passe le mieux possible par

¹⁾ O. HAHN, S. FLÜGGE und J. MATTAUCH. Phys. Ztschr. **41**, p. 1 (1940).

²⁾ Les valeurs de M calculé pour Tl et Bi ne concordent pas exactement avec celles figurant dans les tableaux II et III; pour ces dernières, un mode de calcul graphique avait été utilisé.

Tableau V.

Atome	Z	A	n	Excès prot- neut	ΔM	ΔM calc	$\Delta' M \times 10^3$	M calculé
Os	76	190	38	0-38	1,600	1,6051	449	190,0331
		192	38	0-40	1,618	1,6192	467	192,0369
Ir	77	191	38	1-38	1,606	1,6121	455	191,0342
		193	38	1-40	1,623	1,6262	472	193,0380
Pt	78	194	39	0-38	1,632	1,6332	450	194,0391
		195	39	0-39	1,641	1,6402	459	195,0410
		196	39	0-40	1,651	1,6472	470	196,0430
		198	39	0-42	1,664	1,6612	482	198,0469
Au	79	197	39	1-40	1,659	1,6542	477	197,0441
Tl	81	203	40	1-42	1,693	1,6962	481	203,0542
		205	40	1-44	1,711	1,7102	499	205,0581
Pb	82	204	41	0-40	1,701	1,7032	459	204,0554
		208	41	0-44	1,737	1,7312	495	208,0632
Bi	83	209	41	1-44	1,747	1,7383	505	209,0641
Po	84	210	42	0-42	1,752	1,7452	479	210,0654
AcC'		211	42	0-43	1,754	1,7511	481	211,0684
ThC'		212	42	0-44	1,761	1,7570	488	212,0715
RaC'		214	42	0-46	1,772	1,7689	499	214,0775
AcA		215	42	0-47	1,776	1,7748	503	215,0806
ThA		216	42	0-48	1,781	1,7807	508	216,0836
RaA		218	42	0-50	1,791	1,7926	518	218,0896
EmAc	86	219	43	0-47	1,798	1,7985	495	219,0911
EmTh		220	43	0-48	1,805	1,8044	502	220,0941
EmRa		222	43	0-50	1,815	1,8162	512	222,1002
AcX	88	223	44	0-47	1,822	1,8222	489	223,1015
ThX		224	44	0-48	1,827	1,8281	494	224,1045
Ra		226	44	0-50	1,840	1,8399	507	226,1106
Ac	89	227	44	1-50	1,847	1,8458	514	227,1128
RdAc	90	227	45	0-47	1,847	1,8458	483	227,1120
RdTh		228	45	0-48	1,852	1,8518	488	228,1150
Io		230	45	0-50	1,864	1,8636	500	230,1211
Th		232	45	0-52	1,875	1,8754	511	232,1272
Pa	91	231	45	1-50	1,870	1,8695	506	231,1233
U _{II}	92	234	46	0-50	1,888	1,8873	494	234,1316
AcU		235	46	0-51	1,893	1,8932	499	235,1347
U _I		238	46	0-54	1,910	1,9110	516	238,1437

tous les points, à l'exception des quatre premiers, a pour équation :

$$\Delta M = 0,00592 A + 0,5020 \quad (15)$$

Les valeurs calculées pour les atomes radioactifs au moyen de cette expression (15) figurent dans la 7ème colonne du tableau V. On peut ainsi comparer avec les valeurs expérimentales, et constater qu'à partir de AcA jusqu'à U_{II} les écarts ne dépassent guère une unité de la troisième décimale, qu'ils sont donc à peu près de l'ordre de grandeur de la précision des mesures.

La relation (2) qui définit ΔM , et la relation (15), conduisent immédiatement à la relation suivante, qui permet de calculer la masse d'un atome radioactif quelconque :

$$M = 1,00303 A - 0,00082 Z - 0,5020 \quad (16)$$

Les valeurs des masses atomiques calculées par cette expression (16) figurent dans la dernière colonne du tableau V.

La droite (15) a un coefficient angulaire plus petit que celle relative aux éléments lourds; ces deux droites se coupent au point $A = 210$; $\Delta M = 1,7452$, soit au point occupé par Po²¹⁰, valeur calculée; l'existence d'une troisième discontinuité est ainsi établie.

Cette discontinuité apparaît encore plus nettement si l'on calcule $\Delta'M$, conformément aux considérations développées dans la 2ème partie, expression (9), et si l'on construit le graphique correspondant. Les valeurs de $\Delta'M$ figurent dans la 8ème colonne du tableau V; elles sont naturellement basées sur les ΔM expérimentaux. Le graphique est reproduit par la fig. 7. L'alignement des points figuratifs sur le réseau de droites est si frappant que l'on a pu tracer les *droites calculées*, et qu'elles ne se distinguent pas sensiblement de celles que l'on aurait tracées « de sentiment » d'après la position des points figuratifs.

La discontinuité est surtout apparente dans le brusque changement des coefficients angulaires des droites de même *excès*. Elle se manifeste aussi par l'ordre remarquable qui s'introduit dans la région des atomes radioactifs, succédant au désordre qui règne chez les derniers représentants des atomes lourds: pour ceux-ci, les ΔM sont mal connus.

Les deux classes d'atomes sont raccordées (voir HAHN, FLÜGGE et MATTAUCH, loc. cit.) par l'intermédiaire des valeurs de ΔM pour Pb et Bi; le tableau V et la fig. 7 montre et clairement que ces dernières ne sont pas sûres, et l'imprécision qui leur correspond se retrouve chez les premiers atomes radioactifs; graduellement l'ordre s'établit, presque parfait pour la raison précisée plus haut.

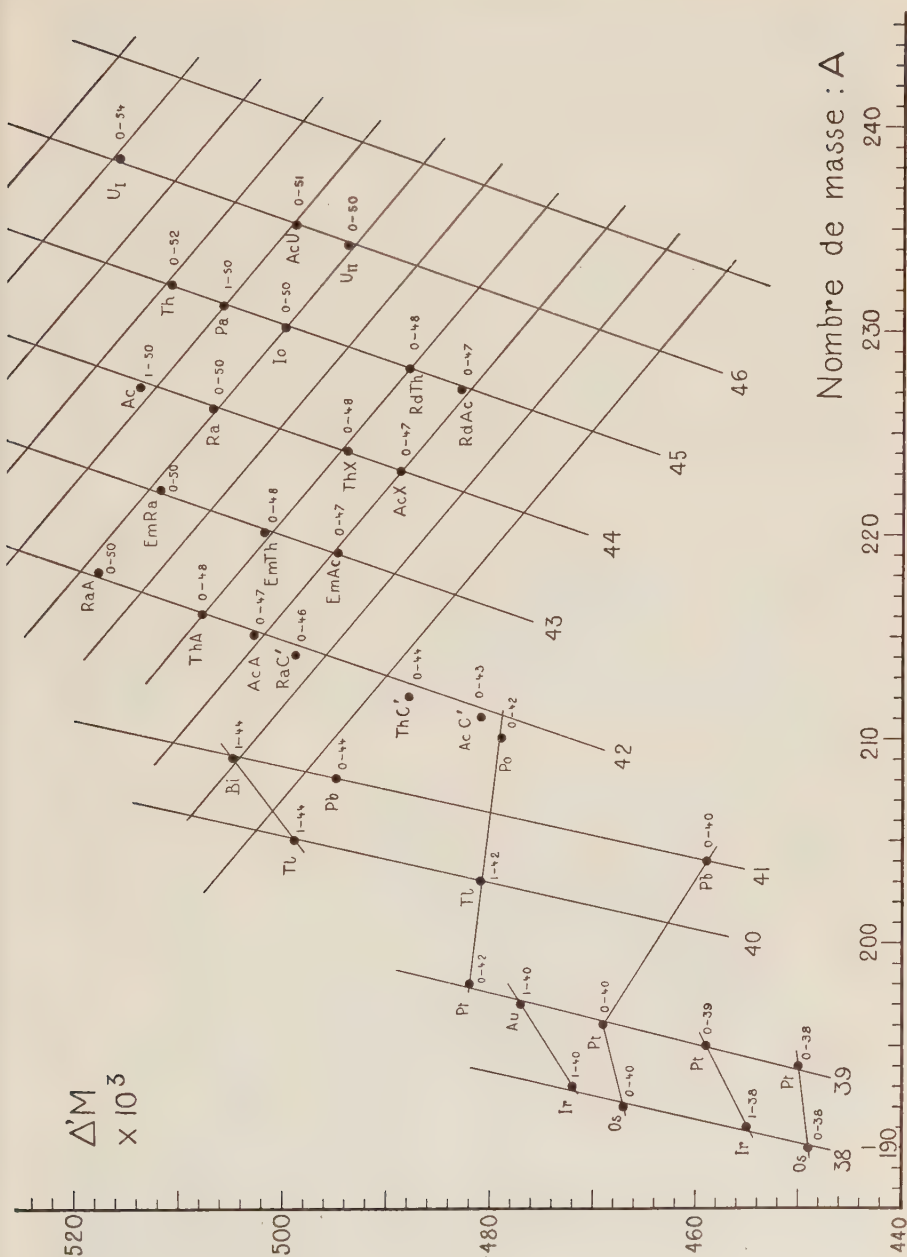


Fig. 7.

Tout porte à croire, me semble-t-il, que les valeurs calculées de M pour la dernière classe d'atomes sont très proches de la réalité. Elles sont rattachées non à Pb et Bi seulement comme les valeurs expérimentales, mais à l'ensemble des éléments lourds, de Xe à Bi, représenté par la droite ③; elles reposent ensuite sur la variation linéaire de ΔM , très solidement établie.

Il va sans dire que les raisonnements sont réversibles: de même que, de l'énergie mise en jeu dans les transformations radioactives on peut déduire les défauts de masse, réciproquement, de la connaissance des défauts de masse — donc des masses atomiques elles-mêmes — on peut déduire l'énergie des rayonnements radioactifs. Les régularités qui ont été mises en évidence, si elles se vérifient en se précisant encore, permettront donc d'atteindre, ou de prévoir, des dégagements énergétiques qui ne seraient pas directement accessibles. Ces considérations seront particulièrement intéressantes lorsqu'on les appliquera aux atomes radioactifs artificiels.

Il y aurait de nouveau énormément à glaner dans l'examen détaillé de la fig. 7; chacun pourra le faire à loisir en suivant par exemple sur le graphique l'évolution des trois familles radioactives, et en précisant la position des atomes qui n'y figurent pas (UX_1 , UX_2 , RaB, RaC, etc.) jusqu'aux divers isotopes du plomb. On reconnaîtra que la représentation est particulièrement suggestive. Pour ne pas trop allonger, je ne considérerai qu'un point bien curieux.

Certains éléments des séries de l'Uranium (de U_{II} à RaA) du Thorium (de RdTh à ThA) et de l'Actinium (de RdAc à AcA) se placent respectivement sur les droites d'excès 50, 48, 47; l'activité est uniformément α . Ces atomes laissent libre la droite d'excès 49, et l'on songe immédiatement, pour l'occuper, à la famille radioactive hypothétique, objet de tant de recherches infructueuses. Afin de conserver la belle régularité de cette région les atomes de cette série, si l'on dénommait E l'élément de tête, seraient: ${}_{90}RdE^{229} \rightarrow {}_{88}EX^{225} \rightarrow {}_{86}EmE^{221} \rightarrow {}_{84}EA^{217}$; puis viendrait un ${}_{82}EB^{213}$ qui, par deux évolutions β , donnerait ${}_{84}EC'^{213}$ et finalement ${}_{82}Pb^{209}$, ce dernier étant un isotope d'existence douteuse.

Cette évolution pouvait déjà être prévue. Mais le point curieux est celui-ci: dans le graphique de la fig. 7 il n'y a point de place pour l'élément 85, le fameux Eka-iode recherché depuis si longtemps et que l'on a cru si souvent découvrir. Il me semble que l'on peut prévoir que, pour une raison inconnue, *cet atome 85 ne saurait exister* (je parle bien entendu d'atome naturel).

Son noyau, en effet, contiendrait 42 part. α , et son *excès* serait de la forme $1 - K$, puisque Z est impair. Son point figuratif se placerait donc nécessairement quelque part sur la droite $n = 42$ de la fig. 7. Mais cette droite ne porte que des atomes d'*excès* $0 - K$, depuis Po ($0-42$) jusqu'à RaA ($0-50$); la place libre, comme d'ailleurs toutes celles d'*excès* 49, devrait donc correspondre à $0-49$ et à un atome de $Z = 84$, afin de ne pas troubler l'ordre majestueux de cette région du graphique.

Tout ce qu'on peut dire c'est que, *si il existait*, cet élément 85 aurait peut-être l'*excès* $1-48$, et par suite le nombre de masse 217; on peut calculer sa masse atomique qui serait 217,0858; son poids atomique: 217,026. Mais il est bien possible que le domaine de l'existence réelle lui soit à tout jamais interdit... On pourrait alors le baptiser *Adynaton* qui, en grec, veut dire « impossible », et lui assigner le symbole Ad. En compensation de sa non-existence, il *serait* radioactif, naturellement, ce qui est une maigre consolation...

La vérification des calculs concernant les masses des atomes radioactifs n'est guère possible, puisque celles-ci sont mal connues. Je me bornerai simplement à faire remarquer que les valeurs reproduites dans le tableau V pour Ra²²⁶, Th²³² et U, si on les traduit en unités chimiques, coïncident encore mieux avec les poids atomiques chimiques que celles du tableau II; ces dernières supposaient que les atomes radioactifs font partie du groupe des éléments lourds, tandis que nous venons de voir qu'ils forment un groupe naturel distinct. Voici cette vérification, qui tient compte, cette fois, de la composition isotopique de l'Uranium.

Tableau II.

Elément	<i>M</i> calculé		Poids atomique
	échelle phys.	échelle chim.	
Ra ²²⁶	226,1106	226,0484	226,05
Th ²³²	232,1272	232,0634	232,12
U _{II} ²³⁴	234,1316	} 238,048	238,07
AcU ²³⁵	235,1347		
U _I ²³⁸	238,1437		

Pour terminer je voudrais encore attirer l'attention sur un fait qui pourrait avoir une signification théorique importante et profonde: pour les quatre groupes d'atomes, à l'exception des atomes les plus légers, le défaut de masse ΔM est une fonction linéaire

du nombre de masse; les coefficients angulaires p des droites correspondantes ont les valeurs suivantes:

① atomes légers	0,00995
② atomes moyens	0,008890
③ atomes lourds	0,007006
④ atomes radioactifs	0,005920

Ces coefficients sont entre eux, à 1% près, comme les nombres entiers 10, 9, 7, 6. Il est difficile d'y voir l'effet d'un hasard; on songe bien plutôt à *une quantification des quatre «couches»* que les considérations qui précèdent mettent en évidence dans la constitution de l'édifice nucléaire.

Neuchâtel, Institut de physique de l'Université.

Ein Dreiphasen-Drehfeld-Sender für ultrakurze Wellen

von Walter Dieterle.

(24. XII. 1941.)

ABSCHNITT II.

Messtechnischer Teil.

A: Der UKW-Drehfeldgenerator als Steuersender.

a) Der Nachweis des Drehfeldes.

1. Kreis-Oscillogramm mittels einer Braun'schen Röhre. Der aus drei parallelen, unten kurzgeschlossenen Rohren bestehende Dreiphasen-Anodenkreis wurde so dimensioniert (s. auch S. 22), dass in dessen zentraler Achse eine Braun'sche Röhre so eingebaut werden konnte, dass deren Kathodenstrahl genau in der Symmetrieachse des Systems verlief.

Der Leuchtschirm war nach oben gerichtet und etwa in der Höhe der Anodenanschlüsse gehalten. Die Zuführung der Betriebsspannungen erfolgte von unten durch ein ebenfalls zentral geführtes Rohr, welches an Erde lag und Nulleiter des ganzen Systems war (s. Fig. 15).

Die freien Ablenkplatten waren an Erde gelegt, da die Ablenkung ausschliesslich durch das von dem symmetrisch aufgebauten Dreiphasen-Anodensystem ausgehenden elektrischen und magnetischen Feld erfolgte.

Liegt an den drei Rohren je eine Wechselspannung

$$\begin{aligned}u_1 &= U_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \\u_2 &= U_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \\u_3 &= U_3 \cdot \sin(\omega t + \varphi_3),\end{aligned}$$

dann kann man für verschiedene Schwingungszustände über die resultierende Ablenkung des Kathodenstrahles folgendes aussagen:

α) Angenommen, es würde nur ein Rohr hochfrequente Schwingungen ausführen, d. h.:

$$\begin{aligned}u_1 &= U_0 \cdot \sin \omega t \\u_2 &= u_3 = 0,\end{aligned}$$

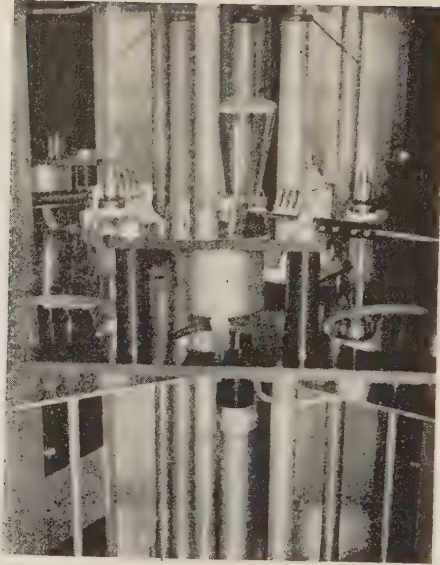


Fig. 15a.

Die im Dreiphasen-Anodensystem des Drehfeldgenerators eingebaute Hochvakuum-Kathodenstrahlröhre.



Fig. 15b.

Der dreiphasige Parallel-Rohr-Kreis des Drehfeld-Generators mit verschiebbarer Kurzschlussbrücke. Die (dicken) Rohre der Gitterkreise sind gerade noch sichtbar.

dann würde eine Ablenkung in Richtung der Verbindungslinie von Rohr 1 zum Mittelpunkt des Systems erfolgen (s. Fig. 16, o).

β) Je zwei Phasen erregen sich im Gegentakt, d. h. z. B.:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_0 \cdot \sin \omega t \\ u_2 &= U_0 \cdot \sin (\omega t + \pi) \\ u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieser Schwingungszustand konnte durch Ausserbetriebsetzen der dritten Oscillatorröhre und Entkopplung deren Gitterkreises jederzeit realisiert werden. Die dabei resultierende Ablenkung ergab das zur Verbindungslinie der beiden Betriebsphasen parallel laufende Oscillogramm (s. Fig. 16, p).

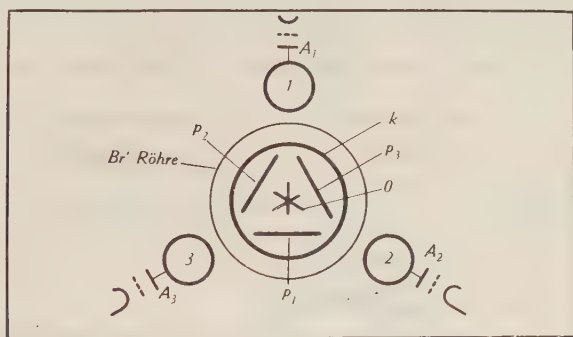


Fig. 16.

Der Nachweis des „Drehens“. Das Dreiphasen-Anodensystem des Drehfeldgenerators mit zentraler Braun'scher Röhre. Man sieht schematisch die verschiedenen möglichen Ablenkungen des Kathodenstrahles:

es ist: o das Oscillogramm, das entsteht, wenn nur eine Phase schwingt.

p das Oscillogramm, das entsteht, wenn zwei Phasen im Gegentakt schwingen.

k das Oscillogramm, das entsteht, wenn alle drei Phasen mit einer Phasendifferenz von je $\pm 2\pi/3$ schwingen, d. h. wenn der Generator „dreht“.

γ) Die drei Generatoren sind mit einer Phasendifferenz von je $\pm 2\pi/3$ erregt, d. h. der Sender „dreht“.

Es sind also z. B.:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_0 \cdot \sin \omega t \\ u_2 &= U_0 \cdot \sin (\omega t + \frac{2}{3}\pi) \\ u_3 &= U_0 \cdot \sin (\omega t + \frac{4}{3}\pi). \end{aligned}$$

Dann lässt sich leicht zeigen, dass — vollständige Symmetrie der elektrischen und konstruktiven Grössen vorausgesetzt — die resultierende Ablenkung des Kathodenstrahles auf einem Kreis erfolgt. Die Grösse des Durchmessers dieses Kreis-Oscillogrammes

hängt von der Schwingungsintensität (u , i) und den Betriebsgrößen der Braun'schen Röhre ab. Die praktisch erzielten Oscillogramme zeigten Durchmesser von 5—50 mm.

Diese Oscillogramme waren vollständig sauber und klar gezeichnet, solange die Generatorstufe einwandfrei arbeitete. (Vollständiges Synchronisieren, d. h. nur eine Frequenz!) — Wurde aber dieser Zustand infolge eines groben Eingriffes in die Symmetrie des Generators, verursacht durch die Änderung mindestens einer Betriebsgröße, gestört, so dass als Folge der Sender „ausser Tritt fiel“, dann war kein sauberes Oscillogramm, sondern ein nicht mehr zu lösendes Durcheinander und Gewirr von mehreren linien- und flächenhaften Oscillogrammen zu sehen.

Der Übergang vom „Drehen“ zum „Aussertrittfallen“ und umgekehrt erfolgte stets sprunghaft, wobei gewisse dem „Ziehen“ zweier gekoppelter Kreise ähnliche Erscheinungen auftreten (s. Fig. 17).

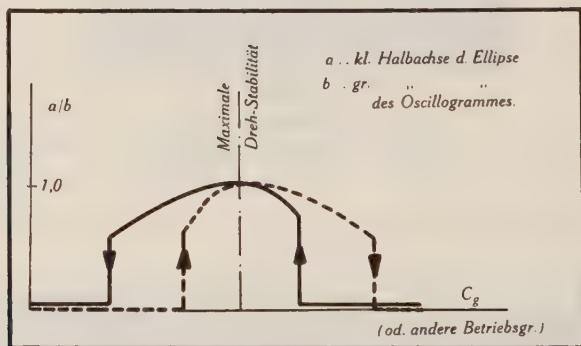


Fig. 17.

„Zieherscheinung“ beim Übergang vom Drehen zum „Aussertrittfallen“ und umgekehrt in Funktion einer Betriebsgröße nur einer Phase (z. B. C_g , U_a , U_g).

Diese hier angeführte Methode erlaubte mir während sämtlichen Messungen und der ganzen Dauer des Sendebetriebs den Schwingungszustand des Drehfeld-Generators in bezug auf Amplitude und Phase qualitativ rasch zu überblicken.

2. Nachweis des Drehfeldes mittels dreier Kathodenstrahl-Oscillographen.

Zwischen je zwei Rohren (Phasen) des Anoden-Systems wurde über eine kleine Ankopplungskapazität die freie Platte des horizontalen, bzw. vertikalen Plattenpaares angeschlossen (s. Fig. 19).

Besteht zwischen den beiden Rohren eine Phasendifferenz, dann erfolgt die Ablenkung des Kathodenstrahles auf einer Ellipse. Aus ihrer Lage kann der Drehsinn des umlaufenden elektrischen

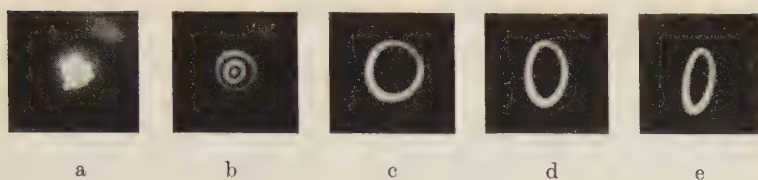


Fig. 18, a) bis e).

Photographische Aufnahmen einiger Oscillogramme.

a) Die Ablenkung des Kathodenstrahles bei verschiedenen Schwingungsarten des Generators. Die Oscillogramme sind zeitlich getrennt, jedoch auf dasselbe Negativ nacheinander aufgenommen. Man sieht: Die von je zwei im Gegentakt schwingenden Phasen erzeugte Ablenkung auf einer Geraden entsprechend Fig. 16, p und die vom Drehfeld erzeugte Ablenkung auf einem Kreis entsprechend Fig. 16, k.

b) Kreis-Oscillogramme, aufgenommen bei verschiedenen Schwingungsintensitäten des Generators, und zwar für

$$U_a = 1000 \text{ Volt}$$

$$U_a = 600 \text{ Volt}$$

$$U_a = 0 \text{ Volt}$$

c) Kreis-Oscillogramm, bei gleicher Anodenspannung aller drei Phasen von $U_a = 800 \text{ Volt}$.

d) Der Übergang vom Kreis-Oscillogramm zum elliptischen Oscillogramm (immer innerhalb des „Drehzustandes“) durch Reduktion der Schwingungsintensität einer Phase (d. h. Reduktion deren Anodenspannung)

$$U_{a-1} = U_{a-2} = 800 \text{ Volt}$$

$$U_{a-3} = 600 \text{ Volt}$$

e) Entsprechend d), jedoch wurde die Anodenspannung U_a der Phase 3 weiter reduziert:

$$U_{a-1} = U_{a-2} = 800 \text{ Volt}$$

$$U_{a-3} = 400 \text{ Volt}$$

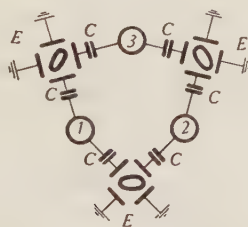


Fig. 19.

Der Nachweis des „Drehens“ durch Messung des Phasenwinkels zwischen je zwei sich folgenden Vektoren der Spannungen oder Ströme im Anodenkreis des Generators oder des Verstärkers.

Bei gleicher Empfindlichkeit in horizontaler, wie auch in vertikaler Richtung der Ablenkplatten, wird das Verhältnis der Ellipsenachsen wie $\sqrt{3} : 1$.

Wenn die Phase von $+2\pi/3$ auf $-2\pi/3$ übergeht, ändert sich die Lage der Ellipse und der Umlaufsinn des Kathodenstrahles.

Vektors und, bei bekannter Empfindlichkeit in beiden Richtungen, die Phasendifferenz bestimmt werden.

Diese, ebenfalls für den Nachweis des Drehfeldes dienende Messung wurde parallel zu der vorher genannten Methode am Anodenkreis des Generators oder des Verstärkers durchgeführt.

3. Nachweis des Drehfeldes mittels Strommessung in künstlichen, zu Stern- oder Dreieckschaltung angeordneten Belastungswiderständen.

Es ist bekannt, dass drei zu einem Stern oder im Dreieck geschaltete Widerstände R von gleicher Grösse dann und nur dann von gleichen Wechselströmen durchflossen werden, wenn entweder zwischen diesen Strömen oder den sie erzeugenden Spannungen der Phasenwinkel $\pm 2\pi/3$ beträgt. Demzufolge wurde der Generator, unter Zwischenschaltung einer vollständig symmetrischen und lose angekoppelten Dreiphasenleitung durch Widerstände in Stern- oder Dreieckschaltung belastet. Als Widerstände wurden Soffittenlampen verwendet; die entsprechenden Widerstandswerte liessen sich in jeder notwendigen Grösse durch Kombinationen darstellen. Ein solcher kombinierter Widerstand wurde vor dessen Einbau in bezug auf Strom- und Widerstandswert, unter Zuhilfenahme eines Pyrometers, geeicht, so dass während des Drehbetriebes sich die ganze Messung auf den Vergleich der Helligkeitswerte der Soffittenlampchen beschränkte. Die grösste Differenz einer Messung der in den drei Belastungswiderständen gemessenen Ströme bei optimaler Einstellung des Generators auf „Drehen“ betrug 6%.

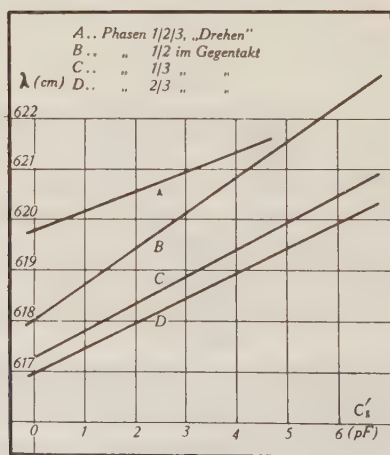


Fig. 20.

Wellenlänge des Drehfeldgenerators in Funktion der Kopplung C'_g der Gitterkreise.

b) Die Stabilität der Frequenz.

Änderung der Frequenz durch Variation der Kopplung C_g' der Gitterkreise.

Die Messung der Wellenlänge erfolgte an einem besonderen Lechersystem (Genauigkeit $\pm 0,2\%$) und wurde durchgeführt für den Gegentaktbetrieb von je zwei Phasen des Generators und für den „Drehzustand“, wobei die Kopplungskapazitäten C'_{g-1} bis C'_{g-3} zwischen den einzelnen Phasen von gleicher Grösse waren. Zudem wurde durch eine Überlagerungsmethode die Kontrolle auf Einwelligkeit durchgeführt.

Änderung der Frequenz mit variabler Betriebsspannung.

Dank der Einführung guter Gitter- und Anodenkreise (Concentric Line Circuit, Linear Oscillator Circuit) für den Generator wurde die durch eine Spannungsänderung verursachte Frequenzverschiebung klein, so dass sie durch Vergleich mit einer festen Frequenz in einer Überlagerungsapparatur gemessen werden musste (z. V. stand eine Tonfrequenz-Messbrücke von 50—10000 Hz).

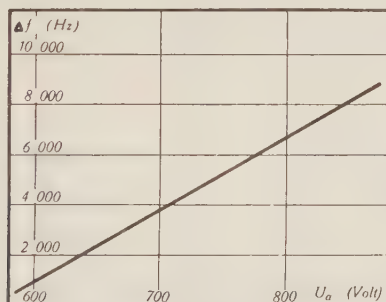


Fig. 21.

Die Frequenzstabilität der Generatorstufe: die Änderung der Frequenz (Δf) in Funktion der Anodenspannung des Generators. Dabei war dieser über die mittels $C_g = \text{konst.}$ angekoppelte Dreiphasenleitung bzw. deren Abschlusswiderstände R_l belastet.

c) Die Abhängigkeit der Synchronisierung (des Mitnahmebereiches) von den Kopplungselementen und den Betriebsspannungen: die „Drehstabilität“.

Auf Grund dieser, für den Drehfeld-Sender wohl charakteristischen Messung kann über dessen praktische Verwendbarkeit als eigentlicher Rundstrahler entschieden werden. Denn dabei wird in erster Linie verlangt, dass der „Drehzustand“ und die Emission des Drehfeldes durch irgendwelche und irgendwie zustandegekommene Änderungen der Betriebsgrössen, welche periodischer Natur

(z. B. Modulation, mechanische Erschütterungen, Schwingungen) oder unregelmässiger Natur (z. B. Spannungsschwankungen, Verstimmungen der Antenne durch deren Bewegung im Wind und dgl.) sein können, nicht gestört wird.

In dieser Messung sind demnach zu erfassen: Die äussersten Grenzen des Mitnahmebereiches (gerade vor dem „Aussertritt-fallen“ des Generators) in Funktion,

1. der Verstimmung
 2. der Änderung der Anodenspannung
 3. der Gittervorspannung
- } je einer Phase

Dabei wurde der Drehfeldgenerator wieder über eine Dreiphasenleitung entsprechend (angepasst der Belastung durch einen später zu bauenden Verstärker) belastet. Diese Leitung war über die Kapazität C_G lose an den Generator angekoppelt. Da nun sowohl der Gitter- als auch der Anodenkreis des Generators nicht veränderlich sind, muss die Verstimmung einer Phase durch Änderung der Leitungsan Kopplung der betreffenden Phase vorgenommen werden, was in kleinen Grenzen noch keine Störung des Schwingungszustandes zur Folge hat.

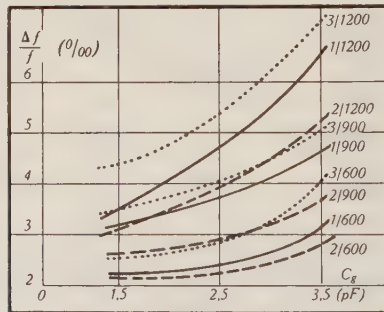


Fig. 22.

„Dreh-Stabilität“: d. h. die innerhalb des „Drehbereiches“ maximal zulässige Verstimmung je einer Phase bis zum „Aussertritt-fallen“ des Generators in Funktion der Kopplung C_G der Gitterkreise.

$$U_a = \text{Parameter } 1200/900/600 \text{ Volt.}$$

Die Messung wurde wie folgt durchgeführt: Der Generator wurde auf „Drehen“ eingestellt und hierauf jeweils eine Phase in der vorher genannten Weise bis zum Moment des „Aussertritt-fallens“ des Senders verstimmt. Diese Verstimmung je einer Phase erfolgte nach beiden Seiten (ausgehend von der Einstellung opti-

malen Drehens), wodurch für einen bestimmten Betrag der Gitterkopplung C_1 eine maximal zulässige Verstimmung, entsprechend dem Drehbereich des Kondensators C_g , erhalten wurde.

Diese in Fig. 22 dargestellte Kurve wurde als Endprodukt vieler sich wiederholender Messungen erhalten, wobei der optimale Betriebszustand für Drehen immer mehr und besser erreicht wurde.

Die Messungen der Drehstabilität bei Änderung der Anoden- und Gittervorspannung wurden bei konstanten Kopplungen C'_g und C_g durch Reduktion der betreffenden Spannung je einer Phase bis zum Moment des „Aussertrittfallens“ erhalten. Über die maximal zulässige Verstimmung (s. Fig. 22) und die prozentualen Änderungen der Betriebsspannungen gibt die nachfolgende Tabelle der Messwerte Auskunft:

C_g	U_a	Verstimmung $\Delta f/f$			$\Delta U_a/U_a$	$\Delta U_g/U_g$
pF	Volt	‰			%	%
		Phase				
		1	2	3		
1,5	600	2,30	2,20	2,60	50	100
	900	3,15	2,63	3,50	55	100
	1200	3,50	3,15	4,40	65	100
2,5	600	2,28	2,20	2,80	65	100
	900	3,68	2,80	4,0	70	100
	1200	4,72	3,85	5,25	75	100
3,75	600	3,15	2,80	4,0	75	100
	900	4,55	3,15	5,25	80	100
	1200	6,5	5,25	7,20	90	100

Während der Variation einer Betriebsgrösse der betreffenden Phase wurden alle anderen Grössen der gleichen Phase, sowie alle Grössen der beiden anderen Phasen, konstant gehalten.

d) Die Leistung des Generators.

Die Bestimmung der hochfrequenten Drehstromleistung erfolgte auf photometrischem Wege, wobei die an eine zwischengeschaltete Leitung angepassten Belastungswiderstände durch Soffittenlampen dargestellt wurden.

Die Messung des in diesen Soffittenlampen fliessenden hochfrequenten Stromes erfolgte entweder einzeln für jeden Belastungs-

widerstand der Dreieck- oder Sternschaltung mit Hilfe des Pyrometers oder gesamthaft mit Hilfe einer Photozelle und anschließender Vergleichsmessung durch Speisung mit 50-periodigem Drehstrom.

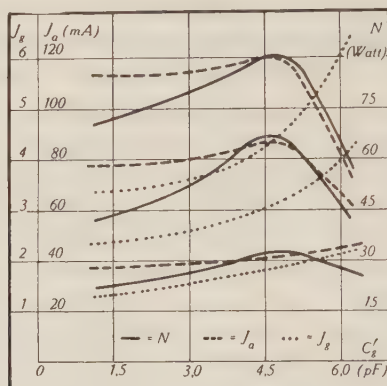


Fig. 23.

Leistung, Anodenstrom und Gitterstrom des Dreieckfeldgenerators in Funktion der Kopplung C_g' der Gitterkreise. Dabei war die Anodenspannung U_a Parameter mit 1500, 1200 und 1000 Volt.

Das Absinken des Anodenstromes und der Leistung ist durch die automatische Gittervorspannung ($J_g \cdot R_g$) der Oscillatorröhren bedingt.

Da die Anoden- und Gitterkreise fest gebaut und fest aufeinander abgestimmt waren, die Frequenz aber durch die variable Kopplung C_g' nach Fig. 20 etwas ändert, tritt für einen bestimmten Wert von C_g' ein optimaler Schwingungszustand des Generators auf.

B: Energieleitung und Antenne.

a) Die belastete, vom Generator direkt gespeisene Dreiphasenleitung beliebigen Wellenwiderstandes.

Eine symmetrische Dreiphasenleitung von der Länge $\lambda/2$ wurde in vollständig symmetrischer Weise durch den Kondensator C_G lose an den Generator angekoppelt.

In Funktion des Abschlusswiderstandes R_{Δ}^I dieser Leitung wurde die Welligkeit des Stromes bzw. der Spannung auf der Leitung gemessen, woraus der optimale Abschluss- oder Anpassungswiderstand für jede Leitung gefunden wurde. Die Messungen erfolgten für verschiedene Leitungen (Z = Parameter der Messungen) und die Anordnung der Abschlusswiderstände in Dreieck- und Sternschaltung.

Die Widerstände wurden auch hier durch Soffittenlampen dargestellt. Der durch die Eichmessung erhaltene Widerstandswert

war dann noch unter Berücksichtigung des Skin-Effektes, des induktiven und kapazitiven Einflusses der kleinen Glühfadenspiralen zu korrigieren.

Zwischen je zwei Drähten der Leitung hing ein an einem Schnurzug längs der Leitung fahrbar aufgehängter Mess-Dipol für die Messung der Spannungsverteilung auf den Drähten (s. Fig. 24).

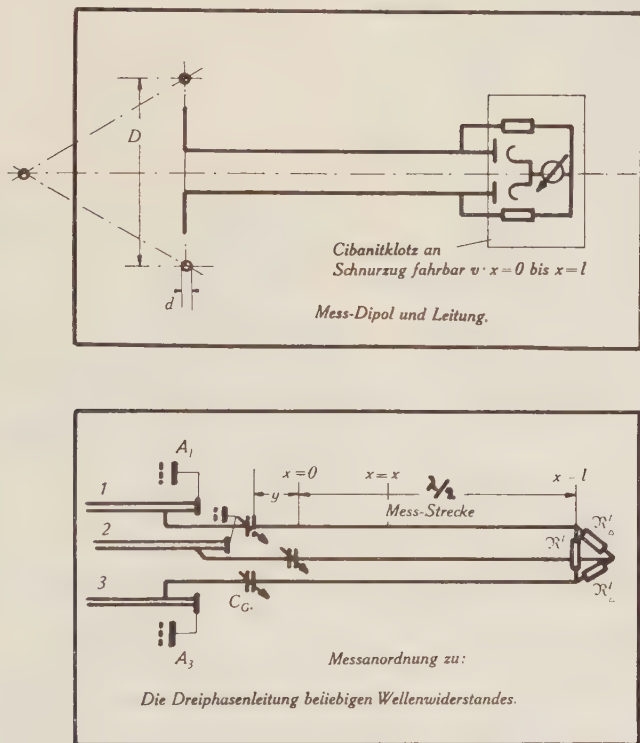


Fig. 24.

Zur Messung der Spannungsverteilung längs der Leitung waren zwischen je zwei Phasen ein an einem Schnurzug fahrbarer Messdipol frei aufgehängt. Zur Gleichrichtung diente eine Duo-Diode, deren Gleichrichtung bis zu einem Diodenstrom von $7 \mu\text{A}$ herab linear war, so dass dieser Diodenstrom direkt als Mass für die Welligkeit betrachtet werden kann. Die Empfindlichkeit konnte in einfacher Weise durch eine Längenänderung der eigentlichen Dipolareme reguliert werden.

Das zwischen den Ankopplungskondensatoren C_G und der Stelle $x=0$ liegende Stück der Leitung kam für die Messung und Auswertung nicht in Frage, da dort die Verhältnisse gestört waren.

Die Leitungen für den Heizstrom und die Messleitung mussten in gut abgeschirmten Kabeln senkrecht aus dem Feld, also in radialer Richtung nach aussen, geführt werden.

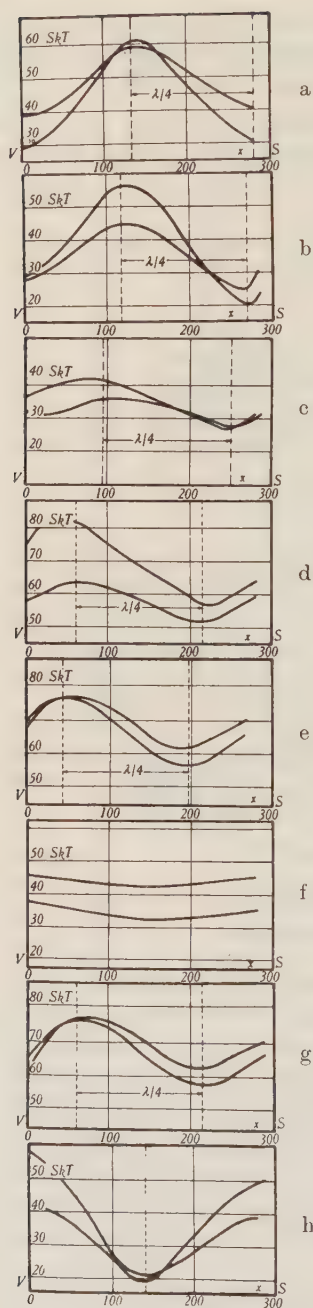


Fig. 25, a - h.

Der Verlauf der Spannungen längs der Dreiphasenleitung mit einem Wellenwiderstand $Z_{\Delta} = 1240 \text{ Ohm}$.

Der Abschlusswiderstand R konnte zwischen 100 und 2000 Ohm geändert werden und hatte für die einzelnen Messungen (entsprechend den nebenstehenden Fig.) die folgenden Werte:

- a) $R = 0$ Kurzschluss
- b) 200
- c) 600
- d) 950
- e) 1200
- f) 1360 Anpassung
- g) 1540
- h) ∞ Leerlauf

Die gleichen Messungen wurden mehrmals durchgeführt und die Fig. zeigen 2 bei gleichen Versuchsbedingungen aufgenommene Kurven. Die dabei auffallenden Differenzen sind durch starke Spannungsschwankungen des Netzes zu erklären. Doch ist der prinzipielle Verlauf und die Lage der Extrema immer gleich.

Andere Messungen an Dreiphasenleitungen mit anderen Wellenwiderständen Z_{Δ} zeigen einen ganz ähnlichen Verlauf, so dass auf deren Wiedergabe verzichtet wurde. Dafür gibt die Tabelle die zugehörigen Werte von Wellenwiderstand und durch die Messung erhaltenem Anpassungswiderstand.

Das Resultat der an einer Dreiphasenleitung von $Z = 715 \text{ Ohm}$ ($Z_{\Delta} = 1240 \text{ Ohm}$) Wellenwiderstand durchgeführten Messungen zeigt Fig. 25, a) bis h). Die für die Dreiphasenleitungen mit anderem Wellenwiderstand erhaltenen Werte des Abschlusswiderstandes für optimale Anpassung zeigt die nachstehende Tabelle:

$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{276}{\sqrt{2}} \cdot \log \frac{2 \cdot D}{d}$	$Z_{\Delta} = Z \cdot \sqrt{3}$ (berechnet)	R_{Δ}^l für Anpassung (gemessen)
550 Ohm	950 Ohm	1060 Ohm
635 Ohm	1100 Ohm	1200 Ohm
715 Ohm	1240 Ohm	1360 Ohm
800 Ohm	1380 Ohm	1600 Ohm

Dabei sind die Differenzen als bei der Berechnung des Wellenwiderstandes (kleiner Drahtdurchmesser) und der messtechnischen Bestimmung des Wertes von R_{Δ}^l entstandene Fehler zu erklären.

b) Die Abstimmung der Antenne.

1. Die Spannungsverteilung längs der Energieleitung niederen Wellenwiderstandes und die Knotenverschiebung in Funktion der Länge der Strahler-Elemente des Tripols.

Der aus drei symmetrischen, in einer Horizontalebene angeordneten und um 120° geometrisch verschobenen Strahlerelementen bestehende Tripol wurde durch eine niederohmige Dreiphasenenergieleitung besonderer Konstruktion (s. Fig. 12, a und 26) an die Verstärkerstufe des Senders angekoppelt.

In kleinstmöglichem Abstände vom Speisepunkt des Tripols (Strombauch) waren Thermokreuze und Mikroampèremeter zur Strommessung eingebaut.

Um auf der Leitung eine merkliche Welligkeit zu erhalten, wurde diese Messung mit einer solchen Leitung durchgeführt, deren Wellenwiderstand ein Vielfaches des Strahlungswiderstandes des Tripols darstellte.

Die Länge der Strahler wurde nun zwischen 140 und 170 cm ($\frac{1}{4}$ Wellenlänge = 155 cm) eingestellt und für jede dieser Einstellungen wurde die Verteilung der Spannung längs der Leitung aufgenommen.

Da die gesuchte optimale Abstimmung (Länge) des Strahlers jene ist, bei welcher der Strombauch bzw. der Spannungsknoten gerade in den Speisepunkt zu liegen kommt, muss für diesen Fall auf der Speiseleitung der nächste Spannungsbauch genau im Abstand $\lambda/4$ von diesem Speisepunkt liegen (s. Fig. 27).

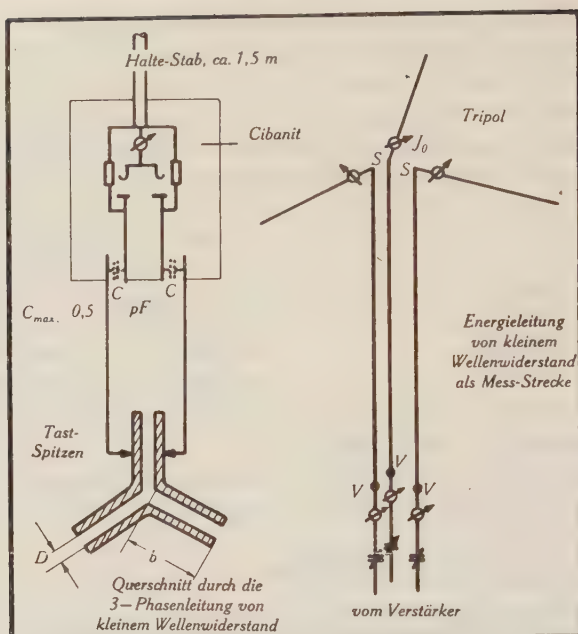


Fig. 26.

Dreiphasen-Energieleitung und Messanordnung zu B—b—1): Bei dieser Messapparatur wurde das den Diodenstrom anzeigende Messinstrument unmittelbar bei der Diode selbst montiert. Damit konnte die vertikal nach oben verlaufende Leitung von einer Leiter aus abgetastet werden.

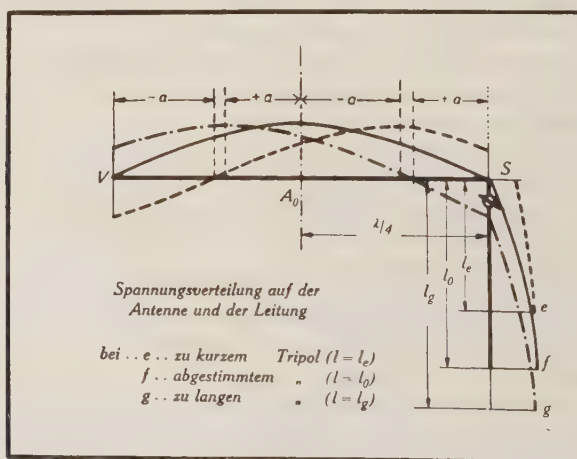


Fig. 27.

Spannungsverteilung auf der Antenne und der Leitung bei zu kurzen (e), abgestimmten (f) und zu langen (g) Tripolarmen.

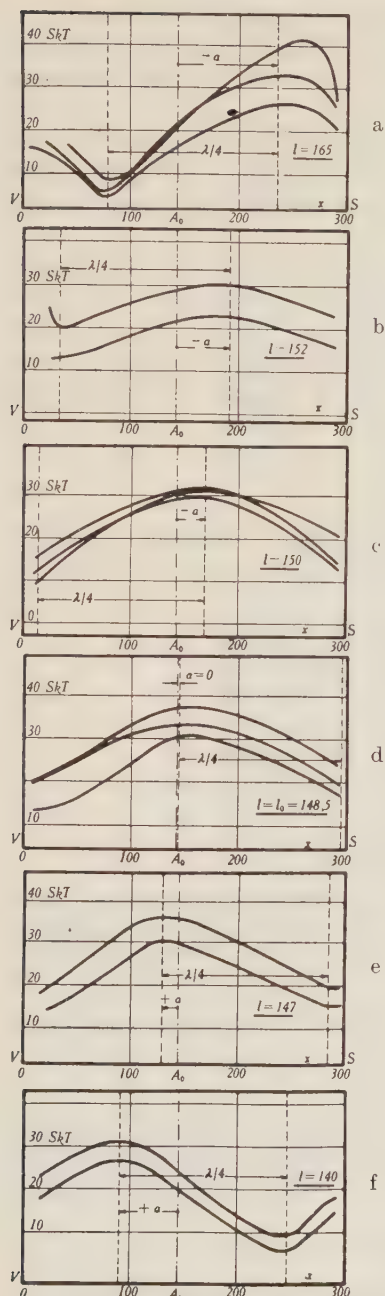


Fig. 28, a—f.

Zur Ermittlung der Abstimmung des Tripols.

Die Spannungsverteilung längs der niederohmigen Dreiphasenleitung spezieller Konstruktion in Funktion der Längen l der Strahlerelemente des Tripols.

Diese Länge l wurde zwischen 140 und 170 cm ($\lambda/4 = 155$ cm) variiert und hatte entsprechend den Fig. die folgenden Werte:

- a) $l = 165$ cm
- b) 152
- c) 150
- d) $148,5 = l_0$
- e) 147
- f) 140

Die Messungen bei einer und derselben Länge wurden mehrmals durchgeführt. Die Differenzen zwischen den einzelnen entsprechenden Kurven, deren Extrema jedoch immer an derselben Stelle liegen, sind auf Spannungsschwankungen des Netzes und kapazitive Einflüsse auf die Leitung und Antenne zu erklären.

Die Spannung längs der Leitung wurde durch die lose an die Leitung angekoppelte Messdiode (s. Fig. 26) aufgenommen. Gleichzeitig wurden für jede Strahlerlänge die Ströme in den einzelnen Armen gemessen.

Die Messungen haben gezeigt, dass die Abstimmung des Tripols sehr scharf und demzufolge auch sehr empfindlich ist, weshalb die optimale Abstimmung durch schrittweise Näherung von beiden Seiten angestrebt wurde.

In Auswertung der gemessenen Kurven von Fig. 28 lässt sich eine Kurve, welche die Verschiebung a des Spannungsbauches oder des Spannungsknotens (sie sei von nun an immer mit „Knotenverschiebung“ a bezeichnet) von seiner Lage A_0 bei optimaler Abstimmung der Strahlerelemente ($a = 0$) in Funktion der Länge des Strahlers darstellt, finden:

$$a = F_1(l)$$

oder relativ

$$a/\lambda = F_2\left(\frac{\lambda/4 - l}{\lambda}\right)$$

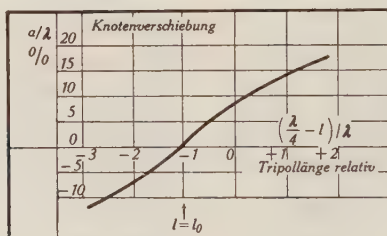


Fig. 29.

Die Abstimmung des Tripols. Der Knoten der Spannungsverteilung auf der Leitung verschiebt sich bei einer Veränderung der Armlänge des Tripols gegenüber seiner Lage bei optimaler Abstimmung. Aus dieser Verschiebung kann man die Abstimmung des Tripols finden.

Als optimale Strahlerlänge für den Tripol findet man:

$$l = l_0 = \lambda/4 - 4/100 = 0,24 \lambda$$

Vergleichsweise sei hier angeführt, dass bei gleichen Ausführungen der Antennenarme (Durchmesser, Material, Endkapazität etc.) für die optimale Abstimmung eines Dipols in der Regel gerechnet wird:

$$l^*_{\text{Dipol}} = l^*_0 = \lambda/4 - 3\%$$

2. Der Antennenstrom in Funktion der Länge l der Strahlerelemente.

Bei gefundener optimaler Abstimmung des Tripols erreicht der im Speisepunkt gemessene Antennenstrom seinen Maximalwert. Wenn man nun noch berücksichtigt, dass die zur Strommessung eingebauten Thermokreuze aus konstruktiven Gründen in einem Abstand von 5 cm vom Speisepunkt sich befanden, dann kann man ebenfalls aus dieser Messung des Stromes auf die optimale Abstimmung des Tripols schließen.

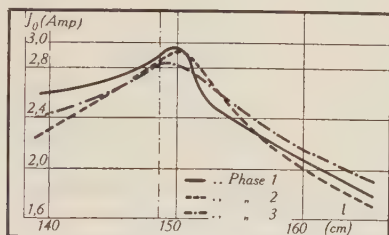


Fig. 30.

Die Abstimmung des Tripols: Antennenstrom in Funktion der Länge l des Tripols. Der Antennenstrom erreicht bei optimaler Abstimmung der Drehfeldantenne ($l = l_0$) seinen maximalen Wert.

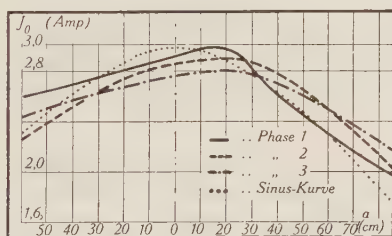


Fig. 31.

Die Abstimmung des Tripols: Antennenstrom in Funktion der Knotenverschiebung a auf der Leitung ($Z = 118$ Ohm).

Fig. 30 und 31 zeigen den Verlauf der Ströme (noch ohne Berücksichtigung des Skin-Effektes, daher J_0) in den drei Strahlerelementen in Funktion deren Länge bzw. der Knotenverschiebung a .

Mit Berücksichtigung des Skin-Effektes (Thermokreuze 0,2 m/m Eisen-Konstanten, $R_l/R_0 = 3,43$) wird der bei abgestimmtem Tripol maximale Antennenstrom $J_{\text{Ant}} = 1,85$ Amp.

c) Die Anpassung der Leitung an die abgestimmte Antenne.

Nach Abschnitt I., B., f) ist der Strahlungswiderstand der abgestimmten Drehfeldantenne bekannt. Er beträgt danach, je nach

dem Einfluss der näheren Umgebung (s. auch Kurve für $F_h \left(\frac{4\pi h}{\lambda} \right)$ in ¹⁰⁾)

$$R_S = 80-110 \text{ Ohm}$$

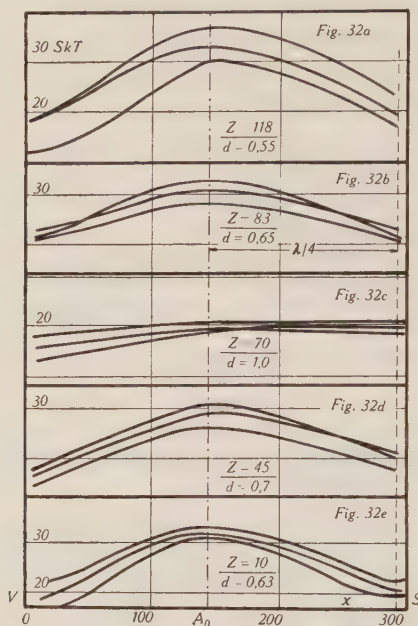


Fig. 32.

Die Anpassung der Energieleitung an die abgestimmte Antenne. $l = l_0 = 148,5 \text{ cm}$. Die Welligkeit erreicht bei optimaler Anpassung der Speiseleitung an die Antenne ein Minimum, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = \frac{R_S}{\sqrt{3}} \text{ oder } R_S = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{L^*}{C^*} \text{ ist.}$$

Daraus kann experimentell auf den Strahlungswiderstand geschlossen werden.

Die Anpassung kann nur durch eine Änderung des Wellenwiderstandes Z der Dreiphasenleitung und Angleichung desselben an den Strahlungswiderstand erfolgen. Praktisch war dies durch eine Änderung des Abstandes D (s. Fig. 26) der drei Leiter untereinander im Bereiche zwischen 5 und 20 m/m möglich.

Die Kapazität zwischen je zwei Leitern lässt sich rechnerisch, sowie auch durch Messung mit einer Hochfrequenz-Messbrücke genau ermitteln. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen längs dieser Leitung ($v = c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$) bekannt ist, so lässt sich die Induktivität L^* berechnen:

$$L^* = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{C};$$

damit ist der Wellenwiderstand Z^* (d. h. also berechnet wie für zwei Leiter allein, Doppeldrahtsystem) gefunden.

Tabelle.

Fig.	Leitung				Spannungs- verteilung $d = U_{\min}/U_{\max}$
	D	C	L^*	Z^*	
	m/m	pF/m	Hy/m	Ohm(*)	
a)	20	30	$3,8 \cdot 10^{-7}$	118	0,55
b)	15	40	$2,8 \cdot 10^{-7}$	83	0,65
c)	10	50	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$70 = Z_0^*$	1,00
d)	7,5	75	$1,5 \cdot 10^{-7}$	45	0,70
e)	5	110	$1,0 \cdot 10^{-7}$	10	0,63

(*) Berechnet nach den Formeln für das Doppeldrahtsystem.

Die zugehörige Spannungsverteilung wurde mit der in Fig. 26 beschriebenen Messdiode aufgenommen und zeigt für alle Kurven ihren Spannungsbauch im Abstände $\lambda/4$ vom Speisepunkt S (Bestätigung der unter b) gefundenen Abstimmung).

Diese Messungen über die Anpassung der Speiseleitung an die abgestimmte Antenne haben also bei einem Wellenwiderstand Z^* von 70 Ohm der Speiseleitung eine minimale Spannungswelligkeit und damit die gesuchte Anpassung ergeben, so dass

d) die experimentelle Bestimmung des Strahlungswiderstandes der Drehfeldantenne daraus erfolgen kann.

Auf S. 30 haben wir auf Grund theoretischer Überlegungen folgende Beziehung erhalten: Es ist

$$R_s = 3 \cdot R_\lambda = 3 \cdot Z_\lambda = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Nun ist aber

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L_0^*}{C_0^*}}$$

(Darin soll der Index $_0$ auf die Anpassung und der $*$ wieder auf die entsprechenden Grössen des Doppeldrahtsystems hinweisen.) Somit wird

$$\underline{R_{s_{\text{exp.}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{L_0^*}{C_0^*}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 70 = 86 \text{ Ohm}}$$

Der maximale, je in den drei Strahlern des abgestimmten Tripols fließende Antennenstrom betrug (unter Berücksichtigung des

Skin-Effektes) 1,85 Amp. Dabei muss darauf hingewiesen werden, dass durch eine sorgfältigere Anpassung der Energieleitung an die Verstärkerstufe noch eine wesentliche Steigerung der Leistung zu erreichen gewesen wäre. Dies hätte aber grössere Arbeiten vorwiegend mechanischer Natur bedingt, welche in Ermangelung der notwendigen Zeit nicht mehr zur Ausführung gelangen konnten.

Die gesamte Strahlungsleistung des Drehfeld-Senders betrug daher, berechnet mit Hilfe des experimentell bestimmten Strahlungswiderstandes:

$$\underline{N_{S_{\text{exp.}}} = J_{\text{Ant}}^2 \cdot R_S = 296 \text{ Watt}}$$

während aus dem theoretischen Wert für den Strahlungswiderstand des freien Tripols ($R_S = 90 \text{ Ohm}$, Abschnitt I., B., f)) folgt:

$$\underline{N_{S_{\text{theoret.}}} = 310 \text{ Watt}}$$

Zusammenfassung.

Beruhend auf dem Prinzip der Mitnahme mehrerer selbst-erregter Röhrengeneratoren wurde ein dreiphasiger Drehfeld-Sender mit Steuersender, Verstärkerstufe und Strahlersystem für UKW konstruiert.

Durch Verwendung von abgeschirmten nichtquasistationären Schwingungskreisen, denen eine hohe mechanische und elektrische Stabilität eigen ist, wurden gute Betriebsergebnisse erzielt.

Der Nachweis des Drehzustandes erfolgte in einfacher und übersichtlicher Weise durch Erzeugung eines kreisförmigen Oscillogrammes mittels einer sich im Feld eines dreiphasigen Anodenkreises befindenden Hochvakuum-Kathodenstrahlröhre.

Die Stabilität des Drehzustandes nimmt mit wachsender Koppelung der einzelnen Röhrengeneratoren zu und ist gross genug, dass der Drehfeld-Sender den praktischen Anforderungen genügen kann.

Soweit es für die Durchführung der vorwiegend experimentell gedachten Arbeit notwendig war, wurden die theoretischen Grundlagen einiger Konstruktionsteile ausgearbeitet.

Dabei ist die Dreiphasenleitung als das wichtigste Bauelement des Dreiphasen-Drehfeld-Senders eingehend behandelt worden, wobei sich zeigte, dass das bekannte Doppeldrahtsystem als Spezialfall dieser dreifachen Leitung behandelt werden kann.

Während der Zeit, in welcher die vorliegende Arbeit zum Abschluss gelangte, wurde eine theoretische Behandlung der Drehfeldantennen durchgeführt¹⁰⁾, so dass die entsprechenden Resultate in nützlicher Weise zur Verfügung standen.

Die Resultate der theoretischen Betrachtung der Dreiphasenleitung wurden durch die Messung bestätigt, worauf eine experimentelle Bestimmung des Strahlungswiderstandes durchgeführt werden konnte. Die dabei erhaltenen Resultate der Bestimmung durch die Messung:

$R_{s_{\text{exp}}} = 86 \text{ Ohm}$ und der Berechnung:

$R_{s_{\text{theoret}}} = 90 \text{ Ohm}$ (evtl. 80—110 Ohm) (s. auch S. 53)

zeigen gute Übereinstimmung.

Schlusswort.

Die vorliegende Arbeit wurde 1939—1941 am Institut für Hochfrequenztechnik der ETH durchgeführt, wobei deren Durchführung und Abschluss infolge der politischen und geschichtlichen Zeitereignisse und meine damit zusammenhängende militärische Dienstleistung sehr erschwert und entsprechend verzögert wurde.

Dass die Arbeit trotzdem ihren Abschluss fand, habe ich in erster Linie meinem verehrten Lehrer und Leiter des Institutes, Herrn Prof. Dr. Tank, zu verdanken.

Es ist mir ebenso ein Bedürfnis wie eine Freude, ihm für sein jederzeit wohlwollendes Interesse für den Fortgang und ganz besonders für seine wertvollen Anregungen zur Arbeit, sowie auch für die Ratschläge während deren Entwicklung, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Dank schulde ich ferner dem Vorstand der Abteilung für Elektrotechnik und des elektrotechnischen Institutes der ETH, Herrn Prof. Dr. Kuhlmann, für die Überlassung des Hochspannungsraumes der ETH, wodurch die abschliessenden und grossen Platz beanspruchenden Messungen ermöglicht wurden.

Herrn Benz, Institutsmechaniker, dem die gesamte konstruktive Ausführung des Drehfeld-Senders oblag, sei an dieser Stelle für seine grosse und unermüdlich geleistete Arbeit besonders gedankt.

Die Arbeit wurde auch von Seiten der Industrie weitgehend gefördert. Mein Dank gehört insbesondere

der Direktion der Aluminium-Industrie A.G. in Neuhausen für die Bewilligung eines Kredites, durch welchen der Bezug des notwendigen Leichtmetalles ermöglicht wurde,

den Kabelwerken Brugg, welche das 50 m lange dreiphasige Hochfrequenzkabel fabrizierten und in entgegenkommendster Weise zur Verfügung stellten, sowie

der Signum A.G. in Wallisellen für die Fabrikation und Überlassung der Senderöhren.

Die Durchführung dieser vorliegenden Arbeit wurde zu einem grossen Teile dank der finanziellen Unterstützung durch den Vorstand und Stiftungsrates des Aluminiumfonds und des ETH-Landesausstellungskredites ermöglicht, denen ich mich zu besonderem Dank verpflichtet fühle.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ O. BÖHM, Hf-Techn. und El. Ak. 42/4, S. 139, 1933: „Rundfunk-Sendantennen mit vertikal gebündelter Ausstrahlung“.
- ²⁾ O. BÖHM, Telefunken-Zeitung, 60, S. 26, 1932: „Kurzwellen-Rundstrahlantennen“.
- ³⁾ P. V. HANDEL und H. PLENDL, ENT 10/2, S. 76, 1933: „Selektive Schwunderscheinungen und Höhenmessungen der Jonosphäre“.
- ⁴⁾ R. W. GEORGE, Proc. IRE 27/1, S. 28, 1939: „A study of Ultra-High-Frequency Wide Band Propagation Characteristics“.
- ⁵⁾ NILS E. LINDENBLAD, RCA-Review 3/4, S. 387, 1939: „Television Transmitting-Antenna for Empire State Building“.
- ⁶⁾ G. H. BROWN, Electronics, Heft April, S. 14, 1936: „The Turnstile Antenna“.
- ⁷⁾ F. TANK, Helv. Phys. Acta, Bd. 7 (1934), S. 652: „Die Drehfeldantenne“.
- ⁸⁾ „Die Schweiz im Spiegel der Landesausstellung 1939“, Band I, S. 312, Atlantis-Verlag A.G. Zürich, 1940.
- ⁹⁾ „Die Elektrizität, ein Zeitbild aus der Schweiz. Landesausstellung 1939“. Zürich 1941, S. 150.
- ¹⁰⁾ V. HARDUNG, Bulletin SEV, 32 (1941), S. 584: „Die Strahlungseigenschaften von Drehfeldantennen“.
- ¹¹⁾ J. J. MÜLLER, Dissertation ETH 1937, S. 29: „Oscillations électroniques dans le magnetron“.
- ¹²⁾ H. SAMULON, Helv. Phys. Acta, Bd. 14, S. 281, 1941: „Über die Synchronisierung von Röhrengeneratoren“.
- ¹³⁾ F. TANK und L. ACKERMANN, Helv. Phys. Acta, Bd. 2, S. 512, 1929: „Über die Erzeugung von n -Phasen-Hochfrequenzströmen“.
- ¹⁴⁾ VILBIG, Lehrbuch der Hochfrequenztechnik, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1939.
- ¹⁵⁾ „The Radio Antenna Handbook, second Edition“, 1938 (USA).
- ¹⁶⁾ A. W. LADNER and C. R. STONER, Short Wave Wireless, S. 273, Chapman and Hall, Ltd. London 1936.
- ¹⁷⁾ O. HEYMANN, Veröffentlichungen auf dem Gebiete der Nachrichtentechnik, 4, S. 111, 1934: „Strom- und Spannungsverteilung bei einer dreifachen Leitung“.
- ¹⁸⁾ ABRAHAM-FÖPPL, „Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität“, 4. Aufl., 1912, § 72, S. 301.

Bemerkungen zum Streuproblem in der Elektronenpaartheorie

von J. M. Jauch.

(28. I. 1942.)

Die Schwierigkeiten, welche eine exakte Behandlung der spinabhängigen Kopplungstypen in der Elektronenpaartheorie der Kernkräfte verunmöglichen, werden an Hand der Streuung von Elektronen an schweren Teilchen diskutiert. Es zeigt sich, dass das Auftreten von unelastischen Streuungen mit Paarerzeugung die Ursache dieser Schwierigkeiten ist. Der Wirkungsquerschnitt für solche Streuprozesse wird durch eine störungstheoretische Rechnung zweiter Ordnung abgeschätzt. Er ist exakt gleich Null für die spinunabhängigen Kopplungsansätze.

§ 1. Einleitung.

Die Elektronenpaartheorie der Kernkräfte hat vor der Yukawa'schen Mesontheorie den Vorzug, dass einer Identifikation der (schweren) Elektronen mit den durchdringenden Höhenstrahlen nichts im Wege stünde¹⁾. Bei spinunabhängiger Kopplung hat sie ausserdem den praktischen Vorteil, dass sich die Kernkräfte ohne Störungstheorie berechnen lassen, durch die Hauptachsentransformation einer quadratischen Form²⁾. Der Energieunterschied zwischen Singlett- und Triplettzustand des Deuterons fordert aber einen beträchtlichen Anteil spinabhängiger Kräfte, und um Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erreichen, müssen auch spinabhängige Kopplungstypen eingeführt werden. Die Methode der Hauptachsentransformation ergibt aber für solche Wechselwirkungen keine exakten Lösungen mehr.

Die Schwierigkeiten, welche in diesen Fällen einer exakten Behandlung im Wege stehen, seien in dieser Arbeit am einfacheren Problem der Streuung von Elektronen an schweren Teilchen erläutert. Im § 2 wird zuerst die strenge Methode auf die zwei einfachsten spinunabhängigen Wechselwirkungsansätze angewendet. Im § 3 wird dann auf die Schwierigkeiten hingewiesen, welche eine analoge Behandlung des Streuproblems bei spinabhängigen Kräften verhindern, nämlich das Auftreten von Prozessen mit Paarerzeugung. Im § 4 soll der Wirkungsquerschnitt für die unelastische Streuung unter gleichzeitiger Emission eines Paares wenigstens störungsmässig berechnet werden. Dieser Prozess tritt nicht auf bei spinunabhängigen Wechselwirkungen.

¹⁾ CHRISTY und KUSAKA, Phys. Rev. **59**, 414 (1941).

²⁾ JAUCH, Helv. Phys. Acta **15**, 175 (1942).

§ 2. Exakte Lösung des Streuproblems für die spinunabhängigen Kopplungstypen.

Ein im Koordinatenursprung ruhendes schweres Teilchen verursacht durch seine Wechselwirkung mit dem Elektronenfeld einen Zusatzterm in der Hamiltonfunktion dieses Feldes.

$$\bar{H}' = \int \psi^*(x) u^*(x) dV_x O \int \psi(x') u(x') dV_{x'} \quad (2.1)$$

ψ, ψ^* sind die nach dem Ausschliessungsprinzip quantisierten Wellenfunktionen des Elektronenfeldes. $u(x)$ stellt eine Quellenfunktion des schweren Teilchens dar, die man einführen muss, um die Konvergenz der auftretenden Integrale zu erzwingen. Wir wählen im folgenden eine spezielle Funktion, welche die Rechnung etwas vereinfacht, nämlich

$$u(x) = \left(\frac{K}{r}\right)^{3/2} J_{3/2}(Kr) = (2\pi)^{-3/2} \int_{|k| < K} e^{-i(k, x)} dV_k \quad (r = |x|) \quad (2.2)$$

Diese Wahl entspricht einem scharfen Abschneiden im Impulsraum mit dem Abschneideradius K . Es ist dann

$$\lim_{K \rightarrow \infty} u(x) = (2\pi)^{3/2} \delta(x)$$

Der Operator O ist für die spinunabhängigen Kopplungstypen einer der beiden Operatoren β oder 1 . η ist der Kopplungsparameter von der Dimension einer Fläche.

Im Impulsraum lautet die gesamte Hamiltonfunktion

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}'$$

$$= \int \varphi^*(k) \{(\alpha, k) + \mu\beta\} \varphi(k) dV_k + \eta \int_{|k'| < K} \varphi^*(k') dV_{k'} O \int_{|k| < K} \varphi(k) dV_k \quad (2.3)$$

mit

$$\varphi(k) = (2\pi)^{-3/2} \int \psi(x) e^{-i(k, x)} dV_x$$

μ ist die Masse der Elektronen in Einheiten cm^{-1} .

Die Normalkoordinaten, welche diese (kontinuierliche) quadratische Form auf Hauptachsen transformieren, stellen dann die Lösungen des Streuproblems dar. Sie sind erst eindeutig bestimmt, wenn wir noch die „Randbedingung“ hinzunehmen, dass sie asymptotisch von der Form einer ebenen plus auslaufenden Kugelwelle sind. Die Gleichung für diese Normalkoordinaten ergibt sich aus (2.3)

$$\{(\alpha, k) + \mu\beta - \Omega\} \varphi(k) + \eta O \int \varphi(k') dV_{k'} = 0 \quad (2.4)$$

Der Eigenwert Ω ist gleich der Energie $+(\mu^2 + k_0^2)^{1/2}$ des einfallenden Elektrons mit dem Impuls k_0 . Durch Multiplikation mit dem Operator

$$\frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2}$$

wird aus (2.4):

$$\varphi(k) + \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} \eta O \int_{|k'| < K} \varphi(k') dV_{k'} = (2\pi)^{3/2} \delta(k - k_0) \varphi_0(k) \quad (2.5)$$

Der Term rechter Hand ist so bestimmt, dass die Amplitude der ebenen Welle im x -Raum gleich 1 ist (vgl. (2.9)). $\varphi_0(k)$ sind die auf 1 normierten Komponenten der ebenen Welle

$$\{(\alpha, k) + \mu\beta - \Omega\} \varphi_0(k) = 0 \quad \varphi_0^* \varphi_0 = 1$$

Die lineare Integralgleichung (2.5) für $\varphi(k)$ lässt sich sehr einfach lösen, weil ihr Kern ausgeartet ist. Wir brauchen nur die ganze Gleichung über alle $|k| < K$ zu integrieren und erhalten dann für $\lambda = \int_{|k| < K} \varphi(k) dV_k$ die Gleichung

$$\{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\} \lambda = (2\pi)^{3/2} \varphi_0(k) \quad (2.6)$$

mit

$$D = 4\pi \int_0^K \frac{k^2}{k^2 - k_0^2} dk \quad (2.7)$$

Das Integral D divergiert an der Stelle $k = k_0$ und um ihm einen Sinn zu geben, werden wir den Integrationsweg so ins Komplexe deformieren, dass die $\varphi(x)$ nur auslaufende Kugelwellen enthalten (s. u. (2.13')). Aus (2.6) ergibt sich

$$\lambda = (2\pi)^{3/2} \{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\}^{-1} \varphi_0(k_0) \quad (2.8)$$

und wenn wir diesen Ausdruck für λ in (2.5) einführen

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= (2\pi)^{3/2} \delta(k - k_0) \varphi_0(k_0) \\ &- (2\pi)^{3/2} \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} O \{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\}^{-1} \varphi_0(k_0) \end{aligned}$$

Wenn wir in den x -Raum zurücktransformieren, wird daraus

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi_0(k_0) e^{i(k, x)} \\ &- \eta \left\{ \int_{|k| < K} \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} e^{i(k, x)} dV_k \right\} O \{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\}^{-1} \varphi_0(k_0) \quad (2.9) \end{aligned}$$

Der erste Term ist die einfallende ebene Welle und der zweite Term die gestreute Kugelwelle. Nach Ausführung der Richtungsintegration wird das Integral

$$\int \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} e^{i(k, x)} dV_k = \frac{4\pi}{r} \left\{ (\mu\beta + \Omega) \int_0^K \frac{k \sin kr}{k^2 - k_0^2} dk + \frac{i}{r^2} (\alpha, x) \int_0^K \frac{k \sin kr - k^2 r \cos kr}{k^2 - k_0^2} dk \right\} \quad (2.10)$$

worin wir $r = |x|$ gesetzt haben. Damit die Gleichung (2.9) einen Sinn hat, muss man in diesen Integralen für k denselben Integrationsweg wählen wie in D . Da wir uns nur für das asymptotische Verhalten der Kugelwelle interessieren, können wir $k_0 r \gg 1$ setzen. Das erlaubt verschiedene Vereinfachungen. Zunächst können wir den Term mit $k \sin kr$ neben dem mit $k^2 r \cos kr$ im zweiten Integral vernachlässigen. Es bleiben dann noch die beiden Integrale

$$I = \int_0^K \frac{k^2 \cos kr}{k^2 - k_0^2} dk \quad II = \int_0^K \frac{k \sin kr}{k^2 - k_0^2} dk$$

Wegen $I = \frac{dII}{dr}$ können wir uns auf die Berechnung von II beschränken.

$$II = \frac{1}{2i} \int_{-K}^{+K} \frac{k e^{ikr}}{k^2 - k_0^2} dk.$$

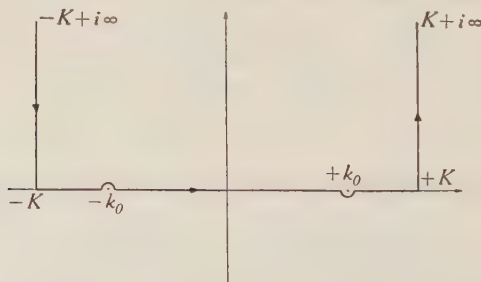


Fig. 1.

Integrationsweg in der komplexen k -Ebene.

Wir addieren zum Integrationsweg noch zwei Stücke, nämlich von $+i\infty$ bis $-K$ und von $+K$ bis $+i\infty$. Dem Pol bei $k = -k_0$ weichen wir nach links aus und dem Pol $k = +k_0$ entsprechend nach rechts (Fig. 1). Wegen der Exponentialfunktion ist der Beitrag zum Integral auf diesen beiden Stücken um eine Grössen-

ordnung $k_0 r \gg 1$ kleiner, als auf dem Hauptteil des Weges. Das Integral kann man nun mittelst des Residuensatzes ausrechnen:

$$I = \frac{i\pi}{2} k_0 e^{ik_0 r} \quad II = \frac{\pi}{2} e^{ik_0 r}$$

Das ergibt in (2.10) eingesetzt

$$\int \frac{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega}{k^2 - k_0^2} e^{i(k, x)} dV_k = \frac{2\pi^2}{r} \{(\alpha, n) k_0 + \mu\beta + \Omega\} e^{ik_0 r} \quad (2.11)$$

n ist der Einheitsvektor in der Streurichtung: $n = x/r$. Ferner ergibt sich nun für D auf demselben Integrationsweg

$$D = 4\pi \int_0^K \frac{k^2}{k^2 - k_0^2} dk = 4\pi K + 2\pi^2 i k_0 + 2\pi k_0 \ln \frac{K - k_0}{K + k_0} \quad (2.12)$$

Der Ausdruck für die Streuwelle lautet also (vgl. (2.9))

$$\begin{aligned} 2\pi^2 \eta \frac{e^{ik_0 r}}{r} \{(\alpha, n) k_0 + \mu\beta + \Omega\} O \{1 + \eta(\beta + \Omega)OD\}^{-1} \varphi_0(k_0) \\ = \frac{e^{ik_0 r}}{r} \Gamma \varphi_0(k_0) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Der Strom dieser Streuwelle ist

$$i - \frac{1}{r^2} \varphi_0^* \Gamma^* \vec{\alpha} \Gamma \varphi_0 - \frac{1}{r^2} \frac{k_0}{\Omega} \vec{n} \varphi_0^* \Gamma^* \Gamma \varphi_0$$

während der Strom der ebenen Welle $= k_0/\Omega$ ist. Der differentielle Streuquerschnitt für die Streuung in den Winkelbereich $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ ist somit, wenn wir noch über die Spinzustände mitteln

$$\sigma = \frac{1}{2} \text{sp } V \Gamma^* \Gamma$$

mit

$$\Gamma = 2\pi^2 \eta \{(\alpha, n) k_0 + \mu\beta + \Omega\} O \{1 + \eta(\mu\beta + \Omega)OD\}^{-1}$$

$$V(k_0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(\alpha, k_0) + \mu\beta}{\Omega} \right\}$$

Die Ausrechnung der Spuren bietet keine Schwierigkeit und ergibt

$$\sigma = \frac{16 \pi^4 \eta^2}{|(1 + \eta \mu O)^2 - \eta^2 \Omega^2 D^2|} \left\{ \Omega^2 + k_0^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} (-1 - \eta \mu (D + D^*) + \eta^2 k_0^2 D D^*) \right\} \quad \text{für } O = \beta \quad (2.14)$$

$$\sigma = \frac{16 \pi^4 \eta^2}{|(1 + \eta \Omega D)^2 - \eta^2 \Omega^2 D^2|} \left\{ \mu^2 + k_0^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} (1 + \eta \Omega (D + D^*) + \eta^2 k_0^2 D D^*) \right\} \quad \text{für } O = 1$$

Man entnimmt aus diesen Formeln, dass im Limes $K \rightarrow \infty$ die Streuung verschwindet. Bei punktförmigen schweren Teilchen gibt es also keine Streuung. Im Grenzfall $K^2 \eta \ll 1$ dagegen gehen diese beiden Streuquerschnitte in die störungsmässig berechneten über¹⁾. Die erste dieser Formeln ist schon von WEINBERG mit etwas anderer Bezeichnung angegeben worden²⁾.

Wir haben in einer früheren Arbeit³⁾ die Eigenfunktionen berechnet mit einer andern Art der Abschneidung, indem wir dort statt (2.11) geschrieben haben

$$\bar{H}^1 = \eta \int \Delta(r) \psi^*(x) O \psi(x) dV_x \quad (2.15)$$

worin

$$\Delta(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} \frac{1}{r_0^3} & \text{für } r < r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

bedeutet. Es ist dann $\lim_{r_0 \rightarrow 0} \Delta(r) = \delta(r)$ und in dieser Grenze ist \bar{H}' mit der relativistisch invarianten Grenzfunktion identisch. Wir haben aber dort für den Fall $O = 1$ ein anderes Resultat erhalten, als mit der hier verwendeten Abschneidemethode. Das zu (2.4) entsprechende Eigenwertproblem war nämlich äquivalent mit dem Problem eines einzelnen Elektrons, das sich in einem Δ -Potential

¹⁾ Das sieht man am leichtesten, wenn man in dem Ausdruck für I' nur die niedersten Potenzen in η beibehält.

$$I' \subseteq 2\pi^2 \eta \{(\alpha, k) + \mu\beta + \Omega\} O = 4\pi^2 \eta \Omega V(k) O$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \text{sp } V I'^* I' \subseteq (2\pi)^4 \eta^2 \frac{\Omega^2}{2} \text{sp } V(k_0) O V(k) O,$$

was mit dem störungsmässig berechneten übereinstimmt.

²⁾ WEINBERG, Phys. Rev. **59**, 776 (1941).

³⁾ JAUCH, Helv. Phys. Acta **14**, 465 (1941).

bewegt. Bekanntlich hat in der Dirac'schen Theorie ein δ -Potential wegen des Klein'schen Paradoxons keinen Sinn, da die Grenzfunktionen nicht existieren. Es ist auch anschaulich verständlich, dass die beiden Methoden zu verschiedenen Ergebnissen führen müssen, denn im einen Fall (2.15) mittelt man das Quadrat der Wellenfunktion über den Δ -Bereich, während man im andern (2.1) die Wellenfunktionen zuerst mittelt und dann das Produkt bildet. Wenn die Wellenfunktionen im Innern oszillatorisch verlaufen, ist das Resultat dieser beiden Mittelungen natürlich verschieden. Wir müssen also schliessen, dass das Resultat noch von der Art des Grenzüberganges zur δ -Funktion abhängt. Diese Tatsache erhellt in drastischer Weise die Fragwürdigkeit solcher Abschneidemethoden.

§ 3. Spinabhängige Kopplung.

Man könnte nun versucht sein, das Verfahren des vorigen Paragraphen auf die spinabhängigen Kopplungstypen auszudehnen. Doch ergibt das nicht mehr exakte Lösungen, weil sich das quantisierte Problem nicht mehr durch eine Hauptachsentransformation auf ein Einkörperproblem reduzieren lässt. Entwickeln wir ψ in H nach ebenen Wellen $\psi = \sum_n a_n \psi_n$, so wird $\bar{H} \equiv \bar{H}^0 + \bar{H}^1$

$$\bar{H}^0 = \sum_n E_n a_n^* a_n \quad \bar{H}^1 = \sum_{m,n} a_m^* a_n O_{mn}$$

worin wir die Zustände k, λ durch eine einzige Quantenzahl n numeriert denken. O_{mn} ist ein Operator bezüglich der Spinindizes ϱ des schweren Teilchens, von denen das Schrödingerfunktional abhängt:

$$F = F_{\varrho} (N_1^+, N_2^+, \dots; N_1^-, N_2^-, \dots)$$

N_1^+, N_2^+, \dots sind die Besetzungszahlen (0 oder 1) der Zustände mit positiver Energie, und N_1^-, N_2^-, \dots sind die Besetzungszahlen der Zustände mit negativer Energie. a_n, a_n^* sind die bekannten Operatoren, die die Besetzungszahlen um ± 1 ändern, mit den Vertauschungsrelationen

$$[a_m, a_n^*]_+ = \delta_{mn}$$

Beim Streuproblem werden wir nun von einem Anfangszustand ausgehen, bei dem F nur dann von Null verschieden ist, wenn ein Zustand (n) im positiven Energiebereich und alle Zustände im negativen Energiebereich besetzt und alle übrigen Zustände unbesetzt sind:

$$F_{\varrho} (0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, \dots; 1, 1, \dots, 1) = 1$$

während alle übrigen Komponenten gleich 0 sind.

Die Kopplung \bar{H}' bewirkt dann einerseits Übergänge $n \rightarrow m$ des Elektrons positiver Energie, d. h. das Auftreten von F -Komponenten vom Typus

$$F_e \left(0, \dots, 0, \overbrace{1}^m, 0, \dots; 1, 1, \dots \right)$$

andererseits treten aber auch F -Komponenten vom Typus

$$F_e \left(0, \dots, 1, \overbrace{0}^m, \dots, \overbrace{1}^n, 0, \dots; 1, 1, \dots, 1, \overbrace{0}^l, 1, \dots \right)$$

auf, die der Erzeugung von Paaren entsprechen.

Wenn wir Übergänge vom letzteren Typus weglassen (also die betreffenden F -Komponenten Null setzen), dann ist das Problem ein Einkörperproblem und kann nach derselben Methode behandelt werden, nach der im vorigen Paragraphen die spinunabhängigen Typen behandelt worden sind. Wir brauchen dann einfach

$$F_e \left(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^m, 0, \dots; 0; 1, 1, \dots \right) = \varphi_e(m) = \varphi_e(\lambda, k) \\ (\text{vgl. § 4})$$

zu setzen. Dieses Problem ist, wenn man wieder in den Ortsraum transformiert und die Abschneidung mittels der $\Delta(r)$ -Funktion wählt, identisch mit dem vom Verfasser in der oben erwähnten Arbeit behandelten Problem. Die mit dieser Rechenmethode erhaltenen Lösungen sind zwar nicht exakt, stellen aber dann eine gute Näherung dar, wenn das Auftreten von Paaren z. B. aus energetischen Gründen ausgeschlossen oder unbedeutend ist. Die Situation dürfte ähnlich sein wie in der bekannten „exakten“ Theorie der Elektronenstreuung in Atomfeldern (FAXÉN-HOLTSMARK), wo die der unelastischen Streuung entsprechenden Anteile der Schrödingerfunktion vernachlässigt werden; von derselben Art werden die Fehler sein, die wir in unserm Problem begehen, wenn wir die unelastische Streuung mit Paarerzeugung vernachlässigen. Eine störungsmässige Berechnung dieser Paarerzeugung durch spinabhängige Kopplung soll im nächsten Paragraphen gegeben werden.

Im Falle $O = 1$ oder $O = \beta$ gelingt es, durch eine unitäre Transformation der ψ_n , O diagonal zu machen: $O_{mn} = O_n \delta_{mn}$. Die ψ_n sind dann aber keine ebenen Wellen mehr, sondern enthalten eine Streuwelle. Das ist die Methode des Paragraphen 2. \bar{H}' wird dann

$$\bar{H}' = \sum_n O_n a_n^* a_n \text{ und } \bar{H}F = F \sum_n (O_n + E_n) N_n;$$

daraus erkennt man sofort, dass in diesen Fällen keine Paarerzeugung auftreten kann. Dieses Resultat wird im nächsten Paragraphen auch durch die störungstheoretische Rechnung bestätigt.

Diese Komplikation durch Paarerzeugung dürfte eine exakte, auch für starke Kopplung gültige Berechnung der spinabhängigen Kernkräfte in dieser Theorie verunmöglichen. Dieser Umstand scheint von CRITCHFIELD in seiner Berechnung spinabhängiger Kernkräfte übersehen worden zu sein¹⁾.

§ 4. Störungsmässige Berechnung der unelastischen Streuung für spinabhängige Kopplungstypen.

Wir transformieren den Störungsoperator in den Impulsraum, indem wir setzen

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_{\lambda} a(\lambda, k) \varphi(\lambda, k) e^{i(k, x)} dV_k \quad (3.1)$$

die $\varphi(\lambda, k)$ sind die auf 1 normierten Komponenten der Lösungen von

$$\{(\alpha, k) + \mu\beta - \Omega\} \varphi(\lambda, k) = 0 \quad \Omega = \pm (\mu^2 + k^2)^{1/2} \quad (3.2)$$

λ numeriert die vier Zustände der beiden Spinorientierungen und der beiden Vorzeichen der Energie. Die $a(\lambda, k)$ sind die Operatoren mit den Vertauschungsrelationen

$$[a^*(\lambda, k), a(\lambda' k')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k') \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}' &= \eta \int \sum_{\lambda\lambda'} a^*(\lambda, k) O(\varrho\lambda k; \sigma\lambda' k') a(\lambda', k') dV_k dV_{k'} \\ O(\varrho\lambda k; \sigma\lambda' k') &= \varphi^*(\lambda, k) O_{\varrho\sigma} \varphi(\lambda' k') \end{aligned} \quad (3.4)$$

bezeichnen die Matricelemente des Wechselwirkungsoperators. ϱ, σ beziehen sich auf den Spin des schweren Teilchens. Für die beiden in § 2 betrachteten Wechselwirkungstypen ist $O(\varrho\lambda k; \sigma\lambda' k')$ von der Form $\delta_{\varrho\sigma} O(\lambda k; \lambda' k')$. Die Tensor- und Pseudovektorkopplung dagegen sind von der Form $O = (\vec{S}, \vec{P})$ mit $\vec{P} = \beta \vec{\sigma}$ bzw. $\vec{P} = \vec{\sigma}$ für die beiden Fälle. (Der Pseudoskalar verschwindet in der Näherung des ruhenden schweren Teilchens.)

Die unelastischen Prozesse mit Paarerzeugung treten erst in der Störungstheorie zweiter Ordnung auf. Im Ausgangszustand (A)

¹⁾ CRITCHFIELD, Phys. Rev. **56**, 540 (1939). Ausserdem ist bei der Transformation der ψ auf die Singlett- und Tripletzustände des Operators $1 + \lambda(\sigma, \sigma^k)$ nicht berücksichtigt worden, dass diese Transformation mit $\varrho(\sigma, c\rho)$ nicht vertauschbar ist. Die Zurückführung des Problems auf zwei spinunabhängige mit den Kopplungskonstanten $\eta(1 + \lambda)$ und $\eta(1 - 3\lambda)$ ist deshalb nicht möglich.

sind alle negativen Zustände besetzt und ausserdem ein Elektron mit dem Impuls k_0 im Spinzustand λ_0 mit der positiven Energie $+(\mu^2 + k_0^2)^{1/2}$ anwesend. Das streuende schwere Teilchen befinde sich im Spinzustand ϱ . Als Zwischenzustände (Z) können die folgenden auftreten:

I. Das Elektron $k_0\lambda_0$ bleibt unverändert. Aber es entsteht ein Paar, indem ein Elektron aus dem Zustand $l'\mu'$ im negativen Kontinuum in den Zustand $k'\lambda'$ im positiven Kontinuum gehoben wird. Der Spin des schweren Teilchens geht dabei über in σ .

II. Das Elektron und der Kernspin gehen in den Zustand k, λ bzw. σ . Aber es ist noch kein Paar anwesend.

Beide Zwischenzustände führen zum Endzustand (B): $k\lambda\varrho$ für das gestreute Elektron, bzw. Kernspin und $k'\lambda'$ bzw. $l'\mu'$ für das Elektron-Positronpaar.

Zwei weitere Zwischenzustände I' und II' ergeben sich, wenn man in den Zuständen I und II die Rollen von $k\lambda$ und $k'\lambda'$ vertauscht. Sie führen zu demselben Endzustand B, da durch die Messung nicht festgestellt werden kann, welches der beiden Elektronen das gestreute und welches das Paarelektron ist. Jeder der vier Zustände I, II, I', II' wird noch verdoppelt durch die beiden Spinzustände des schweren Teilchens. Es gibt also im ganzen 16 Zwischenzustände Z. Wegen der Energieerhaltung muss

$$(\mu^2 + k_0^2)^{1/2} = (\mu^2 + k^2)^{1/2} + (\mu^2 + k'^2)^{1/2} + (\mu^2 + l'^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

sein. Für die Zwischenzustände gilt keine Energieerhaltung, sondern es ist

$$\left. \begin{aligned} E_A - E_I &= -(\mu^2 + k'^2)^{1/2} - (\mu^2 + l'^2)^{1/2} = \varepsilon \\ E_A - E_{II} &= (\mu^2 + k_0^2)^{1/2} - (\mu^2 + k^2)^{1/2} = -\varepsilon \\ E_A - E_{I'} &= -(\mu^2 + k^2)^{1/2} - (\mu^2 + l'^2)^{1/2} = \varepsilon' \\ E_A - E_{II'} &= (\mu^2 + k_0^2)^{1/2} - (\mu^2 + k'^2)^{1/2} = -\varepsilon' \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Das Matricelement für die Übergänge $A \rightarrow B$ ist dann

$$\begin{aligned} H_{AB} = \sum_{(Z)} \frac{H_{AZ} H_{ZB}}{E_A - E_Z} &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\sigma} \{ H_{AI} H_{IB} - H_{AII} H_{IIB} \} \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon'} \sum_{\sigma'} \{ H_{AI'} H_{I'B} - H_{AII'} H_{I'I'B} \} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Das negative Vorzeichen im zweiten Term rührt von den Vertauschungsrelationen (3.3) her. Es sorgt dafür, dass für $k, \lambda = k', \lambda'$ das Matricelement verschwindet, wie es nach dem Ausschlussprinzip sein muss.

Der Streuquerschnitt für die unelastische Streuung ist

$$\sigma = 8 \frac{(2\pi)^4}{v} \varrho_B \overline{|H_{AB}|^2} \quad (3.8)$$

Der Strich bedeutet die Mittelung über alle Zustände der Spins der drei leichten und des schweren Teilchens. ϱ_B ist die Dichte der Endzustände mit der Energie $E_B = (\mu^2 + k_0^2)^{1/2}$. Da wegen der Anwesenheit des festgehaltenen schweren Teilchens keine Impulserhaltung gilt, ist ϱ_B das Produkt der drei Dichten der Teilchen k, k', l' .

$$\varrho_B = k E_k k' E_{k'} l' E_{l'} dE_k dE_{k'} d\varphi_k d\varphi_{k'} d\varphi_{l'} \quad (3.9)$$

$d\varphi$ sind die Raumwinkeldifferentiale der drei Teilchen. Bei spinabhängiger Kopplung wird vermöge der speziellen Form (\tilde{S}, \tilde{P}) von O für H_{AB}

$$H_{AB} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{r,s,\sigma} P^{(r)}(\mu' l'; \lambda' k') P^{(s)}(\lambda_0 k_0; \lambda k) \left\{ \sum_{\varrho_0 \sigma}^{(r)} \sum_{\sigma \varrho}^{(s)} - \sum_{\varrho_0 \sigma}^{(s)} \sum_{\sigma \varrho}^{(r)} \right\} \\ - \frac{1}{\varepsilon'} \sum_{r,s,\sigma} P^{(r)}(\mu' l'; \lambda k) P^{(s)}(\lambda_0 k_0; \lambda' k') \left\{ \sum_{\varrho_0 \sigma}^{(r)} \sum_{\sigma \varrho}^{(s)} - \sum_{\varrho_0 \sigma}^{(s)} \sum_{\sigma \varrho}^{(r)} \right\}$$

Durch Benutzung der Vertauschungsrelationen der $\Sigma^{(r)}$ kommt

$$H_{AB} = \frac{i}{\varepsilon} \left(\sum_{\varrho_0 \varrho} \left[\tilde{P}(\mu' l'; \lambda' k') \times \tilde{P}(\lambda_0 k_0; \lambda k) \right] \right) \\ - \frac{i}{\varepsilon'} \left(\sum_{\varrho_0 \varrho} \left[\tilde{P}(\mu' l'; \lambda k) \times \tilde{P}(\lambda_0 k_0; \lambda' k') \right] \right) \quad (3.10)$$

Das Nichtverschwinden dieses Matrixelementes liegt wesentlich an der Nichtvertauschbarkeit der Operatoren für den Kernspin. Bei spinabhängiger Kopplung $O = \beta$ oder $O = 1$ verschwindet H_{AB} . Die Mittelung von $|H_{AB}|^2$ über alle Spinzustände, einschliesslich des Kernspins, kann man in bekannter Weise mittels der Vernichtungsoperatoren durch Spurenbildung ersetzen.

Der Wirkungsquerschnitt für die unelastische Streuung in den Winkelbereich $d\varphi_k$ unter gleichzeitiger Emission eines Elektron-Positronpaares in die Winkel- und Energiebereiche $d\varphi_{k'}, d\varphi_{l'}$ bzw. $dE_{k'}, dE_{l'}$ ist dann

$$\sigma_n = 128 \pi^4 \eta^4 k k' l' E_{k'} E_{l'} E_k E_{k_0} \frac{1}{k_0} \\ \times \left\{ \frac{F_1}{(E_k + E_{l'})^2} + \frac{F_2}{(E_k + E_{l'})(E_{k'} + E_{l'})} + \frac{F_3}{(E_{k'} + E_{l'})^2} \right\} d\varphi_k d\varphi_{k'} d\varphi_{l'} dE_{k'} E_{l'} \quad (3.11)$$

Die drei Funktionen $F_1 F_2 F_3$ sind von der Grössenordnung 1 und hängen in komplizierter Weise von den vier Energien und allen Winkeln zwischen den Impulsen der ausgesandten Teilchen ab.

Die unelastischen Streuungen mit Paarerzeugung treten also erst in zweiter Näherung auf und können für alle Energien neben den elastischen vernachlässigt werden, falls $K^2 \eta \ll 1$ ist. Für solche Werte des Parameters η ist dann auch die Störungstheorie gültig. Wenn dagegen $K^2 \eta \gtrsim 1$ ist, dann können durch Prozesse höherer Ordnung auch mehrere Paare gleichzeitig durch das einfallende Teilchen erzeugt werden, sofern die Energie dazu ausreicht. Der unelastische Streuquerschnitt wird dann für hohe Energien von derselben Grössenordnung sein, wie der elastische. Doch lässt sich mit der Störungstheorie nichts Quantitatives darüber aussagen.

Herrn Prof. WENTZEL möchte ich hier danken für viele anregende Diskussionen über die Elektronenpaartheorie.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Elektronenbandenspektren von drei-atomigen linear-unsymmetrischen Molekülen¹⁾

von Paul Müller.

(16. II. 1942.)

Inhalt: Ausgehend von der Tatsache, dass die linearen symmetrischen Quecksilberhalogenide HgX_2 ($X = \text{Cl, Br, J}$) im Schumanngebiet gut ausgebildete Elektronenbandensysteme aufweisen, werden mit einem 1-m-Vakuumgitterspektrographen die Dämpfe der Substanzen HgXY untersucht. Dabei ergeben sich drei neue, einfach gebaute Bandensysteme, die eindeutig den in Dampfform noch unbekannten Molekülen HgClBr , HgBrJ und HgClJ zugeordnet werden können.

Diese Mischmoleküle sind linear und *unsymmetrisch*, es werden deshalb die Eigenschaften der Bandensysteme solcher Moleküle näher diskutiert. Für die obigen Moleküle ergibt sich, dass sie sich in Bezug auf ihre Bandenspektren noch sehr ähnlich wie die symmetrischen Moleküle verhalten. Bei HgClBr und HgBrJ gehören alle beobachteten Banden zu Übergängen zwischen Energiezuständen, bei denen lediglich die Gegentaktschwingungen ω_1 ($0 \rightarrow 0 \rightarrow \leftarrow 0$) angeregt sind. Nur HgClJ ist unsymmetrisch genug, so dass es die typischen Eigenschaften der unsymmetrischen Moleküle aufweist, nämlich das Auftreten von Banden, deren zugehörige Energiezustände auch die Gleichtaktschwingung ω_2 ($\leftarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \leftarrow 0$) enthalten. Die von der Theorie geforderte Auswahlregel, die im Grenzfalle symmetrischer Moleküle verlangt, dass die Quantenzahlen der Gleichtaktschwingungen ω_2 nur um gerade Zahlen springen dürfen, ist dabei experimentell noch deutlich feststellbar.

Beobachtete und berechnete Ergebnisse.

Molekül	Schwingungsfrequenzen in cm ⁻¹						Nullbande der Systeme in ÅE beob.
	angeregter Zustand		Grundzustand				
	ω_1 beob.	ω_2 beob.	ω_1 ber.		ω_2 beob.		
HgClBr	156	—	260	270	403	(390)	1784,7
HgBrJ	155	—	179	195	285	—	1806,7
HgClJ	170	390	192	204	400	408	1781,3

Die für den Grundzustand berechneten Werte von ω_1 und ω_2 wurden unter Zugrundelegung des Valenzkraftsystems aus den bekannten Grundfrequenzen bzw. Bindungskonstanten der symmetrischen Quecksilberhalogenide berechnet. Die Übereinstimmung mit den beobachteten Daten bestätigt die Gültigkeit des Valenzkraftsystems.

¹⁾ Ein kurzer Bericht über einen Teil dieser Arbeit ist in *Helv. Phys. Acta* **14**, 134, 1941 erschienen.

§ 1. Einleitung.

Die Elektronenbandenspektren der linearen 3-atomigen Moleküle bilden zwei Gruppen, indem die Träger der Spektren entweder symmetrisch oder unsymmetrisch sein können. Über das Verhalten der ersten Gruppe ist schon ziemlich viel bekannt. So haben kürzlich WEHRLI¹⁾ und SPONER & TELLER²⁾ die Schwingungsstruktur der Bandensysteme von HgCl_2 und HgBr_2 vollständig analysiert und dabei die theoretischen Erwartungen weitgehend bestätigt. Dagegen weiss man bedeutend weniger über die zweite Gruppe von Spektren, die zu unsymmetrischen Molekülen gehören. Experimentell sind bei COS , HCN und NNO ²⁾ Bandensysteme festgestellt worden. Dabei wird pro System meistens nur eine einzige Schwingungsstufe als häufig vorkommende Wellenzahldifferenz angeführt, deren Deutung wenig gesichert ist. Das bisherige Versuchsmaterial scheint zu einer ausführlichen Analyse eines Spektrums von linear-unsymmetrischen Molekülen nicht auszureichen. Es sind deshalb auch die theoretisch erwarteten, typischen Eigenschaften dieser Gruppe von Bandenspektren noch nicht näher diskutiert worden.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit soll deshalb die Untersuchung von Elektronenbandenspektren unsymmetrischer Moleküle sein. Ausgehend von den Quecksilberhalogeniden HgX_2 ($X = \text{Cl}$, Br oder J), die nach WEHRLI¹⁾ sehr gut ausgebildete Bandensysteme aufweisen, schien es lohnend, nach den Spektren der gemischten Derivate oder kurz der *unsymmetrischen Mischmoleküle* HgXY ($X, Y = \text{Halogen}$) zu suchen. Wegen der Linearität der Moleküle HgX_2 kann man bei Gültigkeit des Valenzkraftsystems erwarten, dass die Mischmoleküle ebenfalls linear und im Dampfe stabil sind. DELWAULLE und FRANÇOIS³⁾ haben an gemischten alkoholischen Lösungen von HgCl_2 und HgBr_2 , sowie von HgBr_2 und HgJ_2 neue Ramanlinien festgestellt, die sie den Mischmolekülen HgClBr und HgBrJ zuordnen; die Existenz dieser Moleküle ist damit sehr wahrscheinlich gemacht. Die Schwingungsfrequenzen der Mischmoleküle HgXY lassen sich aus den Daten der Moleküle HgX_2 berechnen, falls das Valenzkraftsystem gilt, dessen Gültigkeit damit einer weiteren Prüfung unterzogen werden kann.

¹⁾ M. WEHRLI, *Helv. Phys. Acta* **11**, 339, 1938 und **13**, 153, 1940.

²⁾ H. SPONER und E. TELLER, *Rev. Modern Phys.* **13**, 76, 1941 (*Electronic Spectra of Polyatomic Molecules*). Zusammenfassender Bericht.

³⁾ M. DELWAULLE, *C. R.* **206**, 1965, 1938 und **208**, 999, 1939; F. FRANÇOIS, *C. R.* **207**, 425, 1938.

§ 2. Die Herstellung der Substanzen HgClI , HgClBr und HgBrJ .

In seinem Handwörterbuch der Chemie führt FEHLING¹⁾ Herstellungsangaben von HgClI und HgBrJ an, die von 1879 und 1869 datieren. Die Existenz der Substanz HgClI scheint seither nicht mehr bestritten worden zu sein; dagegen verneinen REINDERS²⁾, VAN NEST³⁾ und VOURNAZOS⁴⁾ die Verbindung HgBrJ . VAN NEST hält das vermutliche HgBrJ für einen Mischkristall aus HgBr_2 und HgJ_2 . Untersuchungen mit Mischungen von HgCl_2 und HgBr_2 führen dagegen zum Ergebnis, dass eine Verbindung zwischen diesen Molekülen möglich ist. Zum gleichen Resultat gelangt LOSANO⁵⁾, der eine sehr instabile Verbindung in festem Zustande vermutet. Die gegenteilige Ansicht vertreten HINTZ und JELLINEK⁶⁾, auf Grund von Dampfdruckmessungen, und PELT und BOER⁷⁾, die sich auf Untersuchungen über Lösungswärmen und Löslichkeit stützen. Das Vorhandensein der Substanzen HgBrJ und HgClBr scheint auf Grund all dieser Arbeiten sehr fragwürdig zu sein.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Substanzen wurden nach den von FEHLING (l. c.) zitierten Verfahren von der Aktiengesellschaft vorm. B. SIEGFRIED⁸⁾ in Zofingen hergestellt, HgClI nach KÖHLER⁹⁾ durch Erhitzen eines Gemenges von HgCl_2 und HgJ_2 oder von Hg_2Cl_2 und J_2 im zugeschmolzenen Rohr auf 140—160° C und HgBrJ nach OPPENHEIM¹⁰⁾ durch Einwirken von Jodallyl, Jodäthyl oder Jodamyl auf in Azeton gelöstes HgBr_2 . HgClBr , von dem in FEHLING keine Herstellungsangaben vorhanden sind, wurde analog wie HgClI gebildet. Alle drei Substanzen sind in ihren physikalischen Eigenschaften den symmetrischen Quecksilberhalogeniden sehr ähnlich. Ihre Schmelzpunkte liegen bei 153° für HgClI , 229° für HgBrJ und 226° für HgClBr .

¹⁾ FEHLING, Handwörterbuch der Chemie, 1890, **5**, 1108 und 1116. GMEHLIN-KRAUT, Handbuch der anorganischen Chemie **V** **2**, 764, 806 und 808.

²⁾ W. REINDERS, ZS. f. phys. Chem. **32**, 503, 1900.

³⁾ J. VAN NEST, Beiträge zur Kenntnis der Quecksilberhalogenide, Diss. München 1909.

⁴⁾ A. CH. VOURNAZOS, Journ. f. prakt. Chem., N. F. **136**, 41, 1933.

⁵⁾ L. LOSANO, Gazz. chim. ital. **56**, 301, 1926.

⁶⁾ H. HINTZ und K. JELLINEK, ZS. f. Elektrochem. **42**, 187, 1936.

⁷⁾ A. J. VAN PELT und F. DE BOER, ZS. f. phys. Chem., A. **170**, 256, 1934.

⁸⁾ Für die entgegenkommende, spezielle Herstellung möge hier allerbestens gedankt werden.

⁹⁾ H. KÖHLER, Ber. dtsch. chem. Ges. **12**, 1188, 1879.

¹⁰⁾ A. OPPENHEIM, Ber. dtsch. chem. Ges. **2**, 571, 1869.

§ 3. Apparatur und Versuchsmethodik.

1. Versuchsanordnung.

Es ist zu erwarten, dass die diskontinuierlichen Absorptionsspektren von HgClJ , HgClBr und HgBrJ , wie diejenigen der symmetrischen Quecksilberhalogenide, im Schumannultraviolett liegen. Für Vorversuche gelangt deshalb die bereits von WEHRLI (l. c.) beschriebene Apparatur zur Verwendung. Das Ultraviolett-Kontinuum einer Wasserstofflampe wird dabei mit einer Flußspatlinse ins Innere eines Quarz-Absorptionsgefäßes mit dünnen eingezogenen Fenstern, das sich im Innern eines Porzellanofens befindet, abgebildet. Mit einer zweiten Linse wird dieses Bild auf den Spalt eines 1-m-Vakuumgitterspektrographen projiziert. Der gesamte Strahlengang verläuft im Vakuum.

2. Versuchsanordnung.

In Fig. 1 ist der Absorptionsraum, der im Gegensatz zur 1. Anordnung mit Reinstickstoff gefüllt werden kann, dargestellt. Er ist gegen Wasserstofflampe und Spektrograph durch 2 Flußspatfenster F_1 und F_2 und nach aussen durch ein Pyrexrohr hochvakuumdicht abgeschlossen. Die Substanz befindet sich im Innern eines zweiten Pyrexrohres P . Der auswechselbare, im Maximum 30 cm lange elektrische Ofen umgibt das äussere Rohr, er kann

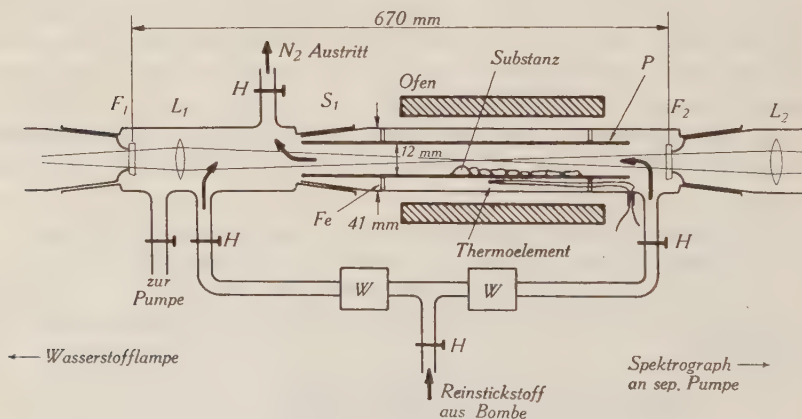


Fig. 1.

Absorptionsapparatur mit Stickstoffatmosphäre.

F_1, F_2 = Flußspatfenster; L_1, L_2 = von aussen mittels Schlifven bewegliche Flußspatlinsen; W = Waschflaschen als Blasenähler (H_2SO_4); H = Hahn; P = auswechselbares Pyrexrohr; S_1 = Pyrexschliff. Die Strömungsrichtung des Stickstoffs ist durch Pfeile gekennzeichnet.

seitlich frei verschoben werden. Ein eingebautes Nickel/Nickelchrom-Thermoelement ermöglicht die Temperaturmessung im Innern des Ofens¹⁾. Um das rasche Wegsublimieren der Substanz an die kalten Rohrteile zu verlangsamen, wird der Absorptionsraum von einem neutralen Füllgas mit Atmosphärendruck durchspült. Geeignete Strömungsrichtung von beiden Seiten nach der Mitte zu, verhindert das Beschlagen der Fenster mit Substanz. Als Füllgas dient Reinstickstoff²⁾, welcher bei Atmosphärendruck oberhalb 1600 ÅE. nur unmerklich absorbiert.

Die Vorzüge der 2. Anordnung lassen sich wie folgt zusammenfassen: a) Die Schichtdicke des zu untersuchenden Dampfes kann leicht verändert werden, einmal durch die Substanzverteilung im Rohr, dann durch die Lage und Länge des Ofens. b) Die Öffnung des Strahlenbündels wird durch Vergrößerung der Schichtdicke nicht beeinträchtigt, so dass der Spektrograph immer voll ausgeleuchtet werden kann. c) Die Untersuchung von verschiedenen Substanzen ist mit wenig Zeitverlust durch Auswechseln des Pyrexrohres *P* möglich. d) Die Apparatur ist bei Benützung eines geeigneten Füllgases (He oder Ne) für das ganze Flusspatgebiet $\lambda \geq 1250$ ÅE. verwendbar.

Versuchsmethodik.

Durch den Schliff *S*₁ (Fig. 1) wird die Substanz zugleich mit dem Pyrexrohr *P* in die Apparatur eingeführt. Nach Kontrolle der Justierung, die leicht visuell möglich ist, wenn man das Gitter auf den sichtbaren Bereich einstellt, kann man mit dem Evakuieren des Spektrographen beginnen. Eine doppelstufige Pfeiffer-Ölpumpe (5 m³ pro Std.) erreicht das notwendige Vakuum von 0,1 mm in ca. 6 Minuten. In dieser Zeit wird der Absorptionsraum mit Stickstoff gefüllt. Wenigstens zweimal muss evakuiert und wieder mit Stickstoff gefüllt werden, wenn mit Sicherheit alle schädlichen Sauerstoffreste entfernt sein sollen. Während den Aufnahmen beträgt die Stickstoffströmung 2—3 Blasen pro Sekunde. Pro Platte³⁾ werden zumeist 5—8 Spektren mit verschiedenen Substanztemperaturen aufgenommen, davon eines mit kalter Substanz, um die Durchlässigkeit der Fenster und Linsen zu kontrollieren. Die Belichtungszeiten betragen 5—10 Minuten bei einer Belastung der Wasserstofflampe mit 0,6 Ampère und einer Spaltöffnung von

¹⁾ Die Temperaturverteilung ist im mittleren Teil des Ofens bis auf einige Grad konstant. Es ist, wie speziell untersucht wurde, nicht notwendig, dass sich das Thermoelement unmittelbar bei der Substanz befindet (Fig. 1).

²⁾ Der in der Glühlampenindustrie verwendete Stickstoff.

³⁾ Schumannplatten von A. Hilger Ltd., London.

0,03 mm. Inklusive Vorarbeiten benötigt eine derartige Aufnahme ca. 4 Stunden. Zur Ausmessung der Platten dient ein Töpfer'sches Messmikroskop. Als Bezugslinien werden die unterhalb 1650 ÅE. liegenden H_2 -Emissionslinien der Wasserstofflampe und die auf allen Platten erscheinende sehr scharfe Quecksilber-Resonanz-Absorptionslinie bei 1849,7 ÅE. verwendet. Die Messgenauigkeit beträgt für scharfe Kanten $\pm 0,1$ ÅE. bis $\pm 0,2$ ÅE.

§ 4. Experimentelle Ergebnisse.

HgClBr: Das Bandenspektrum dieses Moleküls ist in Fig. 2 abgebildet. Es erstreckt sich von 1750 ÅE bis 1825 ÅE, liegt also zwischen den Spektren von HgCl_2 und HgBr_2 . Seine Struktur ist einfach, und man erkennt sofort die Ähnlichkeit mit dem Spektrum eines 2-atomigen Moleküls. Alle Banden, ausser denjenigen am langwelligen und kurzwelligen Rand des Spektrums, sind deutlich rot abschattiert und zum Teil scharf. Die Intensivsten von ihnen erscheinen bereits zwischen 50 und 60° C. Mit zunehmender Temperatur werden sie breiter, besonders auf der langwelligen Seite. Zugleich mit dem Spektrum von HgClBr erscheinen ausser der Quecksilber-Resonanzlinie 1849,7 ÅE die bekannten Bandensysteme von HgCl_2 und HgBr_2 . In Fig. 2 ist die oberhalb 130° stark verbreiterte Hg-Resonanzlinie besonders auffallend. Diese vermehrte Absorption kann verstanden werden, wenn bei höhern Temperaturen aus der Substanz Quecksilber frei wird, so dass der Hg-Dampfdruck relativ gross wird. Dies ist der Fall, wenn die Ausgangssubstanz als Beimengung Hg_2Cl_2 enthält, dessen Dampf nach FR. GUCKER und R. MUNCH¹⁾ aus Hg und HgCl_2 besteht.

HgClJ: Das in Fig. 3 reproduzierte Spektrum dieses Moleküls liegt im Gebiet von 1750 ÅE bis 1840 ÅE, also wiederum zwischen denjenigen von HgCl_2 und HgJ_2 . Das Spektrum erscheint bereits wenig oberhalb 40° C. Obwohl seine Struktur wesentlich komplizierter ist als diejenige des HgClBr -Spektrums, erkennt man doch weitgehende Übereinstimmung im Charakter der beiden Spektren. Auch die HgClJ -Banden sind, abgesehen von denjenigen am langwelligen und kurzwelligen Rand des Spektrums, rot abschattiert. Bei Temperatur- und damit auch bei Druckzunahme werden sie intensiver, und auf der langwelligen Seite erscheinen neue Banden. Bei 120° schliesslich bilden die intensivsten Banden ein Kontinuum,

¹⁾ Nach FR. GUCKER und R. MUNCH (Journ. Amer. Chem. Soc. **59**, 1275, 1937) besteht der Dampf von nicht sorgfältig getrocknetem Hg_2Cl_2 aus Hg und HgCl_2 . Die Zersetzung ist bereits bei 100° vollkommen.

welches sich bei weiterer Temperaturerhöhung gegen Rot verbreitert und immer mehr von den sehr schwachen langwelligen Banden zudeckt. Versuche mit überhitzten Dämpfen ergaben keine bessern Resultate. Die Aufnahmen enthalten neben dem Spektrum von HgClJ noch dasjenige von HgCl_2 , ferner die Quecksilber-Resonanzlinie 1849,7 ÅE und eine weitere Linie bei 1782,8 ÅE, die der Lage nach mit der Resonanzlinie des Jodatoms übereinstimmt.

HgBrJ: Das oberhalb 40° C erkennbare Spektrum von HgBrJ besteht aus 15 Banden und liegt im Gebiet von 1750 ÅE bis 1815 ÅE. Fast alle sind diffus und ohne erkennbare Abschattierung, einige jedoch sind deutlich rot abgeschattiert und scharf. In erster Annäherung besteht das Spektrum aus einer Bandenserie mit konstanter Wellenzahldifferenz. Gegen die kurzwellige Seite schliesst sich ein schwaches Kontinuum an, welches bei Temperaturerhöhung stärker wird und sich gegen Rot verschiebt. Neben dem Spektrum von HgBrJ ist auf den Platten dasjenige von HgBr_2 sehr schwach bemerkbar. An Atomlinien erkennt man die Quecksilber-Resonanzlinie bei 1849,7 ÅE, die Jod-Resonanzlinie bei 1782,8 ÅE und bei 1755,9 ÅE eine weitere Linie, die nach den Wellenlängentabellen von KAYSER-RITSCHL mit einer HgII -Linie übereinstimmt. Im Gebiet zwischen 1650 ÅE und 1720 ÅE erscheint noch ein zweites Bandensystem, dessen Banden sehr unscharf und breit sind. Sie lassen sich schwer ausmessen, weil sie zum Teil in das Viellinienspektrum des Wasserstoffs fallen. Eine Ähnlichkeit mit den kurzwelligen Banden des HgBrJ -Spektrums ist trotzdem nicht zu verkennen; ob jedoch die beiden Spektren zum gleichen System gehören, kann nicht entschieden werden (in § 6 wird nur das erste, langwellige System diskutiert).

Gemeinsame Ergebnisse: Die Spektren der drei Mischmoleküle HgClBr , HgClJ und HgBrJ haben verwandten Charakter und die Ähnlichkeit mit denjenigen der drei symmetrischen Quecksilber-Halogenide ist sehr deutlich. Besonders gut kann dies beim Spektrum von HgClBr beobachtet werden, weil hier zugleich die Systeme von HgCl_2 und HgBr_2 erscheinen. Das erstere stellt hier sowohl in bezug auf die Spektrallage, wie auch im Charakter der Banden ein Mittel zwischen den beiden letztgenannten dar. Das Auftreten der symmetrischen HgX_2 -Systeme¹⁾ kann trotz sorgfältigster Hochvakuumdestillation der Substanzen nicht verhindert werden, wirkt sich aber nicht störend aus, weil wenig Überlagerungen auftreten.

¹⁾ Das Spektrum von HgJ_2 erscheint auf keiner Aufnahme; dies ist zu erwarten, weil bei den verwendeten Temperaturen der Dampfdruck von HgJ_2 noch zu gering ist, um eine Absorption hervorzurufen.

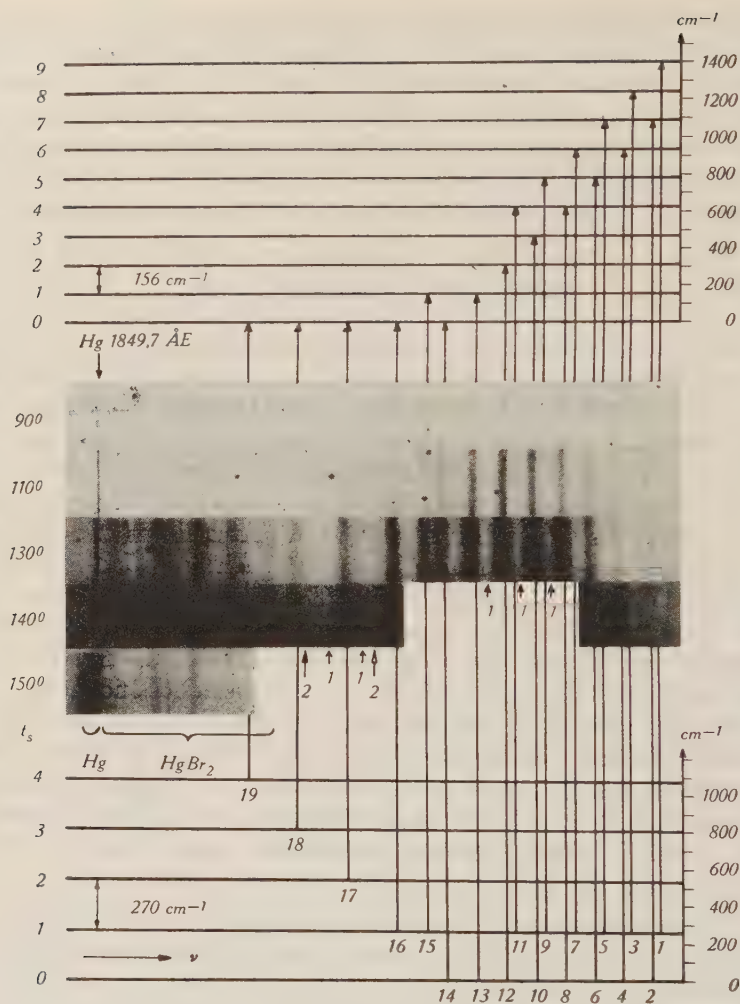


Fig. 2.

Bandensystem von $HgClBr$ im Schumanngebiet mit zugehörigem Termschema.

t_s = Substanztemperatur in $^{\circ}\text{C}$.

↑ ↑ siehe Bemerkung im Text §6.

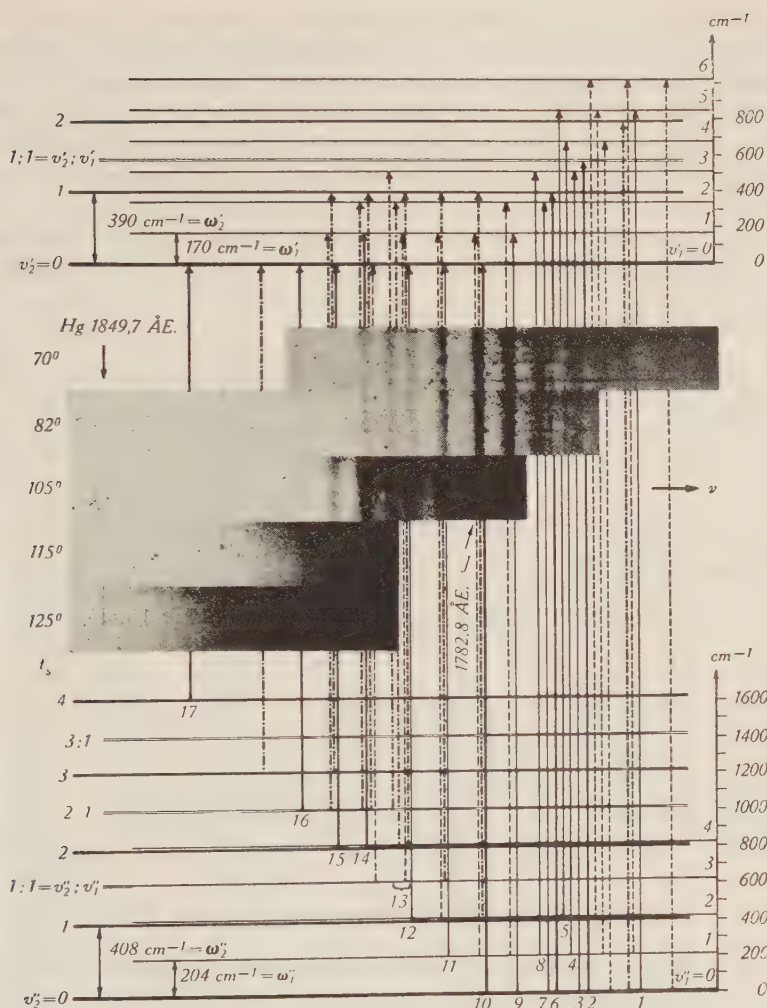


Fig. 3.

Bandensystem von HgClJ im Schumanngebiet mit zugehörigem Termschema.
Energieniveaux:

— Gegentaktschwingung ω_1 Quantenzahlen v_1' und v_1'' .

— Gleichtaktschwingung ω_2 Quantenzahlen v_2' und v_2'' .

— Kombinationen von ω_1 und ω_2 .

Übergänge:

— beobachtete Bande } ω_1 Schwingung.

--- verdeckte oder unsicher beobachtete Bande } ω_2 Schwingung u. Kom-

— beobachtete Bande } binationen.

--- verdeckte oder unsicher beobachtete Bande } ω_1 Schwingung u. Kom-

--- verdeckte oder unsicher beobachtete Bande } binationen.

J = Jodresonanzlinie (Aufnahme 82°).

t_s = Substanztemperatur in °C.

Während den Absorptionsaufnahmen beobachtet man im Dampfe aller drei Substanzen je eine starke typische Fluoreszenz. Visuelle Beobachtung mit dem Spektroskop ergibt, dass die Fluoreszenz bei X—Hg—Y aus den beiden langwelligsten Systemen der von WIELAND¹⁾ untersuchten Bandenspektren von Hg—X und Hg—Y besteht. Die optische Dissoziation von HgClJ ist inzwischen von WIELAND²⁾ näher untersucht worden.

Die Schärfe der Spektren erweist sich als stark von der Schichtdicke der zu untersuchenden Dämpfe abhängig³⁾. Eine Zunahme

Tabelle 1.
Kanten von HgClBr und HgClJ⁴⁾.

Molekül	Nr.	Int.	Wellenlänge in ÅE	Nr.	Int.	Wellenlänge in ÅE	Nr.	Int.	Wellenlänge in ÅE
HgClBr	1	0 dd	1753,7	7	4 s	1768,7	13	10 *	1784,7
	2	1 dd	1755,2	8	7 ss	1770,0	14	6 *	1789,7
	3	1 dd	1759,0	9	4 s	1773,4	15	5 d	1793,3
	4	2 d	1760,3	10	9 ss	1774,8	16	6 d	1798,4
	5	2 dd	1763,8	11	2 d	1778,5	17	3 d	1806,8
	6	4 d	1765,2	12	10 ss	1779,7	18	1 dd	1815,4
							19	0 dd	1824,0
HgClJ ⁵⁾	1	1 dd	1755,6	7	8 ss	1770,6	13	5 **	1797,1
	2	3 d	1763,6	8	3 d	1771,5	14	7 d	1798,6
	3	4 d	1765,2	9	10 ss	1775,9	15	4 d	1800,9
	4	1 d	1766,3	10	9 ss	1781,3	16	1 **	1807,5
	5	1 d	1767,5	11	7 ss	1787,8			1812,3
	6	3 s	1769,1	12	1 d	1794,5	17	1 **	1815,0
									1835,1
									1836,2

Int. = geschätzte Intensität; dd = sehr diffus; d = diffus; ss = sehr scharf; s = scharf; * = zweiteilige Kante, (siehe Bemerkung bei Tabelle 4; ** = sehr breite Banden (beide Ränder sind angegeben).

¹⁾ K. WIELAND, ZS. f. Phys. **76**, 801, 1932 und **77**, 157, 1932.

²⁾ K. WIELAND, Helv. Phys. Acta **14**, 313 und 549, 1941.

³⁾ Die Dampfdrucke der 3 Mischmoleküle sind noch nicht bekannt. Aus der Lage der Siedepunkte (HgBrJ 360°, HgClBr —, HgClJ 315°) und in Analogie zu den Dampfdruckkurven der symmetrischen Hg-Halogenide kann geschlossen werden, dass die Erscheinungsdrucke der 3 Spektren unterhalb 1 mm liegen.

⁴⁾ Bei Banden ohne Kanten ist der kurzwellige Bandenrand angegeben.

⁵⁾ Ausser den hier zusammengestellten Banden, sind auf einigen Aufnahmen noch wenige sehr schwache, breite und undeutliche Banden oberhalb 1800 ÅE erkennbar.

von 4 cm auf 20 cm bringt in allen drei Fällen eine deutlich erkennbare Verbesserung der Schärfe der Kanten. Zum Beispiel kann beim Spektrum von HgBrJ mit 4 cm Schichtdicke die Abschattierung der Banden nicht festgestellt werden, mit 20 cm Schicht jedoch erscheinen zum Teil deutlich rot abgeschattigte Kanten. Inwieweit die Anwesenheit des Stickstoffs für die Schärfe der Kanten von Bedeutung ist, geht aus den Versuchen nicht hervor. Neben den im Vorhergehenden beschriebenen Diskontinua wurden verschiedene Kontinua beobachtet. Auf ihre Bedeutung soll jedoch an dieser Stelle nicht eingegangen werden, weil sich nicht leicht entscheiden lässt, wie weit sie durch Überlagerungen von Kontinua der symmetrischen Quecksilber-Halogenide gestört sind.

In den Tabellen 1 und 2 sind die ausgemessenen Bandenkanten der 3 Systeme zusammengestellt.

Tabelle 2.
Kanten von HgBrJ¹⁾.

Nr.	Int.	Charakter	Wellenlänge in ÅE	Wellenzahl in cm ⁻¹	Nr.	Int.	Charakter	Wellenlänge in ÅE	Wellenzahl in cm ⁻¹
1	0	dd	1755,7	56957	8	3	d	1783,2	56080
2	0	dd	1760,4	56805	9	1	d K	1787,1	55956
3	1	dd	1764,5	56673	10	5	d	1788,3	55919
4	1	dd	1768,8	56336	11	9	s K	1792,1	55800
5	1	dd	1773,3	56392	12	10	s K	1797,3	55639
6	1	dd	1778,4	56230	13	7	d K	1801,9	55497
7	0	dK	1782,0	56117	14	1	dd	1806,7	55350
					15	0	dd	1812,8	55163
<i>System zwischen 1650 ÅE und 1720 ÅE. Träger: HgBrJ?</i>									
Bandenmitten:									
Nr.	Int.	Charakter	Wellenlänge in ÅE	Wellenzahl in cm ⁻¹	Nr.	Int.	Charakter	Wellenlänge in ÅE	Wellenzahl in cm ⁻¹
1	1	dd	1658,9	60280	5	1	dd	1681,2	59481
2	1	dd	1664,1	60092	6	0	dd	1689,8	59177
3	1	dd	1669,3	59905	7	0	dd	1698,3	58882
4	1	dd	1675,1	59697	8	0	dd	1706,3	58606
					9	1	dd	1711,8	58418

Int. = geschätzte Intensität; dd = sehr diffus; d = diffus; ss = sehr scharf; s = scharf.

¹⁾ Bei Banden ohne Kante ist der kurzwellige Bandenrand angegeben.

§ 5. Diskussion der experimentellen Ergebnisse.

Die Schwingungen des 3-atomigen linearen unsymmetrischen Moleküls.

Legt man der Berechnung der Schwingungen eines 3-atomigen Moleküls das Valenzkraftsystem mit einem harmonischen Kraftansatz zugrunde, dann lässt sich jede beliebige Schwingung aus 3 unabhängigen Normalschwingungen zusammensetzen. Ist das Molekül linear, so resultieren 2 Valenzschwingungen ω_1 und ω_2 und eine Deformationsschwingung ω_3 (Fig. 4).

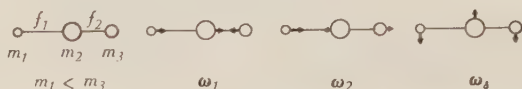


Fig. 4.

Molekülmodell und Normalschwingungen.

m_1, m_2, m_3 = Massen; f_1, f_2 = Bindungskonstanten; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ = Frequenzen der Normalschwingungen.

Bei gegebenen Massen m und Bindungskonstanten f gelten nach LECHNER¹⁾ für die beiden Valenzschwingungen die Beziehungen:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\frac{f_1}{\mu_{12}} + \frac{f_2}{\mu_{23}} \right) - \sqrt{\left(\frac{f_1}{\mu_{12}} - \frac{f_2}{\mu_{23}} \right)^2 + 4 \frac{f_1 f_2}{m_2^2}} \right]; \quad (1)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\frac{f_1}{\mu_{12}} + \frac{f_2}{\mu_{23}} \right) + \sqrt{\left(\frac{f_1}{\mu_{12}} - \frac{f_2}{\mu_{23}} \right)^2 + 4 \frac{f_1 f_2}{m_2^2}} \right]; \quad (2)$$

$$A = 4 \pi^2 c^2 M = 5,9 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}; \quad \frac{1}{\mu_{23}} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}. \quad (3)$$

ω_1 und ω_2 = Valenzschwingungsfrequenzen in cm^{-1} ; m = Masse in Atomgewichtseinheiten; f = Bindungskonstante in Dyn/cm ; M = Atomgewichtseinheit in Gramm ($1,66 \cdot 10^{-24}$); c = Lichtgeschwindigkeit in cm/sec .

Eine Betrachtung der Verrückungen in Fig. 4 zeigt, dass im Falle der kleineren Valenzschwingung ω_1 , die beiden endständigen Halogenatome im Gegentakt schwingen und im Falle der grösseren Valenzschwingung ω_2 im Gleichtakt. Die erstere wird daher im folgenden mit *Gegentaktschwingung* ω_1 und die letztere mit *Gleichtaktschwingung* ω_2 bezeichnet. Im Grenzfalle der symmetrischen Moleküle ($m_1 = m_3$ und $f_1 = f_2$) geht die Gegentaktschwingung

¹⁾ F. LECHNER, Wiener Ber. **141**, 2a, 291, 1932; siehe auch Zusammenstellung in K. W. F. KOHLRAUSCH: „Der Smekal-Ramaneffekt“, Ergbd. p. 64, 1938.

ω_1 in die symmetrische Schwingung ω_s und die Gleichtaktschwingung ω_2 in die antisymmetrische Schwingung ω_{as} über.

Numerische Berechnung der Valenzschwingungsfrequenzen der Mischmoleküle X—Hg—Y. Um die Schwingungsfrequenzen ω_1 und ω_2 der Mischmoleküle nach Formeln (1) und (2) berechnen zu können, muss eine Voraussetzung über die Bindungskonstanten f_1 und f_2 gemacht werden. Das Valenzkraftsystem stützt sich auf die Annahme, dass die Bindungen zweier benachbarter Atome in einem mehratomigen Molekül weitgehend voneinander unabhängig sind. Die Stärke der Bindung oder die Bindungskonstante f hängt im wesentlichen nur von den beiden Nachbarn der Bindung und von der Zahl der zur Verfügung stehenden Valenzelektronen ab. Alle 3-atomigen Quecksilberhalogenide besitzen nun 16 Valenzelektronen, d. h. pro Bindung 8; man kann deshalb für das Molekül X—Hg—Y das f_1 , das zur Bindung X—Hg gehört, dem Molekül X—Hg—X und das f_2 , das zur Bindung Hg—Y gehört, dem Molekül Y—Hg—Y entnehmen. In Tabelle 3 sind die mit Formeln (1) und (2) berechneten Schwingungsfrequenzen ω_1 und ω_2 eingetragen. Die Bindungskonstanten f der Moleküle X—Hg—X wurden aus den symmetrischen Valenzschwingungsfrequenzen ω_s ¹⁾ nach Formel (1) berechnet, wobei $f_1 = f_2 = f$, $m_1 = m_3$ und $\omega_1 = \omega_s$ gesetzt ist.

Tabelle 3.

Bindungskonstanten und berechnete Valenzschwingungsfrequenzen (Wellenzahlen) der Quecksilberhalogenide X—Hg—Y im Grundzustand.

Molekül $m_2 = 200,6$	Bindungskonstanten 10 ⁵ Dyn/cm				Massen Atomgew.- einheiten		ber. Frequenz in cm ⁻¹		beob. Frequenz in cm ⁻¹	
	f_1	Bindg.	f_2	Bindg.	m_1	m_3	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1
HgClBr	2,79	Hg—Cl	2,47	Hg—Br	35,5	79,9	403	260	(390)	270
HgBrJ	2,47	Hg—Br	1,82	Hg—J	79,9	126,9	285	179	—	195
HgClJ	2,79	Hg—Cl	1,82	Hg—J	35,5	126,9	400	192	408	204

() = unsicher beobachtet; — = nicht beobachtet.

Die Mischmoleküle X—Hg—Y zeichnen sich durch ihr schweres Mittelatom aus. Bei den Valenzschwingungen wird daher das Hg-Atom relativ kleine Verrückungen erfahren. Im Grenzfall eines sehr schweren Mittelatoms Me ($m_2 = \infty$) gehen die Frequenzen ω_1

¹⁾ Die symmetrischen Valenzschwingungsfrequenzen ω_s wurden von M. WEHRLI (l. c.) an Hand der Elektronenspektren und von H. BRAUNE und G. ENGELBRECHT, ZS. f. phys. Chem. B. 19, 303, 1932, an Hand der Raman-spektren bestimmt.

und ω_2 in diejenigen der 2-atomigen Radikale $-\text{Me}-\text{X}$ und $-\text{Me}-\text{Y}$ über, wie aus den Formeln (1) und (2) leicht ersichtlich ist. Da die Radikale $-\text{Me}-\text{X}$ in je 2 Molekülen auftreten, nämlich in $\text{Y}-\text{Me}-\text{X}$ und $\text{Z}-\text{Me}-\text{X}$, müssen je 2 Valenzschwingungsfrequenzen von 2 verschiedenen Molekülen übereinstimmen. Im Falle der Quecksilberhalogenide ($m_2 = 200,6$) ist obiger Grenzfall noch gut angenähert, denn, wie aus Tabelle 3 ersichtlich ist, stimmen je 2 Valenzschwingungsfrequenzen angenähert überein (403 und 400; 285 und 260 und 179 und 192). Dabei ist zu beachten, dass die Schwingungsfrequenzen der 2-atomigen Radikale $-\text{Hg}-\text{X}$ nicht mit denjenigen der 2-atomigen Moleküle $\text{Hg}-\text{X}$, die von WIELAND (l. c.) untersucht sind, übereinstimmen, denn in unserem Fall stehen 8 Valenzelektronen für die Bindung $\text{Hg}-\text{X}$ zur Verfügung, bei den 2-atomigen Molekülen jedoch 9 Elektronen. Dementsprechend stimmen auch die Bindungskonstanten nicht überein. Sie betragen für die 2-atomigen Radikale $-\text{Hg}-\text{Cl}$; $-\text{Hg}-\text{Br}$ und $-\text{Hg}-\text{J}$ 2,79; 2,47 und 1,82 für die 2-atomigen Moleküle $\text{Hg}-\text{Cl}$; $\text{Hg}-\text{Br}$ und $\text{Hg}-\text{J}$ hingegen 1,52; 1,17 und $0,72 \cdot 10^5 \text{ Dyn/cm}$.

§ 6. Schwingungsanalysen der untersuchten Spektren.

Es sollen die im vorigen Paragraphen berechneten Schwingungsfrequenzen mit den experimentellen Resultaten verglichen werden. Die Schwingungsfrequenzen ergeben sich aus den Spektren, wenn dessen Kanten den betreffenden Schwingungsübergängen zugeordnet sind. Die beobachteten Kanten lassen sich dann in die allgemeine Kantenformel (4) für 3-atomige Moleküle einordnen. Wenn ω die in § 5 eingeführten Frequenzen, v die Quantenzahlen, ωx die Anharmonizitäten und v_e die Elektronentermdifferenzen bedeuten, dann lautet die allgemeine Kantenformel¹⁾:

$$v = v_e + \omega_1'(v_1' + \frac{1}{2}) - \omega_1 x_1'(v_1' + \frac{1}{2})^2 + \omega_2'(v_2' + \frac{1}{2}) + \omega_\delta'(v_\delta' + 1) - \omega_1''(v_1'' + \frac{1}{2}) + \omega_1 x_1''(v_1'' + \frac{1}{2})^2 - \omega_2''(v_2'' + \frac{1}{2}) - \omega_\delta''(v_\delta'' + 1), \quad (4)$$

wobei sich die doppelt gestrichenen Grössen auf den Grundzustand und die einfach gestrichenen auf den angeregten Elektronenzustand beziehen.

1. HgClBr (Fig. 2).

Alle ausgemessenen und in Tabelle 4 zusammengestellten Kanten des Spektrums dieses Moleküls können tatsächlich durch die empirische Formel

$$v = 55875 + 156 v' - 269 v'' + v''^2 \quad (5)$$

dargestellt werden. Die Übereinstimmung zwischen den nach

¹⁾ In Formel (4) sind nur die beobachteten Anharmonizitäten angeführt.

Tabelle 4¹⁾.Schwingungsanalyse von HgClBr für reine Gegentaktschwingung ω_1 . $(v_2' = v_2'' = v_{\delta}' = v_{\delta}'' = 0)$

Kanten mit ihren Quantenzahlen.

Nr.	Wellenzahl ν beobachtet in cm^{-1}	Intensität geschätzt	Quanten- zahlen v_1', v_1''	ber.-beob. ²⁾ in cm^{-1}	Charakter
1	57022	0	9 , 1	- 11	dd
2	56973	1	7 , 0	- 6	dd
3	56850	1	8 , 1	+ 5	dd
4	56808	2	6 , 0	+ 3	d
5	56696	2	7 , 1	+ 3	dd
6	56651	4	5 , 0	+ 4	d
7	56539	4	6 , 1	+ 4	s
8	56497	7	4 , 0	+ 2	ss
9	56389	4	5 , 1	- 2	s
10	56344	9	3 , 0	- 1	ss
11	56227	2	4 , 1	+ 4	d
12	56189	10	2 , 0	- 2	ss
13 ³⁾	56033	10	1 , 0	- 2	s
14 ³⁾	55875	6	0 , 0	0	d
15	55763	5	1 , 1	0	d
16	55605	6	0 , 1	+ 2	d
17	55346	3	0 , 2	- 5	d
18	55084	1	0 , 3	+ 7	dd
19	54825	0	0 , 4	+ 10	dd

ss = sehr scharf; s = scharf; d = diffus, kurzwellige Grenze gemessen; dd = sehr diffus, kurzwellige Grenze gemessen.

¹⁾ Tabelle 1 enthält die zugehörigen Wellenlängen in ÅE.

²⁾ Differenz zwischen nach Formel (4) berechneten und in der 2. Kolonne ersichtlichen beobachteten Wellenzahlen.

³⁾ Wie die Originalaufnahmen in Fig. 2 erkennen lassen, verschieben sich die Kanten der Banden Nr. 13 und 14 mit wachsender Temperatur gegen kurze Wellen. In den Tabellen 1 und 4 ist jeweils der kurzwelligere Wert eingetragen. Eine solche Verschiebung haben SPONER und TELLER (l. c.) theoretisch begründet. Infolge der kleinen Differenz von ω_{δ}' und ω_{δ}'' (bei den symmetrischen Molekülen ist $\omega_{\delta}'' - \omega_{\delta}'$ ca. 5 cm^{-1}) enthalten die breiten beobachteten Banden alle Kanten mit den Quantenzahlen, die zu $v_{\delta}'' - v_{\delta}' = \text{Konst.}$ gehören. Die Intensitätsverteilung in einer solchen Diagonalgruppe ist nach SPONER und TELLER

gegeben durch den Ausdruck $(v_{\delta} + 1)e^{-\left(\frac{h c \cdot v_{\delta} \omega_{\delta}}{kT}\right)}$ falls $v_{\delta}'' = v_{\delta}' = v_{\delta}$ ist. Bei niederen Temperaturen, also tiefen Drucken, misst man bei nicht völlig scharfen Kanten zwischen kurzwelligster Kante und Bandenmaximum (Bande Nr. 13, 110°). Mit der Temperatursteigerung wächst in erster Linie der Druck, dadurch werden alle Kanten intensiver, und man misst die kurzwelligste Kante (Bande Nr. 13, 130°). Die Verschiebung Bandenmaximum \div kurzwelligste Kante beträgt bei Nr. 13 ca. 17 cm^{-1} . Das Maximum liegt bei $v_{\delta}'' = v_{\delta}' - 4$, sodass man für die Differenz der Deformationsschwingungsfrequenzen im oberen und unteren Zustand $\omega_{\delta}'' - \omega_{\delta}' \approx 4 \text{ cm}^{-1}$ erhält, was mit den Werten der symmetrischen Quecksilberhalogenide in guter Übereinstimmung ist.

Formel (5) berechneten und den beobachteten Werten erkennt man in Tabelle 4. Es handelt sich hier um einen Spezialfall von Formel (4), indem in den beiden Elektronenzuständen je nur eine Normalschwingung angeregt ist. Dies kann folgendermassen verstanden werden: Die Spektren der symmetrischen Quecksilberhalogenide zerfallen, wie WEHRLI (l. c.) gezeigt hat, und wie HERZBERG und TELLER¹⁾ theoretisch gefordert haben, in 2 Teilsysteme: 1. ein intensives Teilsystem, das Übergängen zwischen Zuständen, bei denen nur die symmetrische Valenzschwingung ω_s angeregt ist, entspricht; 2. ein schwaches Teilsystem, mit Übergängen zwischen Zuständen, bei denen auch die nichtsymmetrischen Schwingungen ω_{as} (antisymmetrisch) und ω_d (Deformation) angeregt sind. Wenn sich also das Molekül $HgClBr$ in bezug auf sein Bandensystem wie ein symmetrisches Molekül verhält, dann wird durch Formel (5) das 1. Teilsystem, das nur mit der Gegentaktschwingung ω_1 erklärt wird, darstellen; denn die Gegentaktschwingung ω_1 entspricht im symmetrischen Grenzfall ($m_1 = m_3$ und $f_1 = f_2$) der symmetrischen Valenzschwingung ω_s . Als Mass für die Unsymmetrie eines Mischmoleküls $HgXY$ kann das Verhältnis der Massen der beiden endständigen Atome oder das Verhältnis der Bindungskonstanten genommen werden. Im Falle von $HgClBr$ ist $m_3 : m_1 = 2,3$ und $f_1 : f_2 = 1,1$. Damit erhält man aus Formel (5) durch

Tabelle 5.

Kantenschema von $HgClBr$ für die Gegentaktschwingung ω_1 .

($v_2' = v_2'' = v_d' = v_d'' = 0$)

Geschätzte Intensitäten.

$v_1' \backslash v_1''$	0	1	2	3	4
0	6	6	3	1	0
1	10	5			
2	10				
3	9				
4	7	2			
5	4	4			
6	2	4			
7	1	2			
8		1			
9		0			

¹⁾ G. HERZBERG und E. TELLER, ZS. f. phys. Chem. B. 21, 410, 1933.

Koeffizientenvergleich mit Formel (4) die Schwingungsfrequenzen $\omega_1'' = 270 \text{ cm}^{-1}$ und $\omega_1' = 156 \text{ cm}^{-1}$, und die Anharmonizität $\omega_1 x_1'' = 1$. Der Vergleich mit dem für den Grundzustand berechneten Wert $\omega_1'' = 260 \text{ cm}^{-1}$ (Tab. 3) bestätigt diese Schwingungszuordnung. Aus Tabelle (5) ist das zur Gegentaktschwingung ω_1 gehörende Kantenschema ersichtlich. Die Intensitätsverteilung entspricht derjenigen des Spektrums eines 2-atomigen Moleküls. Die Lage der Intensitätsmaxima kann durch eine flache Franck-Condon-Parabel gekennzeichnet werden.

Die Gleichtaktschwingung ω_2 und die Deformationsschwingung ω_3 sind im Spektrum nicht mit Sicherheit feststellbar. Die mit 2 bezeichneten Pfeile in Fig. 2 deuten zwei schwach erkennbare Banden an, die als $\begin{pmatrix} 000 \\ 001 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 000 \\ 002 \end{pmatrix}^1$ gedeutet werden. Damit ergibt sich im Grundzustand eine Frequenz ω_2'' von 390 cm^{-1} (berechneter Wert 403 cm^{-1}). Die mit 1 gekennzeichneten Pfeile in Fig. 2 deuten Banden an, die Übergängen zwischen verschiedenen Deformationsschwingungsniveaux entsprechen. Die im unteren und oberen Zustand daraus resultierenden Frequenzen betragen etwa 40 cm^{-1} ²⁾.

2. HgBrJ.

Die Analyse des Bandensystems dieses Moleküls ist infolge der geringen Anzahl scharfer Kanten erschwert. Die in Tabelle 2 zusammengestellten Banden Nr. 1 bis 15 können wie folgt verstanden werden. Nr. 7, 9, 11, 12 und 13 bilden eine Folge von Übergängen (0, v'), wobei v' die Quantenzahl im oberen Niveau bedeutet. Damit lässt sich die Schwingungsfrequenz im oberen Zustand zu 155 cm^{-1} berechnen. Banden Nr. 8 und 10 entsprechen dann Übergängen (1, v'), daraus folgt eine Schwingungsfrequenz von 195 cm^{-1} im unteren Zustand. Unter Zugrundelegung dieser beiden Frequenzen lassen sich nun die übrigen Banden einordnen, Nr. 14 als Nullbande, Nr. 15 als (1,0), und Nr. 1—6 als nicht aufgelöste Diagonalgruppen, entsprechend Nr. 7 und 8 oder 9 und 10. Demnach können die Kanten durch die empirische Formel zusammengefasst werden:

$$\nu = 55350 + 155 v' - 195 v'' \quad (6)$$

Auch diese Kantenformel ist ein Spezialfall von Formel (4) mit nur einer angeregten Normalschwingung pro Elektronenzustand. Die Unsymmetrie von HgBrJ ($m_3 : m_1 = 1,6$ und $f_1 : f_2 = 1,35$) ist von derselben Ordnung wie diejenige von HgClBr. Formel (6)

¹⁾ Diese Quantenzahlen sind in der Form $\begin{pmatrix} v_1' & v_{\delta'} & v_2' \\ v_1'' & v_{\delta''} & v_2'' \end{pmatrix}$ angeordnet.

²⁾ Dabei ist die für die Deformationsschwingung geltende Auswahlregel $v_{\delta''} - v_{\delta'} = \pm 2n$ berücksichtigt (Formel 9).

wird deshalb auch hier das Teilsystem der Gegentaktschwingung ω_1 darstellen. Die Schwingungsfrequenzen ergeben sich damit zu $\omega_1'' = 195 \text{ cm}^{-1}$ und $\omega_1' = 155 \text{ cm}^{-1}$. Der Vergleich mit der für den Grundzustand berechneten Frequenz $\omega_1'' = 179 \text{ cm}^{-1}$ (Tab. 3) bestätigt diese Zuordnung.

3. HgClJ (Fig. 3).

Dieses Molekül ist in bezug auf das Massenverhältnis der endständigen Halogenatome ($m_3 : m_1 = 3,6$) wie auch in bezug auf das Verhältnis der Bindungskonstanten ($f_1 : f_2 = 1,5$) das unsymmetrischste der 3 untersuchten Mischmoleküle. Es sind hier also, was die Spektren anbetrifft, die stärksten Abweichungen von den symmetrischen Hg-Halogeniden zu erwarten. Tatsächlich ist es nicht mehr möglich, das Spektrum von HgClJ mit nur *einer* angeregten Valenzschwingung zu verstehen. Die Gegentaktschwingung ω_1 , die Gleitakttschwingung ω_2 und Kombinationen zwischen beiden müssen herangezogen werden, um alle im Spektrum (Fig. 3) vorkommenden Kanten zu erklären.

Kanten mit reiner Gegentaktschwingung ω_1 .

Im Spektrum (Fig. 3) erkennt man sofort ein dominierendes Teilsystem, dessen Bandenkanten sich durch die empirische Kantenformel:

$$\nu = 56139 + 170 \nu' - 204 \nu'' \quad (7)$$

Tabelle 6.

Kantenschema von HgClJ für die Gegentaktschwingung ω_1 .

$$(\nu_2' = \nu_2'' = \nu_3' = \nu_3'' = 0)$$

Geschätzte Intensitäten.

$\nu_1' \backslash \nu_1''$	0	1	2	3	4
0	9	7	1	*	(4)
1	10	*	*	*	(7)
2	8	*			
3	4	3			
4	*	1			
5	1	*	1		
6	*	*	*		

* = verdeckte oder unsicher beobachtete Kanten; () = die Grösse dieser Werte rührt von der Überlagerung durch andere Banden her, bei denen auch die ω_2 -Schwingung angeregt ist.

darstellen lassen. Im Termschema (Fig. 3) sind die zugehörigen Übergangslinien dünn ausgezogen, und gestrichelt, wenn die entsprechende Kante verdeckt oder nur unsicher beobachtet ist. Die richtige Zuordnung dieses Teilsystems zur Gegentaktschwingung ω_1 wird durch die Übereinstimmung der berechneten (192 cm^{-1}) und beobachteten (204 cm^{-1}) Schwingungsfrequenzen im Grundzustand bestätigt. In Tabelle 6 erkennt man das zur Gegentaktschwingung ω_1 gehörende Kantenschema. Die Intensitätsverteilung entspricht derjenigen eines 2-atomigen Moleküls.

Kanten mit reiner Gleichtaktschwingung ω_2 .

Die durch Formel (7) nicht erfassten Bandenkanten lassen sich zum Teil durch die empirische Kantenformel

$$\nu = 56139 + 390 \nu' - 408 \nu'' \quad (8)$$

darstellen. Im Termschema (Fig. 3) sind die zugehörigen Übergangslinien dick ausgezogen, und strichpunktziert für verdeckte oder unsicher beobachtete Kanten. Die Zuordnung zur Gleichtaktschwingung ω_2 wird durch die Übereinstimmung der berechneten (400 cm^{-1} aus Tab. 3) und beobachteten (408 cm^{-1}) Schwingungsfrequenzen im Grundzustand sichergestellt. Im Termschema (Fig. 3) fallen sofort die verschiedenen Übergangshäufungsstellen auf. In den Spektren führen sie zu den diffusen langwelligen Banden. Die Ursache liegt in der speziellen Grösse der Schwingungsfrequenzen. Die sehr kleine Differenz $\omega_2'' - \omega_2'$ von nur 18 cm^{-1} führt im Spektrum zu nicht aufgelösten Diagonalgruppen. Ausserdem ist ω_2'' doppelt so gross wie die Gegentaktschwingungsfrequenz ω_1'' , was ein Zusammenfallen von vielen Banden zur Folge hat. Das zur Gleichtaktschwingung ω_2 gehörende Kantenschema ist in Tabelle 7 ersichtlich. In der ersten Zeile ($0, \nu_2''$)

Tabelle 7.

Kantenschema von HgClJ für die Gleichtaktschwingung ω_2 .

$$(\nu_1' = \nu_1'' = \nu_2' = \nu_2'' = 0)$$

Geschätzte Intensitäten.

$\nu_2' \backslash \nu_2''$	0	1	2	3	4
0	9	1	5	?	1
1	4	*	*	*	
2	*				

* = verdeckte Kanten; ? = unsicher beobachtete Kante.

ist ein deutlicher Intensitätswechsel vorhanden. Die $0 \rightarrow 2n$ -Übergänge gehören zu stärkeren Banden als die dazwischen liegenden $0 \rightarrow 2n + 1$ -Übergänge.

Dieses Verhalten entspricht der von HERZBERG und TELLER (l. c.) angegebenen, für antisymmetrische Schwingungen geltende Auswahlregel, wonach:

$$v' - v'' = \pm 2n, \quad n = \text{ganz.} \quad (9)$$

Dass diese Auswahlregel hier bei der Gleichtaktschwingung ω_2 noch deutlich erkennbar ist, kann verstanden werden, denn die ω_2 -Schwingung entspricht im Grenzfall $m_1 = m_3$ und $f_1 = f_2$ der antisymmetrischen Valenzschwingung ω_{as} eines symmetrischen Moleküls. Die Symmetrie des Moleküls HgCl_2 ist also genügend, so dass sich die ω_2 -Schwingung noch merkbar wie eine antisymmetrische Schwingung verhält.

Kanten mit Kombinationsschwingungen von ω_1 und ω_2 .

Die mit den Kantenformeln (7) und (8) noch nicht erfassten Bandenkanten gehören zu Übergängen in deren Schwingungsniveaux beide Valenzschwingungen ω_1 und ω_2 angeregt sind. Die Übergangslinien sind im Termschema (Fig. 3) dick oder gestrichelt eingetragen.

Damit lassen sich alle beobachteten Kanten durch die folgende Formel zusammenfassen:

$$v = 56139 + 170 v_1' + 390 v_2' - 204 v_1'' - 408 v_2''. \quad (10)$$

Diese Formel (10) lässt sich auf die Gestalt von Formel (4) mit halben Quantenzahlen bringen, jedoch ist die Elektronentermdifferenz nicht genau bestimmbar¹⁾, weil die Deformationsschwingungsfrequenzen nur unsicher (siehe unten) bekannt sind. Es gilt:

$$v = 56165 + 170(v_1' + \frac{1}{2}) + 390(v_1'' + \frac{1}{2}) - 204(v_2'' + \frac{1}{2}) - 408(v_2'' + \frac{1}{2}). \quad (11)$$

Die Abweichungen zwischen den nach diesen Formeln (10) und (11) berechneten und den beobachteten Kanten erkennt man in den Tabellen 8 und 9. Sie sind von der durchschnittlichen Grösse 3 cm^{-1} . In diesen Tabellen sind die erwarteten Banden nach Quantenzahlen geordnet.

Die Deformationsschwingung ω_δ wurde nicht mit Sicherheit beobachtet. Schwach angedeutete Kanten lassen auf eine Deformationsschwingungsfrequenz von $\omega_\delta' \approx \omega_\delta'' \approx 50 \text{ cm}^{-1}$ schliessen²⁾.

¹⁾ Der Fehler von v_e ist gleich der Differenz von $\omega_\delta' - \omega_\delta''$ und ist von der Grösse 5 cm^{-1} .

²⁾ Dabei ist die für die Deformationsschwingung geltende Auswahlregel $v_\delta' - v_\delta'' = \pm 2n$ (Formel 9) berücksichtigt.

Tabelle 8.¹⁾

Schwingungsanalyse von HgCl_2 für reine Gegentaktschwingung ω_1 .
 $(v_2' = v_2'' = v_{\delta}' = v_{\delta}'' = 0)$

v_1' v_1''	v_{δ}' v_{δ}''	v_2' v_2''	Wellen- zahl berechnet cm^{-1}	Wellen- zahl beobach- tet cm^{-1}	Nr. 2)	ber.- beob. cm^{-1}	Int.	Bemerkungen
000			56139	56139 ¹⁾	10	0	9	ss
100								
000			56309	56309	9	0	10	ss
200								
000			56479	56478	7	+1	8	ss
300								
000			56649	56651	3	-2	4	d
400								
000			56819					unsicher erkennbar
500								
000			56989	56961	1	+28	1	dd
600								
000			57159					unsicher erkennbar
000								
100			55935	55935	11	0	7	ss
100								
100			56105					verdeckt durch Nr.10
200								
100			56275					verdeckt durch Nr. 9
300								
100			56445	56449	8	-4	3	d
400								
100			56615	56615	4	0	1	d
500								
100			56785					unsicher erkennbar
600								
100			56955					unsicher erkennbar
000								
200			55731	55725	12	+6	1	d
100								
200			55901					verdeckt durch Nr. 11
500								
200			56581	56576	5	+5	1	d
600								
200			56751					unsicher erkennbar
000								als Verbreiterung von
300			55527					Nr. 14 erkennbar
100								
300			55697		13 ³⁾			nicht aufgelöst Nr. 13
000								
400			55323	55325	15	-2	4	d
100								
400			55493	55494	14	-1	7	d

ss = sehr scharf; s = scharf; d = diffus; kurzwellige Grenze gemessen;
 dd = sehr diffus; kurzwellige Grenze gemessen.

¹⁾ Tabelle 1 enthält die zugehörigen Wellenlängen in ÅE.

²⁾ Nr. der Tabelle 1 und der Fig. 3.

³⁾ Nr. 13 ist eine nichtaufgelöste Bandengruppe (Fig. 3).

Tabelle 9.¹⁾

Schwingungsanalyse von HgCl_2 für reine Gleichtaktschwingung²⁾ ω_2 und Kombinationen von ω_1 und ω_2 . ($v_\delta' = v_\delta'' = 0$)

$v_1' \ v_\delta' \ v_2'$ $v_1'' \ v_\delta'' \ v_2''$	Wellen- zahl berechnet cm^{-1}	Wellen- zahl beobach- tet cm^{-1}	Nr. ³⁾	ber.- beob. cm^{-1}	Int.	Bemerkungen
000	56139	56139	10	0	9	ss
000						
001	56529	56526	6	+3	4	s
000						
002	56919					unsicher erkennbar
000						
101	56699	56702	2	-3	3	d
000						
000	55731	55725	12	+6	1	fällt streng auf ⁰⁰⁰ 200
001						
001	56121					verdeckt durch Nr. 10
100	55901					verdeckt durch Nr. 11
001						
000	55527					fällt streng auf ⁰⁰⁰ 300
101						
001	55917					verdeckt durch Nr. 11
101						
100	55697					fällt streng auf ¹⁰⁰ 300
000						
002	55323	55325	15	-2	5	dd
001						
002	55713					verdeckt durch Nr. 12
100						
002	55493	55494	14	-1	7	dd
200						
002	55663		13 ⁴⁾			nicht aufgelöst Nr. 13
000						
102	55119	55179 55096	16		1	dd kurzwelliger und langw. Rand verm.
001						
102	55509					verdeckt durch Nr. 14
100						
102	55289					verdeckt durch Nr. 15
200						
102	55459					verdeckt durch Nr. 14
300						
102	55629		13 ⁴⁾			nicht aufgelöst Nr. 13
000						
003	54915					unsicher erkennbar
001						
003	55305					verdeckt durch Nr. 15
000						
004	54507	54490 54463	17		1	dd kurzwelliger und langw. Rand verm.

ss = sehr scharf; s = scharf; d = diffus; kurzwellige Grenze gemessen; dd = sehr diffus; kurzwellige Grenze gemessen.

¹⁾ Tabelle 1 enthält die zugehörigen Wellenlängen in ÅE.

²⁾ Reine Gleichtaktschwingung ω_2 in der Tabelle fettgedruckt.

³⁾ Nr. der Tabelle 1 und der Fig. 3.

⁴⁾ Nr. 13 ist eine nichtaufgelöste Bandengruppe (Fig. 3).

Nur bei dem Molekül HgClJ können aus dem Spektrum beide Valenzschwingungsfrequenzen im unteren und oberen Elektronenzustand entnommen werden. Ausgehend von den Grössen ω_1'' und ω_2'' lassen sich nach Formeln 1 und 2 die Bindungskonstanten f_1 und f_2 von Cl-Hg-J bestimmen. Die Rechnung liefert die Werte $f_1 = 2,89$ und $f_2 = 2,06 \cdot 10^5 \text{ Dyn/cm}$. Die Bindungskonstanten der zugehörigen symmetrischen Moleküle HgCl_2 und HgJ_2 betragen $2,79$ und $1,82 \cdot 10^5 \text{ Dyn/cm}$.

§ 7. Zusammenfassung.

Die Ergebnisse der Schwingungsanalysen sind in Tabelle 10 zusammengestellt. Zum Vergleich sind auch die Daten der symmetrischen Quecksilberhalogenide (WEHRLI, l. c.) angegeben. Die Lage der Nullbanden der Bandensysteme ergibt sich aus Kolonne I; daraus lassen sich, wenn alle 6 Schwingungsfrequenzen bekannt sind, nach Formel (4) die Elektronentermdifferenzen (Kolonne II) berechnen, was nur bei den symmetrischen Hg-Halogeniden und bei HgClJ möglich ist. Kolonnen III und IV enthalten die beobachteten Schwingungsfrequenzen. Die Deformationsschwingung ω_8 konnte in keinem Fall mit Sicherheit festgestellt werden. Als Ursache kommt wohl die geringe Intensität der entsprechenden Banden in Frage. Die Banden werden tatsächlich auch mit geringerer Intensität gegenüber denjenigen der symmetrischen Moleküle erwartet, denn wenn man die Summe aller Intensitäten bei einem Elektronenübergang als konstant voraussetzt, so muss das Auftreten der 2. Valenzschwingung ω_2 bei den unsymmetrischen Molekülen auf Kosten der beiden anderen Schwingungen geschehen. Besonders muss sich dies bei der ohnehin schwachen Deformationsschwingung ω_8 (siehe Fig. 1 in Arbeit WEHRLI l. c.) auswirken. Aus Kolonne V sind die von DELWAULLE und FRANÇOIS (l. c.) gefundenen Ramanfrequenzen der gelösten Mischmoleküle ersichtlich. Danach sind die Schwingungsfrequenzen in Lösung um durchschnittlich 15% kleiner als diejenigen der freien Moleküle. Es ist beachtenswert, dass gerade das im Ramaneffekt in Lösung noch nicht festgestellte Molekül HgClJ bandenspektroskopisch die vollständigsten Resultate liefert.

Die gute Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Valenzschwingungsfrequenzen (Tabellen 10 und 3) bestätigen die Gültigkeit des Valenzkraftsystems. Die beiden Bindungen der untersuchten Moleküle sind also weitgehend voneinander unabhängig, sind also nur von den beiden an der Bin-

dung beteiligten Atomen abhängig. Ausserdem wird durch obige Übereinstimmung die Linearität der unsymmetrischen Quecksilberhalogenid-Moleküle im Grundzustand bestätigt.

Alle drei Mischmoleküle besitzen 16 Valenzelektronen, gehören demnach in die von MULLIKEN¹⁾ in einer Arbeit über „Elektronenstruktur mehratomiger Moleküle“ beschriebene Klasse. Daraus geht hervor, dass der Grundzustand und damit der untere Zustand der beobachteten Übergänge ein $^1\Sigma$ -Term ist. Entsprechend den

Tabelle 10.

Ergebnisse der Schwingungsanalysen der Quecksilberhalogenide in cm^{-1} .

Unsymmetr. Moleküle	I	II	III			IV			V	
	Nullbande der Systeme	Elektro- nenterm- differenz	Schwingungs- frequenz im Grundzustand			Schwingungs- frequenz im anger. Zustand			Raman- frequenz in Lösung	
			ω_1	ω_2	ω_δ	ω_1	ω_2	ω_δ	ω_1	ω_2
HgClBr	55875	—	270	(390)	(40)	156	—	(40)	232	347
HgBrJ	55350	—	195	—	—	155	—	—	168	233
HgClJ	56139	56165	204	408	(50)	170	390	(50)	—	—
Symmetr. Moleküle			ω_s	ω_{as}	ω_δ	ω_s	ω_{as}	ω_δ	ω_s 3)	ω_{as}
HgCl ₂	59014	59113	365	[423]	75	289	[335]	60	331	v
HgBr ₂	54416	54462	229	[307]	41	194	[260]	38	205	v
HgJ ₂	47882	47923	156	[235]	33	126	[190]	31	150	v

ω_1 = Gegentaktschwingungsfrequenz, geht im symmetrischen Molekül über in die symmetrische Valenzschwingungsfrequenz ω_s ; ω_2 = Gleichtaktschwingungsfrequenz, geht im symmetrischen Molekül über in die antisymmetrische Valenzschwingungsfrequenz ω_{as} ; ω_δ = Deformationsschwingungsfrequenz; () = nur unsicher beachtete Werte; [] = berechnete Werte²⁾; v = verboten im Raman-spektrum.

¹⁾ R. S. MULLIKEN, Journ. chem. Phys. **3**, 720, 1940.

²⁾ Im symmetrischen Molekül ($m_1 = m_3$ und $f_1 = f_2$) hängen, wie aus den Formeln (1) und (2) ersichtlich ist, beide Valenzschwingungsfrequenzen von nur einer Bindungskonstanten ab. Es muss also zwischen den Frequenzen ω_s und ω_{as} eine Beziehung bestehen, die nur die Atommassen enthält. Durch Elimination von $f_1 = f_2 = f$ aus Formeln (1) und (2) ergibt sich

$$\omega_{as} = \omega_s \sqrt{\frac{m_2 + 2m}{m_2}}, \text{ wobei } m = m_1 = m_3.$$

Die eingeklammerten Werte [] sind nach dieser Formel berechnet. Bei den unsymmetrischen Molekülen ist man lediglich auf die experimentelle Beobachtung angewiesen.

³⁾ Ramanfrequenzen nach H. BRAUNE und G. ENGELBRECHT (l.c.).

in der Arbeit von SPONER und TELLER (l. c.) zusammengestellten Auswahlregeln dürfte es sich beim oberen Zustand ebenfalls um einen $^1\Sigma^+$ -Term handeln.

§ 9. Elektronenbandenspektren von anderen 3-atomigen linear-unsymmetrischen Molekülen.

Unter den Molekülen dieser Gruppe sind bisher nur bei *COS*, *NNO* und *HCN* diskontinuierliche Spektren festgestellt worden¹⁾. Alle drei Moleküle sind im Grundzustand an Hand von Ultrarot- und Raman-Messungen bekannt²⁾. Von besonderem Interesse ist das Molekül *COS*, denn es verhält sich in mancher Beziehung wie die Mischmoleküle *HgXY*. Beide endständigen Atome von *OCS*, O und S gehören zur selben Gruppe des periodischen Systems, so dass alle drei Moleküle *CS*₂, *CO*₂ und *COS* gleichviel Valenzelektronen besitzen und zwar 16 wie die Moleküle *HgXY*. Beide symmetrischen Moleküle *CO*₂ und *CS*₂ sind im Grundzustand linear und besitzen im Schumanngebiet diskontinuierliche Spektren. PRICE und SIMPSON³⁾ haben das Elektronenbandenspektrum von *COS* im Schumanngebiet untersucht. Es liegt zwischen 1600 und 1100 ÅE und kann in 4 Gebiete eingeteilt werden. Die Verfasser finden in allen Systemen Schwingungsfrequenzen von 760 cm⁻¹ bis 710 cm⁻¹, die sie der Gegentaktschwingung ω_1' im oberen Zustand zuordnen. Die bekannte Gleichtaktschwingungsfrequenz ω_2'' wurde von PRICE und SIMPSON nicht festgestellt. Dies stimmt mit den im Vorherigen geschilderten Ergebnissen überein, denn die Unsymmetrie von O—C—S ($m_3 : m_1 = 2$; $f_1 : f_2 = 1,8$)⁴⁾ ist von der gleichen Grösse wie diejenige von *HgClBr* oder *HgBrJ*; man erwartet deshalb im Spektrum nur die Gegentaktschwingung ω_1 . Bei den Molekülen *NNO* und *HCN* sind die Verhältnisse komplizierter. Die zugehörigen symmetrischen Moleküle besitzen ungleich viele Valenzelektronen und sind entweder nicht bekannt oder gewinkelt. *NNO* besitzt im Schumanngebiet mehrere diskontinuierliche Spektren. Eine ausführliche Untersuchung wurde von DUNCAN⁵⁾ veröffentlicht. Das langwelligste Diskontinuum ist von SPONER und TELLER (l. c.) näher diskutiert worden. Die vorkommende Differenz von 621 cm⁻¹ kann dabei

¹⁾ H. SPONER und E. TELLER (l. c.).

²⁾ H. SPONER, Molekülspektren und ihre Anwendung auf chemische Probleme. Vol. I, 1936.

³⁾ W. C. PRICE und D. M. SIMPSON, Proc. Roy. Soc. London A **169**, 501, 1938.

⁴⁾ $\omega_1 = 859 \text{ cm}^{-1}$; $\omega_2 = 2079 \text{ cm}^{-1}$; aus Formeln (1) und (2) folgen $f_1 = 14,2$ und $f_2 = 8,0 \cdot 10^5 \text{ Dyn/cm}$.

⁵⁾ A. B. F. DUNCAN, Journ. Chem. Phys. **4**, 638, 1936.

analog wie bei den Molekülen HgXY als Gegentaktschwingungsfrequenz im oberen Zustand gedeutet werden. Da aber die Nullbande des Systems nicht bekannt ist, kann diese Deutung nicht als vollständig gesichert gelten. HCN war Gegenstand verschiedener Untersuchungen. PRICE¹⁾ beschreibt ein diskretes Bandensystem im Gebiet 1450—1000 ÅE. Er stellt eine Formel mit nur einer Grundfrequenz auf, ohne jedoch eine Zuordnung zu ω_1 bzw. ω_2 vornehmen zu können. HILGENDORFF²⁾ gibt ein System zwischen 2000 und 1790 ÅE an, welches bei 170 mm Druck gut ausgebildet ist. Eine Analyse dieses Systems ist noch nicht versucht worden.

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, dem Vorsteher der Physikalischen Anstalt Herrn Prof. Dr. A. HAGENBACH für sein stets förderndes Interesse und die Überlassung von wertvollen Apparaturen, sowie Herrn Prof. Dr. M. WEHRLI, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist, meinen herzlichen Dank auszusprechen. Auch den Herren Prof. Dr. M. MIESCHER und P. D. Dr. M. FIERZ schulde ich für zahlreiche nützliche Hinweise besten Dank.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

¹⁾ W. C. PRICE, Phys. Rev. **46**, 529, 1934.

²⁾ H. J. HILGENDORFF, ZS. f. Phys. **95**, 781, 1935.

Classement des masses atomiques IV.

Les atomes radioactifs artificiels

par Adrien Jaquerod.

(19. II. 1942.)

Les données nécessaires ont été empruntées à la source déjà mentionnée au début de ce travail¹⁾. Elles se rapportent exclusivement à la première catégorie d'atomes: ⊕ atomes légers. Les auteurs ayant calculé les défauts de masse ΔM comme je l'ai fait moi-même pour les atomes naturels, je me suis borné à reproduire leurs valeurs dans le tableau VI. Ce tableau donne en plus: n , nombre de part. α figurant dans le noyau; l'*excès* proton-neutron; $\Delta'M$ calculé au moyen de l'expression (9); enfin le défaut de masse calculé comme il est indiqué plus bas, mais seulement pour les atomes de nombre de masse supérieur à 16.

Si l'on porte sur un graphique à grande échelle les ΔM en fonction de A , on retrouve un groupement quasi linéaire, à l'exception de la partie inférieure. Les festons si caractéristiques de la fig. 1 n'existent pas; néanmoins l'alignement des points figuratifs dans cette première partie est loin d'être parfait. Il devient meilleure dans la partie supérieure, et on retrouve là, par contre, une courbe sinueuse correspondant à celle de la fig. 3; ces deux courbes, l'une relative aux atomes naturels, l'autre aux atomes artificiels, sont très semblables, tout en étant décalées l'une par rapport à l'autre: les ΔM des atomes artificiels sont inférieurs à ceux des atomes naturels (moindre stabilité). Les deux courbes se rapprochent peu à peu et semblent se rejoindre au point Cr^{52} ($\Delta M = 0,487$). Il est naturel de penser qu'elles ne correspondent à rien de réel, mais sont produites par le jeu de l'ajustement des données expérimentales, les incertitudes portant sur les atomes stables se reproduisant sur les masses des atomes radioactifs.

Si l'on néglige cette sinuosité, les deux familles d'atomes sont représentées — abstraction faite d'une « structure fine » qui ne peut être précisée mais qui existe sûrement — par les deux relations:

$$\text{atomes naturels: } \Delta M = 0,00982 A - 0,0230 \quad (17)$$

$$\text{atomes artificiels: } \Delta M = 0,01000 A - 0,0325 \quad (18)$$

¹⁾ S. FLÜGGE u. J. MATTAUCH. Phys. Ztschr. **42**, p. 1 (1941).

Tableau VI.

Atome	n	Excès proton- neutron	ΔM	$\Delta' M \times 10^3$	ΔM calc.	Diff. obs.-calc. $\times 10^3$
H ³	0	1-2	0,0090	9,0		
He ⁵	1	0-1	0,0277	-2,6		
He ⁶	1	0-2	0,0311	0,8		
Li ⁸	1	1-3	0,0442	13,9		
Be ⁷	1	2-1	0,0403	10,0		
Be ¹⁰	2	0-2	0,0696	9,0		
B ⁹	2	1-0	0,0604	-0,2		
B ¹²	2	1-3	0,0865	25,9		
C ¹⁰	2	2-0	0,0637	3,1		
C ¹¹	2	2-1	0,0785	17,9		
C ¹⁴	3	0-2	0,1126	21,7		
N ¹³	3	1-0	0,1007	9,8		
N ¹⁶	3	1-3	0,1310	40,1		
O ¹⁵	3	2-1	0,1199	29,0		
F ¹⁷	4	1-0	0,1372	16,0	0,1375	-0,3
F ¹⁸	4	1-1	0,1470	25,8	0,1475	-0,5
F ²⁰	4	1-3	0,1650	43,8	0,1675	-2,5
Ne ¹⁹	4	2-1	0,1538	32,6	0,1575	-3,7
Ne ²³	5	0-3	0,1968	45,3	0,1975	-0,7
Na ²²	5	1-1	0,1875	36,0	0,1875	0,0
Na ²⁴	5	1-3	0,2080	56,5	0,2075	+0,5
Mg ²³	5	2-1	0,1954	43,9	0,1975	-2,1
Mg ²⁷	6	0-3	0,2392	57,4	0,2375	+1,7
Al ²⁶	6	1-1	0,2276	45,8	0,2275	+0,1
Al ²⁸	6	1-3	0,2491	67,3	0,2475	+1,6
Al ²⁹	6	1-4	0,2596	77,8	0,2575	+2,1
Si ²⁷	6	2-1	0,2340	52,2	0,2375	-3,5
Si ³¹	7	0-3	0,2793	67,2	0,2775	+1,8
P ³⁰	7	1-1	0,2676	55,5	0,2675	+0,1
P ³²	7	1-3	0,2897	77,6	0,2875	+2,2
Cl ³⁶	8	1-3	0,3302	87,8	0,3275	+2,7
Cl ³⁸	8	1-5	0,3461	103,7	0,3475	-1,4
A ⁴¹	9	0-5	0,3747	102,0	0,3775	-2,8
Ca ⁴⁵	10	0-5	0,4155	112,5	0,4175	-2,0
Sc ⁴⁶	10	1-5	0,4253	122,3	0,4275	-2,2
V ⁵²	11	1-7	0,4879	154,6	0,4875	+0,4

Les valeurs de ΔM calculées à l'aide de l'expression (18) figurent dans le tableau VI, sixième colonne; dans la dernière colonne sont reportées les différences entre les ΔM observés et calculés, multipliées par 10^3 .

La droite (17) possède un coefficient angulaire p un peu inférieur à celui qui a été indiqué dans la partie II de ce travail, p. 82; le calcul a été effectué autrement.

Pour les atomes moyens et lourds je n'ai pu trouver de données sûres et assez nombreuses. Il semble bien cependant que, dans ces deux catégories d'atomes, on retrouvera des faits analogues aux précédents. Le défaut de masse des atomes artificiels sera une fonction linéaire du nombre de masse, et la droite sera encore mieux réalisée, la structure fine plus atténuée, peut-être à peine sensible. Cette droite coïncidera-t-elle à peu près avec celle relative aux atomes naturels? Sera-t-elle, ce qui est plus probable, sensiblement

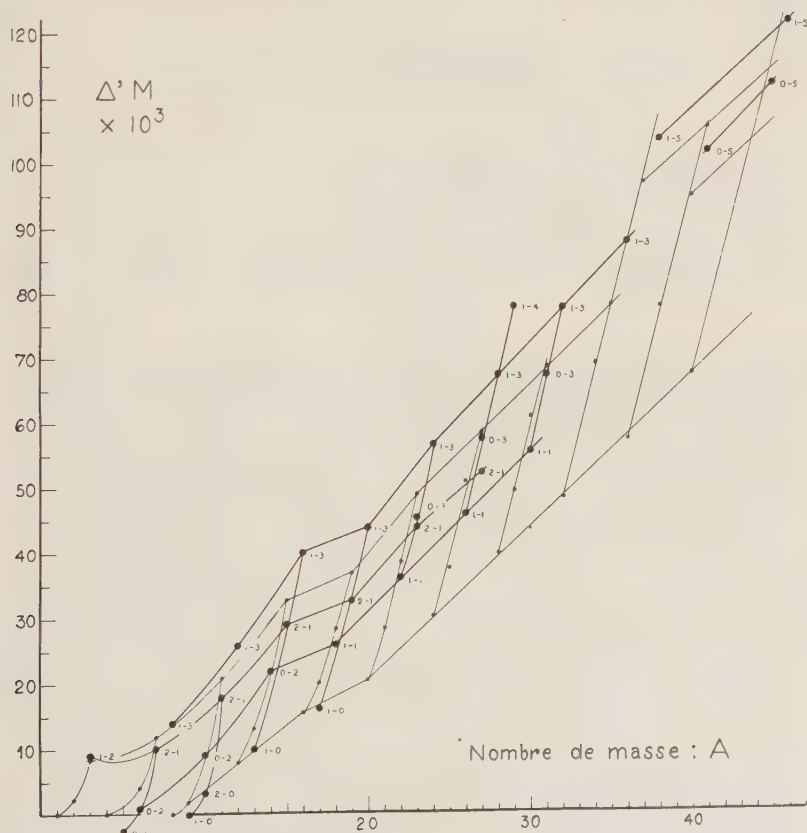


Fig. 8.

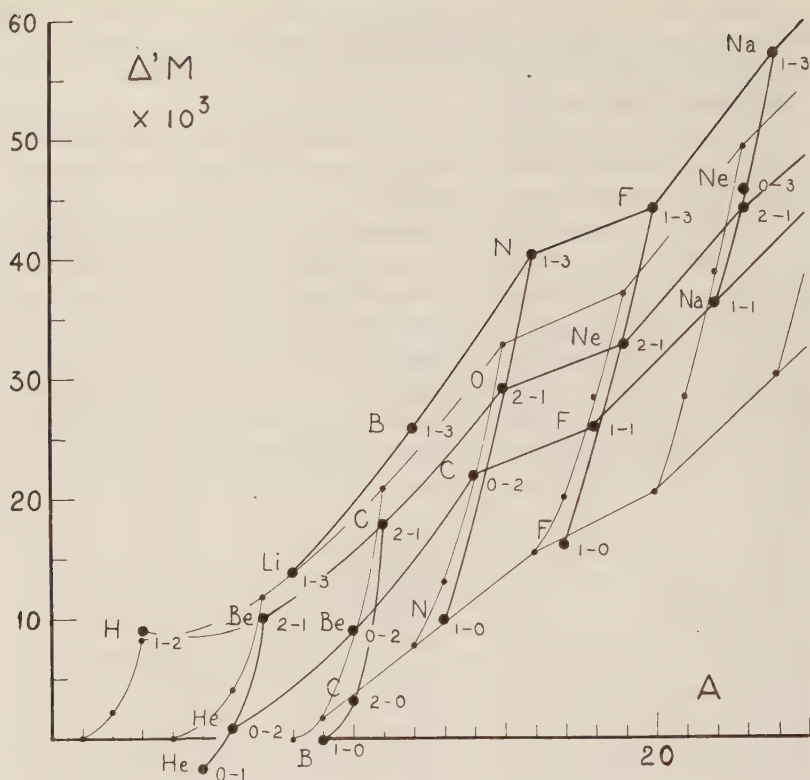


Fig. 9.

parallèle et légèrement inférieure à cette dernière? C'est impossible à prévoir. Mais lorsque les données expérimentales permettront de fixer ces points avec précision, on aura le moyen de calculer a priori la masse d'un atome artificiel arbitrairement choisi, par suite l'énergie mise en jeu dans sa désintégration. Les particularités du processus radioactif relatif à cet atome pourraient donc être prévues.

Quant à la classe d'atomes qui nous occupe présentement, le graphique le plus intéressant s'obtient de nouveau en portant $\Delta'M$ en fonction de A . La fig. 8 en reproduit l'ensemble; la fig. 9 la partie inférieure à plus grande échelle. Les atomes radioactifs sont représentés par les gros cercles, joints par les traits gras; les atomes naturels par les petits cercles reliés par des traits plus fins. Les indications sont relatives exclusivement aux atomes artificiels.

Les réseaux ainsi obtenus pour les deux catégories d'atomes sont très semblables, mais décalés. Les $\Delta'M$ des atomes artificiels sont moindres que ceux des atomes naturels, à deux exceptions

près: ${}_4\text{Be}^{10}$ et ${}_6\text{C}^{14}$ dont les points figuratifs tombent sur les courbes relatives aux atomes naturels. Ces deux atomes ont l'excès 0—2.

Le fait le plus frappant mis en évidence par les fig. 8 et 9 est l'existence d'une discontinuité importante, déjà signalée sommairement dans la seconde partie (p. 81), située dans le voisinage de $A = 16$. Cette discontinuité est marquée par les caractères suivants:

a) *courbes* de même n et même e avant la discontinuité; *droites* après la discontinuité;

b) brusque diminution des coefficients angulaires pour les atomes de même excès, puis redressement;

c) les atomes artificiels ont des excès très différents dans les deux domaines limités par la discontinuité en question; les seuls excès qui se retrouvent de part et d'autre sont: 1—0; 1—3; 2—1. A ces exceptions près le premier domaine ne contient que les excès: 0—1; 0—2; 1—2; 2—1; le second: 0—3; 0—5; 1—1; 1—4; 1—5; 1—7.

Chez les atomes naturels, au contraire, les excès 1—1 ne se trouvent que dans le premier domaine; les excès 0—2 uniquement dans le second (voir fig. 4).

Il existe par conséquent dans la série entière des atomes *quatre discontinuités* que dévoile l'étude du défaut de masse, discontinuités qui reflètent certainement un caractère fondamental de la constitution nucléaire. Ces discontinuités partagent les atomes en cinq groupes naturels, et non en trois comme on le disait dans la première partie:

atomes très légers — atomes légers — atomes moyens —
atomes lourds — atomes radioactifs.

Elles sont localisées avec assez de précision aux points suivants:

		A	Z	n
1ère discontinuité	. . .	16	8	4
2ème	« . . .	52	24	12
3ème	« . . .	131	54	27
4ème	« . . .	210	84	42

L'examen des fig. 4 et 9 montre cependant que l'on peut hésiter pour la première; si, pour les atomes du type 0—0 en effet, le hiatus se fait *après* O^{16} , pour les autres, naturels ou artificiels, il a lieu *avant*. La structure tétraédrique d'un noyau $n = 4$, formé de 4 part. α , ne semble donc pas jouer le seul rôle.

La dernière discontinuité est peut-être localisée après $n = 41$, $Z = 83$, donc à la fin de la série des éléments stables, ce qui semble assez probable, car ${}_{84}\text{Po}^{210}$ serait alors mieux à sa place, ainsi que

quelques atomes radioactifs naturels qui n'ont pas été pris en considération.

L'interprétation de ces faits dûment établis ne saurait être tentée par un représentant de la physique expérimentale; je laisse donc aux théoriciens, et plus particulièrement aux spécialistes de la physique nucléaire, le soin — et le privilège — de trouver cette interprétation. On songera peut-être, ainsi que j'y ai déjà fait allusion, à des « couches » concentriques de stabilité décroissante, la dernière se désagrégeant spontanément par une sorte de desquamation avec émission de part. α ponctuée de transformations β . On fera peut-être appel à la théorie simple de la « goutte liquide » à laquelle on compare souvent le noyau; je ne sais. Mais un dernier point que je voudrais marquer rend plausible cette seconde supposition.

Il s'agit du phénomène de *scission* récemment découvert, qui est le mieux connu pour l'élément ${}_{92}\text{U}^{235}$, et provoqué par la capture d'un neutron. On sait que cette scission, qui se produit avec un énorme dégagement d'énergie, entraîne la production d'atomes radioactifs artificiels qui évoluent pour aboutir finalement à des atomes stables, l'atome initial étant en première ligne scindé en deux autres plus légers.

D'après LOUIS-A. TURNER²⁾ les atomes sûrement identifiés parmi les produits, directs ou indirects, de la scission sont:

${}_{35}\text{Br}$; ${}_{36}\text{Kr}$; ${}_{37}\text{Rb}$; ${}_{38}\text{Sr}$; ${}_{39}\text{Y}$; ${}_{42}\text{Mo}$;

puis

${}_{51}\text{Sb}$; ${}_{52}\text{Te}$; ${}_{53}\text{I}$; ${}_{54}\text{Xe}$; ${}_{55}\text{Cs}$; ${}_{56}\text{Ba}$; ${}_{57}\text{La}$.

Pour le problème qui nous occupe, la question essentielle est de savoir *où* se produit la scission du noyau. Il est assez naturel de supposer qu'elle a lieu à l'une des discontinuités mises en évidence par le présent travail. Celle qui paraît le plus marqué est la troisième. En effet on a vu que les coefficients angulaires p successifs sont à très peu près entre eux comme les nombres entiers 10, 9, 7, 6. Le plus grand saut se fait au passage de 9 à 7, donc à la troisième discontinuité ($Z = 54$). Il semble alors plausible d'admettre que l'atome U^{235} , le seul des isotopes de l'Uranium qui subisse le phénomène de scission, se partage comme suit:



avec « évaporation » de quelques neutrons. Les nombres de masse des atomes Xe et Sr formés seront considérables, car U^{235} con-

²⁾ LOUIS-A. TURNER. Nuclear fission. Rev. of modern Physics **12**, p. 1 (1940).

tient un grand excès de neutrons (51); ces atomes seront instables et, par transformations β successives, donneront:

le premier: ^{55}Cs ; ^{56}Ba ; ^{57}La ; ...

le second: ^{39}Y ; ^{40}Zr ; ^{41}Cb ; ^{42}Mo ; ...

dont la plupart ont été effectivement identifiés.

Pour expliquer la formation des atomes de nombre atomique plus petit dans les deux séries, on pourra envisager des transformations α , ou bien admettre que la scission ne se fait pas toujours *exactement* au point envisagé de la troisième discontinuité.

Quoiqu'il en soit, il n'en reste pas moins vrai que les deux atomes Xe et Sr qui, selon notre hypothèse, sont les deux produits primaires de la scission, se trouvent au milieu des deux séries d'atomes dont la présence a été reconnue expérimentalement; la troisième discontinuité paraît bien constituer un point faible de l'édifice nucléaire et jouer un rôle essentiel dans le phénomène.

Neuchâtel, Institut de physique de l'Université.

Zwei Beiträge zur Hitzdraht-Messmethode

von G. Dätwyler.

Institut für Aerodynamik, ETH.

(24. I. 1942.)

I.

Bei *Turbulenzmessungen* mit dem Hitzdrahtanemometer erfordert die *Eichung* der Hitzdrahtsonde einen beträchtlichen Mehraufwand an Einrichtungen und Arbeit. Die Sonde muss ja meistens in einem besonderen Eichkanal für einen ganzen Geschwindigkeitsbereich und für verschiedene Heizstromwerte geeicht werden. Die so gewonnenen Eichkurven geben die am Hitzdraht je nach Strom I und Windgeschwindigkeit V herrschende Spannung

$$E = E(V; I) \quad (\text{siehe Fig. 1}).$$

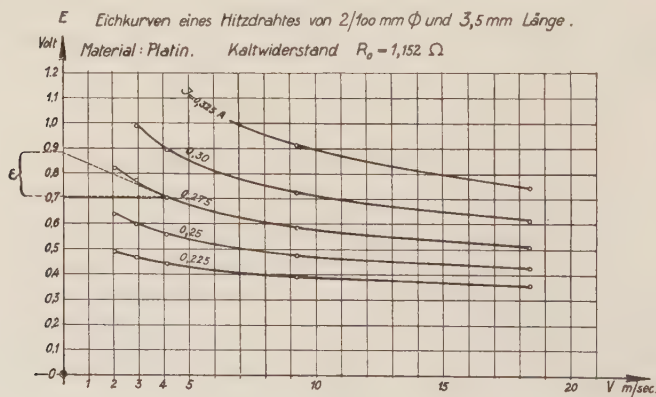


Fig. 1.

Aus ihnen folgt die Empfindlichkeit $\left(\frac{dE}{dV}\right)$ als Tangente im jeweiligen Arbeitspunkte des Hitzdrahtes. Sie ist nun aber oft zeitlich variabel und besonders auch temperaturabhängig. Ferner beeinflusst der Turbulenzgrad bei Eichung und Messung die Empfindlichkeit, und bei Messungen in Grenzschichten sehr nahe an festen Oberflächen wird der Wärmezustand des Hitzdrahtes durch die Wand in unbekanntem Masse beeinflusst. Es wäre daher wün-

schenswert, ohne besondere Einrichtungen die Eichung des Hitzdrahtes jeweils an Ort und Stelle durchzuführen, um jede Messung durch die zugehörige Eichung zu ergänzen.

Nachfolgend soll ein Eichverfahren beschrieben werden, das die Bestimmung der Hitzdraht-Empfindlichkeit direkt auf prozentuelle Turbulenzgrade erlaubt, unter gleichzeitiger Vermeidung der oben angeführten Schwierigkeiten.

Bei einem mittleren Schwankungsquadrat $(\overline{dV})^2$ ist der prozentuelle Turbulenzgrad gegeben durch den Quotienten

$$v' = \frac{\sqrt{(\overline{dV})^2}}{V}.$$

Er wird berechnet aus dem am Turbulenzmessgerät angezeigten quadratischen Mittelwert der Hitzdraht-Signalspannung e nach der Beziehung

$$v' = \frac{1}{V} \cdot \frac{e}{\left(\frac{dE}{dV}\right)_I} = \frac{e}{E} \cdot \left(\frac{\frac{dV}{V}}{\left(\frac{dE}{E}\right)_I}\right)^{-1}.$$

Nach der üblichen Methode müsste nun der Quotient $\left(\frac{dE}{dV}\right)_I$ den Eichkurven entnommen werden. Die neue Methode ersetzt, wie wir noch sehen werden, diese „Geschwindigkeitseichung“ bei konstantem Heizstrom I durch eine „Stromeichung“ bei konstanter (und meist unbekannter) Geschwindigkeit V . Diese Eichung ergibt den Zusammenhang von E und I bei $V = \text{const.}$, und es fragt sich nun, wie der Quotient $\left(\frac{dV}{V}\right)_I / \left(\frac{dE}{E}\right)_I$ auf diese Daten zurückgeführt werden kann.

Wir beginnen mit dem Nenner $\left(\frac{dE}{E}\right)_I$. Offenbar ist bei $I = \text{const.}$

$$\left(\frac{dE}{E}\right)_I = \left(\frac{dR}{R}\right)_I.$$

Dagegen, bei $V = \text{const.}$,

$$\left(\frac{dR}{R}\right)_V = \left(\frac{dE}{E}\right)_V - \left(\frac{dI}{I}\right)_V,$$

wie sich aus dem Ohm'schen Gesetze leicht ableiten lässt.

Aus diesen zwei Gleichungen folgt für gleiche Effekte

$$\left(\frac{dR}{R}\right)_V = \left(\frac{dR}{R}\right)_I \cdot \dots \cdot \left(\frac{dE}{E}\right)_I = \left(\frac{dE}{E}\right)_V - \left(\frac{dI}{I}\right)_V.$$

¹⁾ Subscripta bedeuten: $I \dots I = \text{const.}$, $V \dots V = \text{const.}$

Der Zähler $\left(\frac{dV}{V}\right)_I$ lässt sich mit Hilfe der KING'schen Gleichung¹⁾ durch einen äquivalenten Wert von $\left(\frac{dI}{I}\right)_V$ ersetzen. Diese Gleichung lautet

$$E \cdot I = I^2 \cdot R = (A + B \sqrt{V}) \cdot (t - t_0)^2 + (K + F \sqrt{V}) \cdot (t - t_0),$$

und stellt die Wärmebilanz des Hitzdrahtes dar. Die Glieder mit den Koeffizienten A und K geben die durch Strahlung, Konvektion und Ableitung, die Glieder mit \sqrt{V} die durch den Wind V fortgeführte Wärmemenge an. Mit

$$R = R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]$$

folgt

$$\frac{I^2 R}{R - R_0} = (a + b \sqrt{V}) \cdot (R - R_0) + (\kappa + \gamma \sqrt{V}).$$

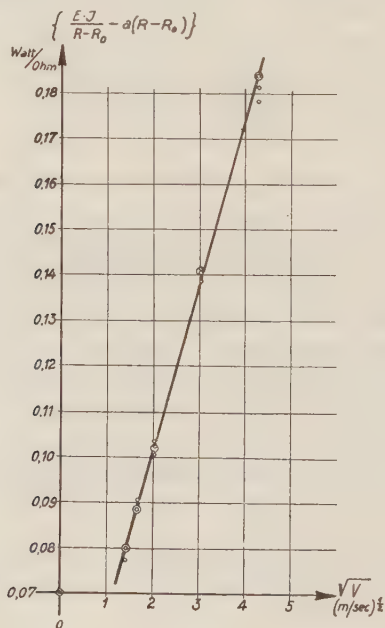


Fig. 2.

Über \sqrt{V} als Abszisse aufgetragen ergibt sich eine Gerade (Fig. 2).

Für $I = \text{const.}$ folgt nun

$$\left(\frac{dR}{R}\right)_I = -\left(\frac{dV}{V}\right)_I \cdot \frac{\frac{\sqrt{V}}{2} \cdot [\gamma + b(R - R_0)]}{\frac{I^2 R R_0}{(R - R_0)^2} + R(a + b \sqrt{V})}.$$

¹⁾ BURGERS, Hitzdrahtmessungen. Handbuch der Experimentalphysik von Wien-Harms IV, 1. Teil, S. 635—649.

Für $V = \text{const.}$ ergibt sich dagegen

$$\left(\frac{dR}{R}\right)_V = \left(\frac{dI}{I}\right)_V \cdot \frac{\frac{2 I^2 R}{R - R_0}}{\frac{I^2 R R_0}{(R - R_0)^2} + R(a + b\sqrt{V})}.$$

Für gleiche Effekte

$$\left(\frac{dR}{R}\right)_V = \left(\frac{dR}{R}\right)_I$$

folgt

$$\left(\frac{dV}{V}\right)_I = - \frac{4 \left(\frac{dI}{I}\right)_V}{1 - \frac{a(R - R_0)^2 + \kappa(R - R_0)}{I^2 R}}.$$

Das heisst: die einer gegebenen Heizstromänderung $\left(\frac{dI}{I}\right)_V$ äquivalente Geschwindigkeitsänderung $\left(\frac{dV}{V}\right)_I$ muss mindestens viermal so gross sein wie jene. Der Hitzdraht reagiert also auf Heizstromänderungen mehr als viermal so stark wie auf Geschwindigkeitsänderungen.

Für $V = 0$ findet man aus der KING'schen Gleichung, dass der Nennerausdruck

$$\frac{a(R - R_0)^2 + \kappa(R - R_0)}{I^2 R}$$

angibt, wieviel von der gesamten Heizleistung ($I^2 R$) durch Strahlung, Konvektion und Ableitung verloren geht ($a[R - R_0]^2 + \kappa[R - R_0]$), also nicht vom Winde V fortgeführt wird. Der Ausdruck ($a[R - R_0]^2 + \kappa[R - R_0]$) ist demnach gleich der Heizleistung ($I^2 R$) $_{V=0}$, die bei abgestelltem Winde den Hitzdraht auf die gleiche Temperatur bringt wie die Heizleistung ($I^2 R$) im Winde V . Es ist also

$$\frac{a(R - R_0)^2 + \kappa(R - R_0)}{I^2 R} \cdot \left[\frac{(E \cdot I)_{V=0}}{(E \cdot I)_{V>0}} \right] \left(\frac{E}{I} \right) = R,$$

und wir erhalten

$$\left(\frac{dV}{V}\right)_I = - \frac{4 \left(\frac{dI}{I}\right)_V}{1 - \left[\frac{(E \cdot I)_{V=0}}{(E \cdot I)_{V>0}} \right] \left(\frac{E}{I} \right) = R}.$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke $\left(\frac{dE}{E}\right)_I$ und $\left(\frac{dV}{V}\right)_I$ in die Auswertungsgleichung folgt

$$v' = \frac{e}{E} \cdot \frac{-4 \left(\frac{dI}{I}\right)_V}{1 - \frac{\left(\frac{dE}{E}\right)_V - \left(\frac{dI}{I}\right)_V}{\left[\frac{(E \cdot I)_{V=0}}{(E \cdot I)_{V>0}}\right] \left(\frac{E}{I}\right)_R}}.$$

Die prozentuelle Empfindlichkeit ε ist demnach

$$\varepsilon = V \left(\frac{dE}{dV}\right)_I = -\frac{E}{4} \cdot \frac{\left(\frac{dE}{E}\right)_V - \left(\frac{dI}{I}\right)_V}{\left(\frac{dI}{I}\right)_V} \cdot \left\{ 1 - \left[\frac{(E \cdot I)_{V=0}}{(E \cdot I)_{V>0}} \right] \left(\frac{E}{I}\right)_R \right\},$$

und kann also ohne Kenntnis der Geschwindigkeit V gefunden werden. Sie erscheint im Diagramm

$$E = E(V; I)$$

als die Strecke zwischen den Schnittpunkten der Horizontalen und der Tangente durch den Betriebspunkt $(V; I)$ mit der Ordinatenachse (siehe Fig. 1). Sie ist gleich der Spannungsänderung ΔE am Hitzdraht bei einer Geschwindigkeitsänderung $\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = 1$, wenn die Kurve $E = E(V; I)$ mit der Tangente im Arbeitspunkte $(V; I)$ identisch wäre. Der Ausdruck

$$\frac{\left(\frac{dE}{E}\right)_V - \left(\frac{dI}{I}\right)_V}{\left(\frac{dI}{I}\right)_V}$$

kann umgeformt werden in

$$\left\{ \frac{\left(\frac{dE}{E}\right)_V}{\left(\frac{dI}{I}\right)_V} - 1 \right\} = \left\{ \left(\frac{dE}{dI}\right)_V \cdot \frac{1}{\left(\frac{E}{I}\right)_V} - 1 \right\} = \left\{ \left(\frac{dE}{dI}\right)_V \cdot \frac{1}{R} - 1 \right\},$$

oder auch, mit Berücksichtigung von

$$\left(\frac{dE}{dI}\right)_V = \left(\frac{I \cdot dR + R \cdot dI}{dI}\right)_V,$$

in

$$\left(\frac{I}{R}\right) \cdot \left(\frac{dR}{dI}\right)_V.$$

Dies ergibt für die Empfindlichkeit die Beziehung

$$\varepsilon = - \left(\frac{I}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{dR}{dI} \right)_V \cdot \left\{ 1 - \left[\frac{(E \cdot I)_{V=0}}{(E \cdot I)_{V>0}} \right] \left(\frac{E}{I} \right) = R \right\},$$

und für die Auswertung der Turbulenzmessung folgt

$$v' = - \frac{e}{\left(\frac{I}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{dR}{dI} \right)_V \cdot \left\{ 1 - \left[\frac{(E \cdot I)_{V=0}}{(E \cdot I)_{V>0}} \right] \left(\frac{E}{I} \right) = R \right\}}.$$

Es ist nun sehr einfach, bei jeder Messung den Quotienten $\left(\frac{dE}{dI} \right)_V$ bzw. $\left(\frac{dR}{dI} \right)_V$ mittelst einer rasch und bequem durchzuführenden „Stromeichung“ zu bestimmen. Infolge der mindestens viermal grösseren „Stromempfindlichkeit“ des Hitzdrahtes besitzt diese Eichmethode auch den Vorteil grösserer Genauigkeit. Es muss ferner noch jeweils bei abgestelltem Winde ($V = 0$) die Heizleistung $(E \cdot I)_{V=0}$ für $(E/I) = R$ gemessen werden, was gleichfalls keine Mühe macht. Damit sind dann die zur Auswertung nötigen Daten bekannt, und sie können also immer direkt am Orte der Messung gewonnen werden. So sind alle anfangs genannten Sekundäreinflüsse miterfasst bzw. eliminiert, und die Aufstellung einer besonderen Eichrichtung bleibt erspart.

Messungen zum Vergleich der neuen mit der alten Eichmethode ergaben Übereinstimmung der Ergebnisse innerhalb der Messgenauigkeit.

II.

Oft stören *Pulsationen* bei Turbulenzmessungen in Luftstrahlen und Kanälen, indem sie als „Pseudoturbulenz“ mitgemessen werden. Nachfolgend soll eine Messanordnung zur Elimination ihrer störenden Wirkung beschrieben werden. Voraussetzung ist dabei, dass der Masstab der über den Messquerschnitt gleichmässigen Turbulenz klein ist im Vergleich zum Strahl- oder Kanalquerschnitt, und dass die Pulsationen gleichmässig und gleichzeitig über den Querschnitt auftreten.

Es werden, wie bei der Messung des Turbulenzmasstabes¹⁾, zwei möglichst genau gleiche Hitzdrähte H_1 und H_2 auf gleiche Temperatur geheizt und in der Messebene in einem Abstand voneinander montiert, der ein Mehrfaches des Turbulenzmasstabes beträgt. e_1 und e_2 seien die Momentanwerte der Spannungsschwankungen an den beiden Hitzdrähten. Die Drähte werden elektrisch

¹⁾ DRYDEN, SCHUBAUER und SKRAMSTAD, Report Nr. 581 des National Advisory Committee for Aeronautics, USA. 1936.

so geschaltet, dass ihre Signalspannungen einander entgegenwirken und als Differenz ($e_1 - e_2$) zum Eingang des Messverstärkers gelangen (Schema siehe Fig. 3). Das Thermokreuz am Verstärker-
ausgang gibt eine Anzeige proportional zu $(e_1 - e_2)^2$. Bei richtig

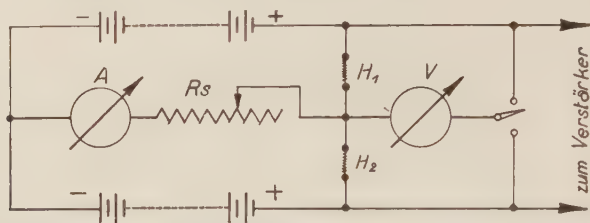


Fig. 3.

kompenziertem Frequenzgang des Verstärkers ist diese Anzeige proportional zu $(u_1 - u_2)^2$, d. h. proportional dem mittleren Quadrat der Differenz der Geschwindigkeitsschwankungen u_1 und u_2 an den beiden Hitzdrähten. Mit K als Eichkonstante des Messverstärkers ist diese Anzeige

$$A = K \cdot (\overline{u_1 - u_2})^2.$$

Nach Ausführung des Quadrates ergibt sich

$$A = K \cdot (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} - 2 \overline{u_1 \cdot u_2}).$$

Bei echter Turbulenz ist bei genügendem Abstand der Hitzdrähte die Korrelation

$$R_{\text{turb.}} = \text{prop. } \overline{u_1 \cdot u_2} = 0,$$

und die Anzeige wird

$$A_{\text{turb.}} = K \cdot (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2}) = 2 K \cdot \overline{u^2},$$

also gleich der doppelten Anzeige bei Verwendung nur eines Hitzdrahtes.

Die Kanalpulssationen $\pm \Delta V$ dagegen mit der Korrelation

$$R_{\text{puls.}} = 1$$

ergeben eine Anzeige

$$A_{\text{puls.}} = K \cdot (\overline{\Delta V - \Delta V})^2 = 0,$$

d. h. sie sind aus der Messung eliminiert.

Strömungen von Quecksilberdampf in den Anodenhülsen von Mutatoren¹⁾

Berechnungen und Versuchsergebnisse

von W. Deck

(A.G. Brown, Boveri & Cie., Baden/Schweiz.)

(23. I. 1942.)

Zusammenfassung. In den Anodenhülsen von Mutatoren treten Strömungen von Quecksilberdampf auf: Während der Brennzeit strömt der Dampf aus den Hülsen in den Kathodenraum heraus, in der folgenden Sperrzeit in umgekehrter Richtung in die Hülsen hinein. Diese Vorgänge werden theoretisch untersucht und die Rechnungsergebnisse experimentell nachgeprüft. Es ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

I. Einleitung.

Eine Berechnung der Mutatoren, so wie sie bei den elektrischen Maschinen durchgeführt wird, ist bisher noch nicht möglich. Man kann zwar gewisse Einzelheiten berechnen, wie die Grösse der benötigten Kühlfläche, die Oberfläche der Anoden und der Kathode, die Kühlluft- resp. Kühlwassermenge, die mittlere Dampfdichte, die Ionendichte u. a. Das genügt aber bei weitem nicht, um Neukonstruktionen sicher vorausberechnen oder alte bewährte Konstruktionen für grössere Leistungen entwickeln zu können. Man ist daher für die Weiterentwicklung der Mutatoren zur Hauptsache auf Versuche angewiesen. Um diese unbefriedigende Sachlage etwas zu verbessern, soll in dieser Arbeit versucht werden, die periodischen, in den Anodenhülsen auftretenden Dampfdichteveränderungen zu berechnen. Die Resultate werden dann mit Versuchsergebnissen verglichen. In einer früheren Arbeit²⁾ wurden diese Erscheinungen experimentell untersucht und ihr grosser Einfluss auf das Betriebsverhalten der Mutatoren näher besprochen.

Die Anoden eines Mutators führen einen intermittierenden Strom. Innerhalb einer Wechselstromperiode folgen sich eine Brennzeit und eine stromlose Zeit. Zum Beispiel in einer 6-Phasenschal-

¹⁾ Unter Mutatoren versteht man elektrisch gesteuerte Vakuumentladungsapparate für Starkstrom, die zur Umformung einer Stromart in eine andere dienen. Als diese Apparate früher nur zur Erzeugung von Gleichstrom dienten, war die Bezeichnung „Quecksilberdampfgleichrichter“ üblich.

²⁾ W. DECK, Brown Boveri Mitteilungen **28**, S. 97 (1941), Heft 4/5. Im folgenden als Arb. I zitiert.

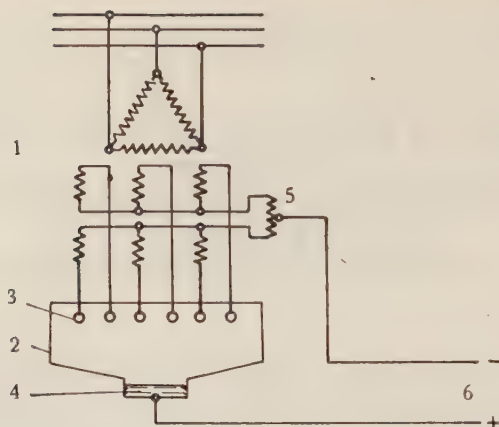


Fig. 1.

Prinzipielle Schaltung eines Wechselstrom-Gleichstrom-Mutators mit Saugdrossel-Spule.

- 1 Transformator, 2 Mutator, 3 Anoden, 4 Kathode, 5 Saugdrosselspule, 6 Gleichspannung.

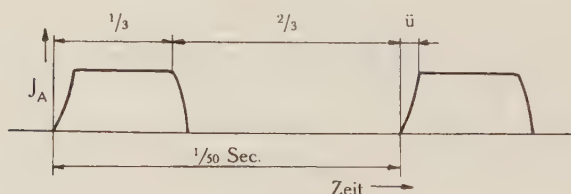


Fig. 2.

Anodenstrom J_A eines Mutators nach der Schaltung Fig. 1.
 \ddot{u} = Überschneidungszeit.

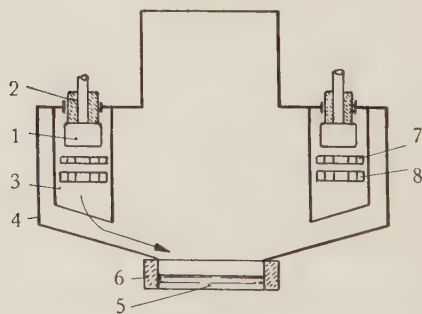


Fig. 3.

Schematischer Schnitt durch einen Mutator.

- 1 Anode mit Einführung, 2 Anodenisolator, 3 Anodenhülse, 4 Mutatorgehäuse, 5 Kathode, 6 Kathodenisolator, 7 Steuergitter, 8 Entionisierungsgitter.

tung mit Saugdrosselspule, wie sie Fig. 1 zeigt, beträgt die Brennzeit des Anodenstromes ca. $\frac{1}{3}$ und die stromlose Zeit, die Sperrzeit, ca. $\frac{2}{3}$ der Wechselstromperiode. Fig. 2 zeigt schematisch die Form des Anodenstromes. In der stromlosen Zeit liegt an der Anode die negative Sperrspannung.

Diese Art der Strombelastung hat zur Folge, dass die Dampfdichte in den Anodenhülsen und damit auch in der Umgebung der Anoden zeitlich nicht konstant, sondern periodischen Schwankungen unterworfen ist. Während der Brennzeit wird der Quecksilberdampf in der Anodenhülse erhitzt, was eine Steigerung des Druckes ergibt. Durch Ausströmen eines Teiles des Dampfes in den Kathodenraum (siehe Fig. 3) gleichen sich die Drucke während der Brennzeit wieder aus und damit nimmt die Dampfdichte in der Anodenhülse ab. Umgekehrt entsteht während der Sperrzeit durch die Abkühlung des Quecksilberdampfes ein Unterdruck in der Anodenhülse, der sich durch Einstromen von Dampf aus dem Kathodenraum bis zum Beginn der nächsten Brennzeit wieder ausgleicht. Die Dampfdichte nimmt wieder zu. Im stationären Fall strömt während der Sperrzeit soviel Quecksilberdampf in die Hülse hinein, wie während der Brennzeit herausgeströmt ist. Diese Erscheinungen sind seit längerer Zeit unter der Bezeichnung „Atmen“ der Anodenhülsen bekannt.

II. Berechnung der Dampfströmungen.

A. Das Ausströmen.

1. Beschreibung des Rechnungsganges.

Eine strenge Durchrechnung der Dampfströmungen, ausgehend von den hydrodynamischen Grundgleichungen und unter Berücksichtigung der Temperaturänderungen während des Stromdurchganges bietet grosse mathematische Schwierigkeiten. Es ist daher zweckmässig und für die meisten praktischen Bedürfnisse auch genügend, wenn man den ganzen Vorgang in einzelne Teile zerlegt und diese für sich berechnet. Aus der in der Hülse umgesetzten Energie des Lichtbogens wird unter Vernachlässigung von Wärmeverlusten die minimale Zeit berechnet, die verstreicht, bis der Quecksilberdampf auf die Temperatur des Lichtbogens aufgeheizt ist. Nachdem die Temperatur und damit auch der Druck in der Anodenhülse ihren höchsten Wert erreicht haben, soll das Ausströmen des Dampfes beginnen. Dieses zerlegen wir in zwei Teile: In die Ausbildung eines Druckgefälles längs der ganzen Hülse und in die Druckabnahme in der Nähe der Anode. Bei der

Vergleichung der Ergebnisse mit Versuchsergebnissen muss man berücksichtigen, dass die einzelnen Vorgänge nicht so zeitlich streng getrennt verlaufen, sondern ineinander übergehen und dass wir eine evtl. Beeinflussung des Ausströmens durch das eingebaute schwach sperrende Gitter vernachlässigen.

2. Bezeichnungen und Zahlenangaben.

Zur Erleichterung der Rechnung stellen wir hier die häufig gebrauchten Symbole und Zahlenangaben zusammen; die wenig benützten Größen, ferner die Variablen und Konstanten der Differentialgleichungen führen wir fortlaufend im Text ein.

Temperaturen:

- $T \cong 55^{\circ} \text{C}$ = Mittlere Temperatur der Kühlfläche des Mutators.
 $T_1 \cong 1000^{\circ} \text{K}$ = Temperatur der Anode und Hülse = Temperatur des Hg-Dampfes in der Anodenhülse während der Sperrzeit.
 $T_2 \cong 5000^{\circ} \text{K}$ = Temperatur des Hg-Dampfes in der Anodenhülse während der Brennzeit.

Drucke:

- $p_0 = 0,02 \text{ mm Hg} \cong 25 \text{ Dyn/cm}^2$ = Dampfdruck des bei $T^0 \text{ C}$ gesättigten Hg-Dampfes.
 p_1 = Unterdruck in der Anodenhülse am Anfang des Einströmens.
 p_2 = Überdruck in der Anodenhülse am Anfang des Ausströmens.
 \bar{p} = Mittlerer Druck.

Dampfdichten:

- $\varrho_1 = 6,5 \cdot 10^{-8} \text{ gr/cm}^3$ = Dampfdichte des auf die Temperatur T_1 überhitzten Hg-Dampfes bei einem Druck p_0 (nach Formel 3).
 $\varrho_2 = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ g/cm}^3$ = Dampfdichte des auf T_2 überhitzten Hg-Dampfes bei einem Druck p_0 .
 $\bar{\varrho}$ = Mittlere Dichte.

Elektrische Daten:

- J = Momentanwert des Anodenstromes.
 $J_A = 750 \text{ A}$ = Maximalwert des Anodenstromes während der Brennzeit = $\frac{1}{2}$ Gleichstrom in Sechssphasenschaltung mit Saugdrosselspule.
 $\mathcal{E} = 0,1 \text{ V/cm}$ = Spannungsgradient im Plasma in der Anodenhülse.
 \ddot{u} = Zeitdauer der Überlappung.

Dimensionen der Anodenhülse:

- $r = 10 \text{ cm}$ = Radius der Anodenhülse.
 $l = 50 \text{ cm}$ = Länge der Anodenhülse.

Zeiten:

t = Zeitkoordinate.

t_a = Aufheizzeit des Hg-Dampfes.

t_b = Zeit der Ausbildung des Druckgefälles längs der ganzen Anodenhülse. } Ausströmen

t_c = Zeitdauer des Ausströmens.

t_a' = Abkühlungszeit des Hg-Dampfes.

t_b' = Zeit der Ausbildung des Druckgefälles längs der Anodenhülse. } Einströmen

t_c' = Zeitdauer des Einströmens.

Physikalische Daten des Hg-Dampfes:

c_v = 0,015 cal/gr °C = Spezifische Wärme von Quecksilberdampf bei konstantem Volumen.

C_v = 3 cal/Mol = Molwärme von Hg-Dampf.

η = Koeffizient der inneren Reibung des Hg-Dampfes.

η'_i = Korrigierter Koeffizient der inneren Reibung (nach Formel (14)).

η'_{aus} = Korrigierter Koeffizient der inneren Reibung für das Ausströmen.

η'_{ein} = Korrigierter Koeffizient der inneren Reibung für das Einströmen.

α = $2,4 \cdot 10^{-5}$ cal/cm sec grad. = Koeffizient der Wärmeleitfähigkeit des Hg-Dampfes (nach Formel (60)).

Daten des Hg-Atomes und physikalische Konstanten:

m = $3,3 \cdot 10^{-22}$ gr = Masse eines Hg-Atomes.

M = 200,6 = Molekulargewicht von Quecksilber.

D \leq $3 \cdot 10^{-8}$ cm = Durchmesser eines Hg-Atomes¹⁾.

k = $1,37 \cdot 10^{-16}$ erg/grad = Boltzmann-Konstante.

R = $8,315 \cdot 10^7$ erg/grad Mol = Gaskonstante.

3. Der Temperaturanstieg des Quecksilberdampfes in der Anodenhülse zu Beginn der Brennzeit.

Die in der Hülse umgesetzte elektrische Energie dient zur Aufheizung des Hg-Dampfes von der Temperatur T_1 auf T_2 und zur Deckung der Wärmeverluste. Um eine Vorstellung darüber zu erhalten, wie rasch der Hg-Dampf auf diese Temperatur aufgeheizt wird, berechnen wir die minimale Aufheizzeit, die bei Vernachlässigung aller Wärmeverluste vorhanden wäre. Sie wird aus folgendem Ansatz erhalten:

¹⁾ Nach DUSHMAN, Hochvakuumtechnik S. 29.

Die in der Hülse in der Zeit t_a umgesetzte elektrische Energie = Wärmemenge in Wattsec, die zur Aufheizung des Quecksilberdampfes in der Hülse von T_1 auf T_2 nötig ist.

$$\mathfrak{E} \cdot l \int_0^{t_a} J dt = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot l \cdot \varrho_1 \cdot (T_2 - T_1) \cdot c_v}{0,239} \text{ Wattsec.} \quad (1)$$

Zur Berechnung des Integrals nehmen wir an, der Stromanstieg zu Beginn der Brennzeit erfolge linear. Wenn das Aufheizen des Quecksilberdampfes in einer kürzeren Zeit als der Überlappungszeit erfolgt, so ergibt sich

$$\int_0^{t_a} J dt = \frac{J_A \cdot t_a^2}{2 \ddot{u}}. \quad (2)$$

Führt man für die Dampfdichte ϱ_1 des auf T_1 überhitzten Dampfes in der Anodenhülse den Wert

$$\varrho_1 = \frac{M \cdot p_0 \cdot 273}{22400 \cdot 760 \cdot T_1} \quad (3)$$

ein, setzt man den Ausdruck (2) in (1) ein und ersetzt man M und c_v durch die entsprechenden Werte für Hg-Dampf, so erhält man als untere Grenze für die Aufheizzeit t_a des Quecksilberdampfes

$$t_a = 3,55 \cdot 10^{-2} \cdot r \sqrt{\frac{p_0 \cdot \ddot{u} \cdot (T_2 - T_1)}{\mathfrak{E} \cdot J_A \cdot T_1}}. \quad (4)$$

Dabei muss r in cm, \ddot{u} in sec, T in $^{\circ}\text{K}$, \mathfrak{E} in V/cm, J_A in Amp., p in mm Hg gemessen werden.

Zahlenbeispiele.

Wir setzen die auf S. 276 angegebenen Werte ein und berechnen t_a für 3 verschiedene, den Versuchsergebnissen entnommene Überlappungen. Die Resultate sind in der Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Minimale Aufheizzeit t_a des Quecksilberdampfes in der Anodenhülse.

Überlappung \ddot{u}	t_a (Rechnung)
$14,3 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$	$4,4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$
$8,8 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$	$3,44 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$
$5,8 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$	$2,8 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$

Mit kürzer werdender Überlappung erfolgt also auch eine raschere Aufheizung des Quecksilberdampfes.

4. Die Drucksteigerung in der Anodenhülse.

Das Ansteigen der Temperatur in der Hülse bewirkt eine Druckzunahme. Die maximal mögliche Drucksteigerung erhält man mit Hilfe der Gasgesetze, wenn man voraussetzt, dass während des Druckanstieges keine wesentliche Dampfmenge ausströmt. Der Druck in der Anodenhülse wird damit

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_0. \quad (5)$$

Setzen wir die Werte für T_1 und T_2 ein, so erhalten wir $p_2 = 5 p_0 = 0,1$ mm Hg. Die Druckdifferenz zwischen Hülse und Mutatorgehäuse erreicht also den für Vakuumgefäße beträchtlichen Wert von $p_2 - p_0 = 0,08$ mm Hg.

5. Das Ausströmen.

a) Diskussion der Strömungsart.

Für die Beurteilung der Strömungsart ist die Kenntnis des Koeffizienten der inneren Reibung von Bedeutung. Dieser ist bei den hohen Temperaturen des Lichtbogens u. W. noch nicht gemessen worden. Wir berechnen ihn mit Hilfe der kinetischen Gastheorie aus dem Ausdruck

$$\eta = \frac{m \bar{c}}{4 \cdot \pi \cdot D^2} \quad (6)$$

(vgl. z. B. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, S. 478, 1934.)

Die mittlere Geschwindigkeit \bar{c} der Hg-Atome ergibt sich aus der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung zu

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m}}. \quad (7)$$

Die Geschwindigkeit der Hg-Atome und damit auch die innere Reibung des Hg-Dampfes ist temperaturabhängig. Während der Brennzeit des Anodenstromes ist $T \cong 5000^\circ \text{K}$, woraus man

$$\eta_{5000^\circ} \cong 21 \cdot 10^{-4} \text{ gr/cm sec}$$

erhält. In der Sperrzeit ist $T \cong 1000^\circ \text{K}$ und

$$\eta_{1000^\circ} \cong 9,5 \cdot 10^{-4} \text{ gr/cm sec.}$$

Mit Hilfe dieser Werte kann entschieden werden, ob die Strömung des Hg-Dampfes in den Anodenhülsen laminar oder turbu-

lent ist. Ist ihre Geschwindigkeit kleiner als die durch die Reynold'sche Zahl $R = 2320$ bestimmte Grenzgeschwindigkeit,

$$v_{gr} = \frac{\eta \cdot R}{2 \cdot \varrho \cdot r} \quad (8)$$

so kann die Strömung nur laminar sein. Setzen wir für ϱ den aus Formel (3) berechneten Wert während der Brennzeit ein, so erhalten wir als Grenzgeschwindigkeit:

$$v_{gr} = 375 \cdot 10^4 \text{ cm/sec.}$$

Der Hg-Dampf erreicht in den Anodenhülsen niemals solche Geschwindigkeiten; denn eine Strömung kann in Röhren mit gewöhnlichen Mündungen keine grössere Geschwindigkeit als die Schallgeschwindigkeit erreichen, die sich aus dem Ausdruck

$$w = \sqrt{\frac{\gamma \cdot \bar{p}}{\varrho}} \quad (9)$$

wobei

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

bedeutet¹⁾, für den während der Brennzeit vorhandenen Dampfzustand zu

$$w = 6 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}$$

ergibt. Die Strömung des Hg-Dampfes in den Anodenhülsen ist also sicher laminar. Zum gleichen Resultat führt auch eine Untersuchung der Verhältnisse während der Sperrzeit.

Zur Berechnung der Dampfströmungen können wir daher das Poiseuille'sche Gesetz für die Durchflussmenge durch Röhre verwenden. Es lautet für Gase:

$$Q = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot \bar{\varrho} \cdot (p_1 - p_2) \cdot t \quad (10)$$

$(p_1 - p_2)$ bedeutet die Druckdifferenz am Rohr und

$$\bar{\varrho} = \frac{M \cdot \bar{p}}{R T} \quad (11)$$

die mittlere Dichte. Dieses Gesetz gilt aber nur exakt solange die freie Weglänge der Gasmoleküle klein ist gegen den Rohrradius. Ist das nicht der Fall, so tritt ein Gleiten der Gasschichten auf,

¹⁾ Für den einatomigen Hg-Dampf beträgt $\gamma = 1,66$.

die der Rohrwand unmittelbar benachbart sind. Das hat zur Folge, dass eine grössere Gasmenge durch das Rohr hindurchfliesst, als dem Poiseuille'schen Gesetz entspricht.

Die Zahl N der Quecksilber-Atome pro cm^3 , die zu Beginn der Brennzeit $2 \cdot 10^{14}$ beträgt, sinkt infolge des Ausströmens bis zum Ende der Brennzeit auf $3,9 \cdot 10^{13}$. Mit diesen Werten berechnet sich die mittlere freie Weglänge der Quecksilber-Atome

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot N \cdot D^2} \quad (12)$$

zu 1,3 cm am Anfang der Brennzeit und 6,4 cm am Ende der Brennzeit. Sie ist also kleiner als der Rohrradius, aber nicht wesentlich kleiner. Damit ist mit einer gewissen Gleitung an der Rohrwand zu rechnen. Den Einfluss dieser Gleitung kann man phänomenologisch berücksichtigen, indem man den Ausdruck (10) mit einem Korrektionsfaktor multipliziert:

$$Q = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot \bar{p} \cdot (p_1 - p_2) \cdot t \cdot \left(1 + \frac{4\xi}{r}\right) \cdot 1 \quad (13)$$

Der Gleitungskoeffizient hängt vom Zustand der Wand und der freien Weglänge ab. Wir wählen einen mittleren Wert und setzen

$$\xi = 2,3 \cdot \lambda.$$

Zur Vereinfachung führen wir anstelle des wirklichen Koeffizienten der inneren Reibung einen korrigierten Wert

$$\eta' = \frac{\eta}{1 + \frac{4\xi}{r}} \quad (14)$$

ein und können nun wieder das Poiseuille'sche Gesetz (10) benutzen.

Die Berechnung des korrigierten Koeffizienten der inneren Reibung erfolgt für das Ausströmen aus dem wirklichen Koeffizienten für 5000° K und der freien Weglänge zu Beginn der Brennzeit. Man erhält so

$$\eta'_{\text{aus}} = 15 \cdot 10^{-4} \text{ gr/cm sec}$$

und entsprechend für das Einströmen

$$\eta'_{\text{ein}} = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ gr/cm sec.}$$

¹⁾ Vgl. C. SCHAEFER, Einführung in die theoretische Physik, 2. Band (1929), S. 436—439.

b) Ausbildung des Druckgefälles in den Hülisen.

Wir nehmen an, dass das Ausströmen erst beginnt, nachdem sich der Quecksilberdampf in der ganzen Hülse erhitzt hat. In diesem Falle besteht nur ein Druckgefälle an der Hülisenöffnung, während der Druck in der Hülse konstant ist. Durch das Ausströmen verteilt sich das Druckgefälle auf einen immer grösseren Teil der Hülse, bis es an der Anode angelangt ist. Von diesem Moment an sinkt der Druck in der Umgebung der Anode. Die Zeit, die verstreicht vom Anfang des Ausströmens bis zum Moment, in dem sich das Ausströmen bei der Anode bemerkbar macht, lässt sich abschätzen, wenn wir eine lineare Druckverteilung über das Rohr annehmen.

Wir betrachten den Zeitpunkt, in dem das Druckgefälle bis zum Querschnitt x der Fig. 4 vorgewachsen ist. Das ist der Fall,

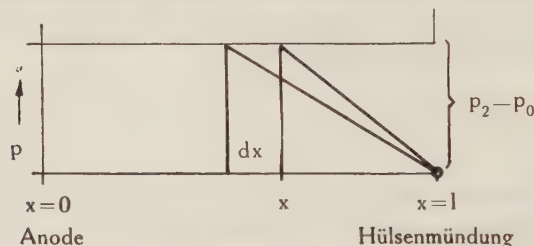


Fig. 4.

Ausbildung des Druckgefälles in der Anodenhülse.

wenn die halbe Dampfmenge im Rohr der Länge $(l - x)$ ausgeströmt ist. Damit das Druckgefälle bis zum Querschnitt $x - dx$ vorwachsen kann, muss weiter die halbe Dampfmenge des Rohres der Länge dx durch das Rohr der Länge $l - x$ ausströmen. Wir erhalten also folgenden Ansatz:

$$dQ = \frac{\bar{\varrho}}{2} \cdot r^2 \pi dx = \frac{\pi r^4}{8 \cdot \eta'_{\text{aus}}} \cdot \bar{\varrho} \cdot (p_2 - p_0) \frac{dt}{(l - x)}. \quad (15)$$

Daraus ergibt sich für die Zeit dt , die verstreicht bis das Druckgefälle vom Querschnitt x bis zum Querschnitt $x - dx$ vorgewachsen ist:

$$dt = \frac{4 \eta'_{\text{aus}} (l - x)}{r^2 (p_2 - p_0)} dx. \quad (16)$$

Durch Integration über x von 0 bis l erhalten wir für die Zeit t_b , die verstreicht bis sich das Ausströmen an der Anode bemerkbar macht, folgenden Ausdruck

$$t_b = \frac{2 \cdot \eta'_{\text{aus}} \cdot l^2}{r^2 (p_2 - p_0)}. \quad (17)$$

Zahlenbeispiel:

Setzen wir für l und r die auf S. 276 angeführten Werte, für $\eta'_{\text{aus}} = 15 \cdot 10^{-4}$ gr/cm sec, für $p_0 = 25$ Dyn/cm² und für $p_2 = 5 p_0$ ein, so erhalten wir für die Zeit, die zur Ausbildung des Druckgefälles über die ganze Hülslenlänge nötig ist:

$$t_0 = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

c) Die Druckabnahme in der Umgebung der Anode.

Die nun folgende Phase des Ausströmens ist dadurch charakterisiert, dass die Druckdifferenz an der Anodenhülse nicht mehr konstant ist, sondern abnimmt. Zur Berechnung dieser Druckabnahme betrachten wir 2 benachbarte Hülslen-Querschnitte x und $x + dx$ (Fig. 5) und bestimmen die Gasmengen die durch sie in der

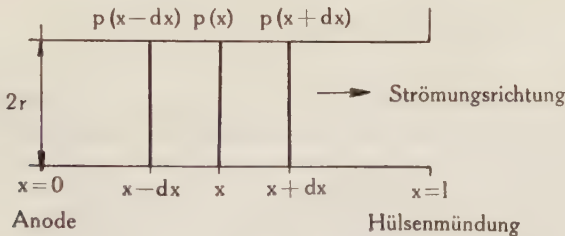


Fig. 5.

Skizze der Anodenhülse für die Aufstellung der Differentialgleichung des Ausströmens.

Zeit dt hindurchfließen. Ihre Differenz ergibt die Veränderung der Gasmenge im betrachteten Rohrvolumen.

Durch den Querschnitt x fließt in der Zeit dt folgende Hg-Dampfmenge:

$$Q(x, dt) = \frac{\pi r^4 M dt}{8 \eta' R T} \cdot \left(\frac{p(x-dx, t) - p(x, t)}{dx} \right) \cdot \left(\frac{p(x-dx, t) + p(x, t)}{2} \right). \quad (18)$$

Unter Benützung von

$$p(x-dx, t) = p(x, t) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t dx \quad (19)$$

lässt sich (18) schreiben:

$$Q(x, dt) = - \frac{\pi r^4 M dt}{8 \eta' R T} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t \cdot \left(p(x, t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t dx \right). \quad (20)$$

Entsprechend erhält man die durch den Querschnitt $x + dx$ in der Zeit dt hindurchfließende Dampfmenge:

$$Q(x + dx, dt) = - \frac{\pi r^4 M dt}{8 \pi' R T} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t \left(p(x, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t dx \right). \quad (21)$$

Die Veränderung der Dampfmenge im Rohrvolumen zwischen x und $x + dx$ ergibt sich also zu:

$$dQ(x, dt) = Q(x, dt) - Q(x + dx, dt) \quad (22)$$

$$dQ(x, dt) = \frac{\pi r^4 M}{8 \eta' R T} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t^2 dx dt. \quad (23)$$

Betrachten wir nun die Dampfmenge, die zur Zeit t im Rohrvolumen dV zwischen x und $x + dx$ vorhanden ist:

$$Q(x, t) = \varrho_1 \cdot dV = \frac{M \cdot p(t)}{R T} dV. \quad (24)$$

Dabei ist

$$p(t) = \frac{p(x, t) + p(x + dx, t)}{2} = p(x, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t dx. \quad (25)$$

Folglich wird

$$Q(x, t) = \frac{M dV}{R T} \left[p(x, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t dx \right]. \quad (26)$$

Die Dampfmenge, die sich in der Zeit $t + dt$ im Volumen dV befindet, ist entsprechend:

$$\begin{aligned} Q(x, t + dt) &= \frac{M dV}{R T} \left[p(x, t + dt) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{t+dt} dx \right] \\ &= \frac{M \cdot dV}{R T} \left[p(x, t) + \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_x dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} dx dt \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Die Änderung der Dampfmenge im Volumen dV in der Zeit zwischen t und $t + dt$ ergibt sich also zu:

$$\begin{aligned} dQ(x, dt) &= Q(x, t) - Q(x, t + dt) = \\ &= - \frac{M dV}{R T} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_x dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} dx dt \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Wir vernachlässigen das letzte Glied $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} dx dt$, setzen für dV den Wert $r^2 \pi dx$ ein und erhalten so:

$$dQ(x, dt) = - \frac{r^2 \pi M}{R T} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_x dx dt. \quad (29)$$

Die beiden Ausdrücke (23) und (29) für die in der Zeit zwischen t und $t + dt$ erfolgte Veränderung der Dampfmenge im Rohrvolumen zwischen x und $x + dx$ können wir einander gleich setzen und erhalten so die gesuchte Differentialgleichung für den Druck als Funktion des Ortes und der Zeit:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{r^2}{8 \eta'} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2. \quad (30)$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um einen Spezialfall der nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung¹⁾. Wir schreiben sie zur Vereinfachung in der Form

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \quad (31)$$

wobei

$$c = \frac{r^2}{8 \eta'}. \quad (32)$$

Damit diese Gleichung überhaupt lösbar ist, müssen die Randbedingungen gewissen Einschränkungen unterworfen werden. An der Hülsenmündung ($x = l$) muss der Druck zeitlich konstant sein und zwar gleich dem Druck p_0 im Mutatorgehäuse. Diese Forderung legt glücklicherweise nur eine charakteristische Kurve der Integralfäche fest. Wir können daher für den Zeitpunkt $t = 0$ den Druckverlauf $p = f(x)$ vorschreiben. Damit aber die oben erwähnte Einschränkung erfüllt werden kann, muss $p = f(x)$ im Punkt ($t = 0$, $x = l$) den Wert $p(l) = p_0$ annehmen und dort eine horizontale Tangente besitzen. Ausserdem muss $f(x)$ stetig und differenzierbar sein.

Um der Wirklichkeit möglichst nahe zu kommen, wählen wir als Randbedingung folgende Funktion:

$$\text{für } t = 0: p = f(x) = (p_2 - p_0) \cdot \left(\frac{x - l}{l} \right)^2 + p_0. \quad (33)$$

(vgl. Fig. 6)

Diese Funktion erfüllt alle notwendigen Bedingungen:
für $x = 0$ (Anode): $p = p_2 =$ Druck bei der Anode vor Beginn des Ausströmens.

$x = l$ (Hülsenmündung): $p = p_0 =$ Druck im Mutatorgehäuse.

$x = l$: $dp/dx = 0$

¹⁾ Die Untersuchung und die Lösung dieser Gleichung verdanke ich Herrn dipl. math. Otto Kihm in Zürich. Ich möchte es nicht versäumen, meinem ehemaligen Studienkollegen auch an dieser Stelle dafür aufs herzlichste zu danken.

Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (31) ergibt sich sofort zu:

$$p = -c \cdot a^2 \cdot t + a \cdot x + \Phi(a). \quad (34)$$

Darin bedeutet a eine Konstante und $\Phi(a)$ eine willkürliche Funktion. c hat den Wert (32). Wir schreiben das allgemeine Integral zweckmässig in etwas anderer Form:

$$V = p + c \cdot a^2 \cdot t - a \cdot x - \Phi(a) = 0. \quad (35)$$

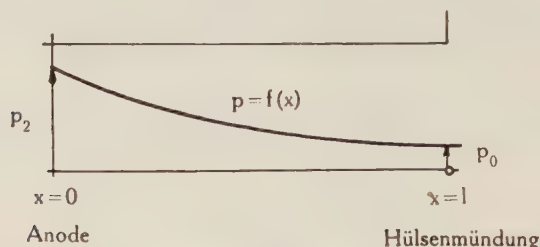


Fig. 6.

Druckverlauf längs der Anodenhülse zu Beginn des Ausströmens.

Die willkürliche Funktion $\Phi(a)$ ist so zu bestimmen, dass die Integralfläche die gegebenen Randbedingungen erfüllt. Zu diesem Zweck schreiben wir die Randbedingung (33) in Parameterdarstellung:

$$\left. \begin{aligned} t &= 0 \\ x &= \lambda \\ p &= (p_2 - p_0) \left(\frac{\lambda - l}{l} \right)^2 + p_0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

setzen sie in das allgemeine Integral (35) ein:

$$U = (p_2 - p_0) \left(\frac{\lambda - l}{l} \right)^2 + p_0 + 0 - a\lambda - \Phi(a) = 0 \quad (37)$$

und differenzieren diesen Ausdruck nach λ :

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 2(p_2 - p_0) \left(\frac{\lambda - l}{l^2} \right) - a = 0. \quad (38)$$

Durch Elimination von λ aus (37) und (38) erhalten wir den gesuchten Ausdruck für $\Phi(a)$:

$$\Phi(a) = p_0 - al - \frac{1}{4} \frac{a^2 l^2}{(p_2 - p_0)}. \quad (39)$$

Mit diesem Ausdruck für $\Phi(a)$ nimmt das allgemeine Integral (35) folgende Form an:

$$V = p + ca^2t - ax - p_0 + al + \frac{1}{4} \frac{a^2 l^2}{(p_2 - p_0)} = 0. \quad (40)$$

Die Konstante a erhalten wir durch Differenzieren von (40) nach a zu

$$a = \frac{2(x-l)(p_2 - p_0)}{l^2 + 4ct(p_2 - p_0)}, \quad (41)$$

Setzen wir diesen Wert in das Integral (40) ein und lösen wir nach p auf, so finden wir die gesuchte Lösung der Differentialgleichung.

$$p = p_0 + \frac{(x-l)^2(p_2 - p_0)}{l^2 + 4ct(p_2 - p_0)}. \quad (42)$$

Wie eine Kontrolle zeigt, genügt diese Funktion wirklich der Gleichung (31) und der Randbedingung (33), es ist also die gesuchte Lösung.

Für die numerische Berechnung ist es zweckmässig, eine Zeit t_c einzuführen, in der der Druck an der Anode vom Wert p_2 auf einen bestimmten Wert p^* gesunken ist. Sie ergibt sich aus (42), wenn man $x = 0$ und $p = p^*$ setzt. Führen wir zugleich für c den Wert (32) ein, wobei wir an Stelle von η' , genauer η'_{aus} schreiben, so erhalten wir:

$$t_c = \frac{2 \eta'_{\text{aus}} \cdot l^2 (p_2 - p^*)}{r^2 \cdot (p_2 - p_0) (p^* - p_0)}. \quad (43)$$

Zahlenbeispiel:

Wir berechnen die Zeit, die verstreicht bis der Überdruck an der Anode gegenüber dem Mutatorzylinder auf die Hälfte gesunken ist.

$$\begin{aligned} p_0 &= 25 \text{ Dyn/cm}^2 \\ p_2 &= 5 p_0 = 125 \text{ Dyn/cm}^2 \\ p^* &= 3 p_0 = 75 \text{ Dyn/cm}^2. \end{aligned}$$

Für alle anderen Grössen des Ausdruckes (43) verwenden wir die weiter oben schon benützten Werte und erhalten:

$$t_c \cong 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

Weiter ergibt sich, dass der Überdruck an der Anode in

$$t_c \cong 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

auf $1/10$ seines maximalen Wertes sinkt.

Zusammenfassend stellen wir die Rechnungsergebnisse in der Fig. 7 graphisch zusammen. Während der Zeit t_a erfolgt die Erhitzung des Hg-Dampfes und damit die Drucksteigerung in der Anodenhülse. Der folgende Abschnitt t_b stellt die Zeit dar, in der

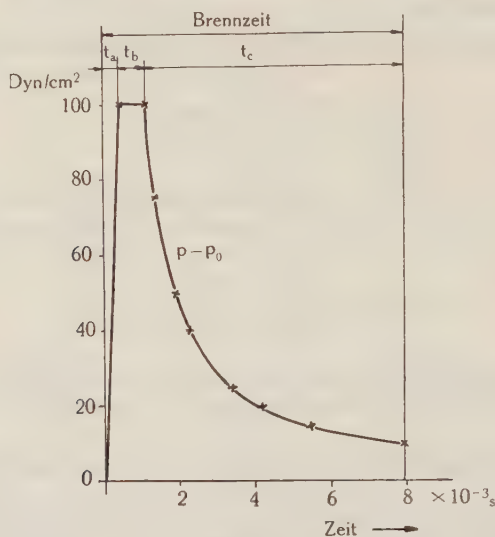


Fig. 7.

Berechneter Verlauf des Überdruckes in der Nähe der Anode während der Brennzeit.

t_a = Druckanstieg infolge Erwärmung des Hg-Dampfes.

t_b = Ausbildung des Druckgefälles längs der Anodenhülse.

t_c = Druckabnahme als Folge des Ausströmens.

1 $\text{Dyn/cm}^2 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$.

Die eingezeichnete Dauer der Brennzeit entspricht den Verhältnissen bei Verwendung einer Saugdrosselspule.

sich das Druckgefälle über die ganze Anodenhülse ausbreitet, worauf in der Zeit t_c der Überdruck an der Anode als Folge des Ausströmens sinkt. Am Ende der Brennzeit hat sich der Druck im Anodenraum wieder beinahe dem Druck im Kathodenraum angeglichen.

B. Das Einströmen.

1. Der Rechnungsgang.

Auch das Einströmen zerlegen wir in einzelne Teile und berechnen diese für sich. Mit dem Erlöschen des Anodenstromes hört die Energiezufuhr zum Quecksilberdampf in der Hülse auf. Dieser kühlt sich in der folgenden Sperrperiode auf die Temperatur der Anode und der Hülswand ab. Da sich der Druck in der Anodenhülse und derjenige im Mutator-Zylinder während der Brennzeit durch das Ausströmen praktisch vollkommen ausge-

glichen haben, entsteht nun durch die Abkühlung in der Anodenhülse ein Unterdruck. Das dadurch bewirkte Einströmen berechnen wir ganz entsprechend wie das Ausströmen. Wir teilen es auf in die Ausbildung des Druckgefälles und in die Druckzunahme an der Anode infolge des Einströmens.

2. Das Abkühlen des Quecksilberdampfes in der Anodenhülse zu Beginn der Brennzeit.

Das Abkühlen des Hg-Dampfes erfolgt zur Hauptsache durch Wärmeleitung an die umgebenden Wände. Die Wärmestrahlung kann vernachlässigt werden, da das Emissionsvermögen verdünnter Gase verschwindend klein gegenüber der Wärmeleitung ist.

Die Differential-Gleichung für die Wärmeleitung lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (44)$$

wobei u die Temperatur und

$$b^2 = \frac{\kappa}{\varrho \cdot c_v} \quad (45)$$

das Verhältnis, aus dem Koeffizienten der Wärmeleitfähigkeit κ und der Dichte ϱ multipliziert mit der spezifischen Wärme c_v bedeuten.

Für unser Problem wäre es zweckmässig, Zylinder-Koordinaten einzuführen, doch führt uns das zu einer partiellen Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten. Da ihre Auflösung grössere Schwierigkeiten bereitet, berechnen wir die Abkühlung einer mit Hg-Dampf gefüllten Kugel. Ihre Wand soll die Temperatur der Anoden-Hülse besitzen und ihr Durchmesser gleich dem Hülsendurchmesser sein. Führen wir die Rechnung für dieses vereinfachte Modell der Anodenhülse durch, so erhalten wir eine Vorstellung über die Zeit, in der sich der Hg-Dampf in der Sperrperiode abkühlt.

Wir führen Kugel-Koordinaten ein, deren Anfangspunkt legen wir in den Kugelmittelpunkt und nehmen an, dass die Temperatur nur von der Zeit t und der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt abhängt. Unter diesen Umständen erhält die Wärmeleitungsgleichung die Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right]. \quad (46)$$

Auch diese partielle Differential-Gleichung hat nicht konstante Koeffizienten. Sie kann aber durch die Substitution

$$r \cdot u = y \quad (47)$$

in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten übergeführt werden¹⁾. Wenn wir beachten, dass r unabhängig von t ist, dass also $\partial r / \partial t = 0$ ist, so erhalten wir an Stelle von (46) die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = b^2 \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}. \quad (48)$$

Damit ihre Lösung den physikalischen Sachverhalt wiedergibt, müssen wir die Randbedingungen richtig wählen. Zur Zeit $t = 0$ besteht eine Temperaturverteilung über den Kugeldurchmesser derart, dass die Temperatur vom Kugelmittelpunkt an zuerst langsam und dann rascher abnimmt. Vgl. Fig. 8.

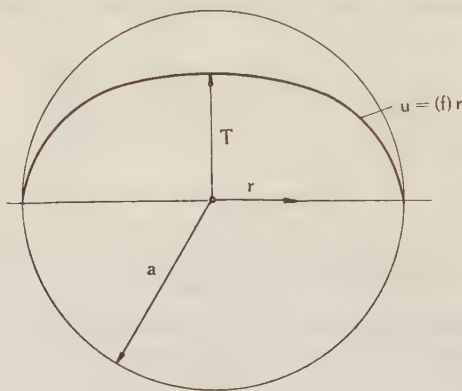


Fig. 8.

Ersatzbild der Anodenhülse für die Berechnung der Abkühlung des Hg-Dampfes. $u = f(r)$ — Temperaturverlauf über den Kugeldurchmesser zu Beginn der Sperrzeit.

In der Kugelmitte soll die Temperatur $T = T_2 - T_1$ betragen, also gleich der Temperaturdifferenz zwischen erhitztem Hg-Dampf und Anodenhülse sein. Die Temperatur der Kugelwand hingegen soll unabhängig von der Zeit $= 0$ sein. Als Randbedingungen wählen wir folgende

$$\text{für } t = 0 : y = u \cdot r = r \cdot T \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^i \right] \quad (49)$$

wobei i eine Zahl ist, die wir für die Ausrechnung $= 3$ setzen.

$$\text{für } r = a : y = 0 \quad (50)$$

$$\text{für } r = 0 : y = 0. \quad (51)$$

¹⁾ B. RIEMANN, Partielle Differential-Gleichungen. Unveränderter Neu-
druck der 3. Auflage (1882), S. 152.

Eine partikuläre Lösung der partiellen Differential-Gleichung (48) ergibt sich sofort zu:

$$y = e^{-b^2 \lambda^2 t} \cdot \sin \lambda r^1) \quad (52)$$

Sie erfüllt die Bedingung (51). Um (50) zu erfüllen, muss $\lambda \cdot a = n\pi$ sein, wobei n eine ganze Zahl ist, also

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \quad (53)$$

Die allgemeine Lösung erhalten wir, indem wir die partikuläre Lösung mit einer vorläufig noch unbestimmten Konstanten k_n multiplizieren, der Reihe nach $n = 1, 2, 3 \dots$ setzen und summieren

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot e^{-b^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{a} r\right). \quad (54)$$

Die Koeffizienten k_n müssen so bestimmt werden, dass die Bedingung (49) erfüllt ist:

$$\text{für } t = 0: \quad y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \left(\frac{n\pi}{a} r\right) \cdot r \cdot T \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^i\right]. \quad (55)$$

Zu diesem Zweck zerlegen wir die rechte Seite ebenfalls in eine unendliche Reihe für das Intervall von $-a$ bis $+a$ und erhalten so:

$$k_n = \frac{2}{a} \int_0^a v \cdot T \cdot \left[1 - \left(\frac{v}{a}\right)^i\right] \sin \left(\frac{n\pi}{a} v\right) dv. \quad (56)$$

Dividieren wir (54) durch r und setzen den Wert für k_n ein, so finden wir die gesuchte Lösung der Differential-Gleichung (46).

$$u = \frac{2}{a \cdot r} T \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{a} r\right) \int_0^a v \left[1 - \left(\frac{v}{a}\right)^i\right] \sin \left(\frac{n\pi}{a} v\right) dv. \quad (57)$$

Für $i = 3$ berechnen wir das Integral und erhalten als Lösung

$$u = \frac{24 \cdot T \cdot a}{r \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot \left(\frac{2}{n^5 \pi^2} - \frac{1}{n^3} \right) - \frac{2}{n^5 \pi^2} \right] \cdot e^{-b^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{a} r\right). \quad (58)$$

Für die numerische Berechnung genügt es, wenn wir nur das erste Glied der Summe nehmen. Wir erhalten so als erste Näherung

$$u = \frac{0,46 \cdot T \cdot a}{r} \cdot e^{-\frac{b^2 \pi^2 t}{a^2}} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{a} r\right). \quad (59)$$

*) B. RIEMANN, l. c. S. 144.

Zahlenbeispiel:

Für die numerische Berechnung benötigen wir die Kenntnis des Koeffizienten der Wärmeleitfähigkeit κ . Wir berechnen ihn für eine mittlere Temperatur von 3000°K nach der Formel

$$\kappa = \frac{C_v \cdot \bar{c}}{4 \pi L \bar{D}^2} \quad 1) \quad (60)$$

wobei \bar{c} aus Gleichung (7) entnommen wird. Für die Molwärme C_v setzen wir 3 cal/mol , für den Atomdurchmesser $D = 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ und erhalten so

$$\kappa = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ cal/cm sec Grad}.$$

Die Berechnung der Abkühlung des Hg-Dampfes führen wir nun mit folgenden Daten durch.

$$T = 4000^\circ \text{K}, \quad r = \frac{a}{2}, \quad a = 10 \text{ cm}$$

$$\varrho = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ gr/cm}^3, \quad c_v = 0,015 \text{ cal/gr Grad}$$

$$b^2 = \frac{\kappa}{\varrho \cdot c_v} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$

Setzen wir in Gleichung (59) $u = T/10$, so erhalten wir für die Zeit, die verstreicht, bis die Temperatur des Hg-Dampfes in der Hülse infolge Wärmeleitung auf $1/10$ des maximalen Wertes gesunken ist:

$$t_a' = 2 \cdot 10^{-4} \text{ sec}.$$

3. Die Ausbildung des Unterdruckes in der Anodenhülse.

Am Ende der Brennzeit herrscht in der Anodenhülse der gleiche Druck p_0 wie im Mutatorgehäuse. Wir nehmen an, dass kein Hg-Dampf während der Abkühlung des Hülseinhaltendes von T_2 auf T_1 in die Anodenhülse hineinströmt. In der Anodenhülse entsteht daher der Druck

$$p_1 = \frac{T_1}{T_2} \cdot p_0. \quad (61)$$

Für $T_1 = 1000^\circ \text{K}$, $T_2 = 5000^\circ \text{K}$ und $p_0 = 0,02 \text{ mm Hg}$ ergibt sich

$$p_1 = \frac{p_0}{5} = 0,004 \text{ mm Hg}.$$

In der Anodenhülse entsteht also zu Beginn der Sperrzeit ein Unterdruck gegenüber dem Mutatorgehäuse von $0,016 \text{ mm Hg}$.

*) Joos, l. c. S. 479.

4. Das Einstürmen.

Die Berechnung kann ganz entsprechend wie für das Ausströmen durchgeführt werden. Der Einfluss der Gleitung der Gaschicht an der Rohrwand wurde schon auf S. 281 durch Einführung des korrigierten Koeffizienten der inneren Reibung η' berücksichtigt.

Für die Zeit t_b' , in der sich das Druckgefälle über die Anodenhülse ausbildet, ergibt sich entsprechend Formel (17) der Ausdruck:

$$t_b' = \frac{2 \cdot \eta'_{\text{ein}} \cdot l^2}{r^2 (p_0 - p_1)}. \quad (62)$$

Mit den Zahlenwerten $l = 50$ cm, $r = 10$ cm, $\eta'_{\text{ein}} = 3,5 \cdot 10^{-4}$ gr/cm sec, $p_0 = 25$ Dyn/cm², $p_1 = p_0/5$ erhalten wir:

$$t_b' = 8,7 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$$

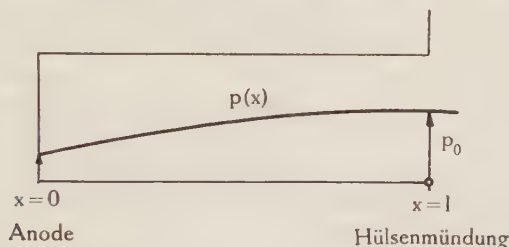


Fig. 9.

Druckverlauf längs der Anodenhülse zu Beginn des Einstürmens.

Für das nachfolgende Einstürmen erhalten wir die der Gleichung (30) entsprechende partielle Differential-Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = + \frac{r^2}{8 \eta'} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2. \quad (63)$$

Als Randbedingungen wählen wir ganz analog wie oben:

$$\text{für } t = 0 \quad p = (p_0 - p_1) \cdot \left[1 - \left(\frac{l-x}{l} \right)^2 \right] + p_1. \quad (64)$$

(vgl. Fig. 9.)

Diese Funktion erfüllt die für die Lösbarkeit der Gleichung (63) notwendigen Bedingungen:

$$\text{für } x = l : p = p_0 = \text{konst}$$

und

$$\frac{dp}{dx} = 0.$$

Die Durchrechnung ergibt als Resultat:

$$p(x, t) = p_0 - \frac{(p_0 - p_1)(l - x)^2}{l^2 + \frac{r^2 t}{2\eta'} \cdot (p_0 - p_1)}. \quad (65)$$

Daraus folgt für die Zeit t_c' , die verstreicht bis der Druck an der Anode vom Wert p_1 auf einen bestimmten Wert p^* gestiegen ist, der Ausdruck:

$$t_c' = \frac{2\eta'_{\text{ein}} \cdot l^2 \cdot (p^* - p_1)}{r^2 (p_0 - p^*) (p_0 - p_1)}. \quad (66)$$

Zahlenbeispiel:

Mit den oben benützten Werten erhält man für die Zeit, in der der Unterdruck an der Anode sich zur Hälfte ausgeglichen hat

$$t_c' = 8,7 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$$

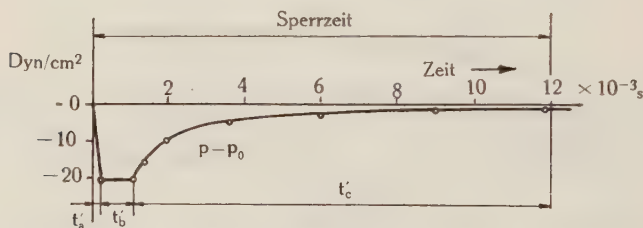


Fig. 10.

Berechneter Verlauf des Unterdruckes in der Nähe der Anode während der Sperrzeit.

t_a' = Entstehung des Unterdruckes infolge der Abkühlung des Hg-Dampfes.

t_b' = Ausbildung des Druckgefälles längs der Anodenhülse.

t_c' = Druckzunahme als Folge des Einströmens.

$$1 \text{ Dyn/cm}^2 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg.}$$

Die eingezeichnete Dauer der Sperrzeit entspricht den Verhältnissen bei Verwendung einer Saugdrosselspule.

Die graphische Darstellung der Rechnungsergebnisse gibt Fig. 10. In der Zeit t_a' entsteht in der Anodenhülse infolge der Abkühlung des Hg-Dampfes ein Unterdruck gegenüber dem Mutatorgehäuse. Die Ausbildung des Druckgefälles von der Hülsenmündung bis zur Anode benötigt die Zeit t_b' . In der darauffolgenden Zeitperiode t_c' steigt der Druck an der Anode infolge des Einströmens. Schon in der Mitte der Sperrperiode ist das Einströmen zum grössten Teil beendet. Nachher erfolgt nur noch ein langsamer Druckanstieg.

III. Experimentelle Untersuchungen.

A. Die Messmethode und die Versuchseinrichtung.

Die Versuche wurden an sechsanodigen Mutatoren mittlerer Grösse von 1500 A Nennstromstärke durchgeführt. Da der Quecksilberdampf im Mutator in jeder Sekunde 50mal aus der Anodenhülse heraus- und wieder hineinströmt, muss zur Untersuchung dieser Erscheinungen eine praktisch trägheitslose Methode verwendet werden. Wir wählten dazu die oszillographische Untersuchung der Ströme positiver Ionen auf eine sich nahe der Anode befindende, negativ aufgeladene Sonde¹⁾. Die Dichte dieses Ionen-Stromes lässt sich auf Grund der kinetischen Gastheorie berechnen zu $i = \frac{1}{4} n^+ e v$. Dabei bedeuten n^+ die Zahl der positiven Ionen pro cm^3 , e die Elementarladung und v den linearen Mittelwert der Ionengeschwindigkeit im Plasma der Entladung. Bei zeitlich unverändertem Anodenstrom bleibt die Ionendichte annähernd konstant. Das Gleiche kann über die Ionengeschwindigkeit gesagt werden, vorausgesetzt, dass keine äusseren Einflüsse, wie z. B. Dampfströmungen oder äussere Magnetfelder vorhanden sind. Der Sondenstrom ist dann in erster Näherung proportional dem Anodenstrom, d. h. dem Strom, der das Plasma erzeugt und aufrecht erhält. Eine Beeinflussung der Ionen-Geschwindigkeit durch äussere Einflüsse bewirkt eine Veränderung der Kurvenform des Sondenstromes gegenüber der des Anodenstromes. Erfolgt eine Dampfströmung von der Anode weg, so sinkt der Sondenstrom auch bei gleichbleibendem Anodenstrom; eine Strömung auf die Anode zu bringt entsprechend mehr Ionen, der Sondenstrom steigt in diesem Fall²⁾.

Diese Erscheinungen kommen natürlich nur richtig zum Vorschein, wenn der Ionenstrom auf die Sonde unverfälscht über die Messschleife des Oszillographen fließen kann. Verwendet man im Aussenkreis der Sonde zu kleine Spannungen oder unpassende Widerstände, so bewirken die an diesen auftretenden Spannungsabfälle eine Verringerung des negativen Potentials der Sonde gegenüber ihrer Umgebung. Wenn dieses einen Wert von weniger als ca. 25 Volt erreicht, so gelangen ausser den positiven Ionen Elek-

¹⁾ Die Theorie der negativen Sonden in elektrischen Vakuum-Entladungen wurde von J. LANGMUIR und H. MOTT-SMITH behandelt, Gen. Electr. Rev. 1924, S. 449ff. (Vgl. z. B. auch A. v. ENGEL und M. STEENBECK. Elektrische Gasentladungen, ihre Physik und Technik 1932 und 1934.)

²⁾ Eine Beeinflussung von Ionenströmen durch Dampfströmungen wurde schon vor Jahren beobachtet. Vgl. W. SCHOTTKY und J. v. ISSENDORFF, Z. f. Phys. 31, 163 (1925); J. v. ISSENDORFF, ETZ 50, 1085 (1929).

tronen grosser Geschwindigkeit auf die Sonde. Unsere oben dargelegten Überlegungen wären unter diesen Umständen kaum mehr allgemein gültig.

Es erwies sich daher als zweckmässig, die Erscheinungen während der Brennzeit und die während der Sperrzeit getrennt zu untersuchen. Während der Brennzeit ist die Ionendichte im Plasma des Anodenstromes gross. Wir wählten daher eine kleine Sonde, die wir ohne Begrenzungswiderstand an eine Spannungsquelle legten.

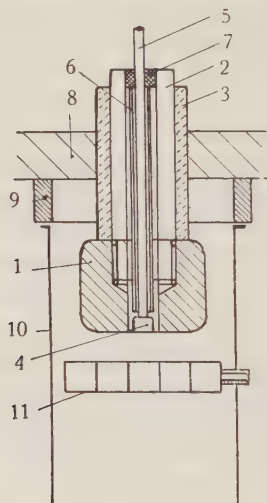


Fig. 11.

Schematischer Schnitt durch eine Versuchsanode.

1 Anode, 2 Anodeneinführung, 3 Anodenisolator, 4 Sonde, 5 Sondeneinführung, 6 Sondenisolator, 7 Dichtung, 8 Mutatorgehäuse, 9 Hülsenisolator, 10 Anodenhülse, 11 Gitter (isoliert von der Hülse).

Als Sonden wurden kleine, ebene Elektroden verwendet, die in den gegen die Kathode zu gelegenen Flächen der Anoden eingebaut wurden. Aus Fig. 11 erkennt man, dass die Sonden von den Anoden isoliert sind, und so unabhängig von der Anodenspannung gesteuert werden können. Die Schaltung zur oszillographischen Aufnahme des Sondenstromes zeigt Fig. 12.

In der Sperrzeit sind die Verhältnisse anders. Da kein Lichtbogen zur betrachteten Anode brennt, sind keine Ladungsträger in der Hülse vorhanden, die als Indikatoren für Dampfströmungen dienen könnten, ausser den von der vorhergehenden Brennzeit zurückbleibenden Ladungsträgern. Diese verschwinden durch Abdiffundieren an die umgebenden Wände mehr oder weniger rasch. Der in die Hülsen hineinströmende Hg-Dampf bringt nun aber

neue Ladungsträger von den zu anderen Anoden brennenden Lichtbögen her mit sich. Die Dichte dieser einströmenden Ladungsträger ist beträchtlich kleiner als die Dichte im Lichtbogen. Aus diesem Grunde erwies es sich als notwendig, zur Auffangung dieser Ionen Sonden mit grossen Oberflächen zu verwenden. Wir benützten zu diesem Zweck das der Kathode am nächsten gelegene Gitter. Die Verhältnisse werden dadurch etwas kompliziert, weil man dieses Gitter nicht dauernd auf negativer Spannung halten

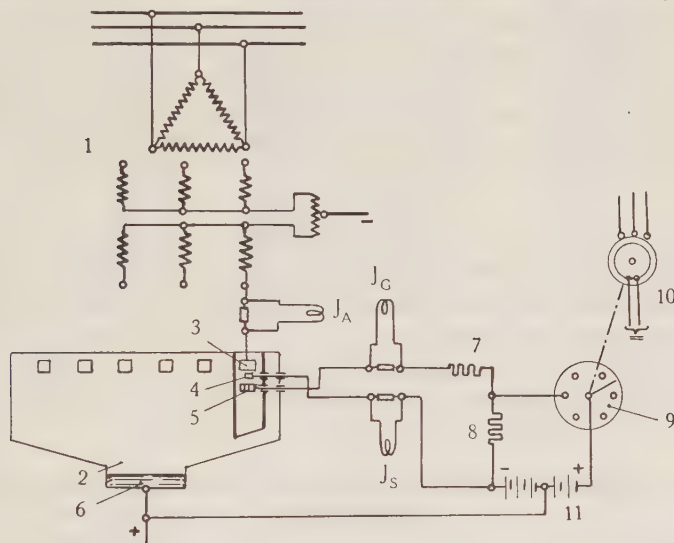


Fig. 12.

Prinzipielle Schaltung der Versuchseinrichtung.

1 Mutatortransformator mit Saugdrosselspule, 2 Mutator, 3 Anode, 4 Sonde, 5 Gitter, 6 Kathode, 7 Gitterwiderstand, 8 Ableitwiderstand, 9 Rotierender Kontaktapparat, 10 Synchronmotor, 11 Gleichspannungsquelle.

J_A — Oszillographen-Schleife mit Shunt zum Oszillographieren des Anodenstromes.

J_S — Oszillographen-Schleife mit Shunt zum Oszillographieren des Sondenstromes.

J_G — Oszillographen-Schleife mit Shunt zum Oszillographieren des Gitterstromes.

kann, sondern in jeder Periode kurzzeitig positiv steuern muss, um ein Zünden des Anodenstromes zu ermöglichen. Das geschah in bekannter Weise mit Hilfe eines rotierenden Kontaktapparates. Die Schaltung ist schematisch in Fig. 12 dargelegt. Durch passende Wahl der Gitterwiderstände und Spannungen konnte erreicht werden, dass während des grössten Teiles der Sperrzeit der Ionenstrom auf das negative Gitter durch die äusseren Schaltungselemente nicht beeinflusst wurde. Nur unmittelbar nach der Brennzeit erfolgt eine Begrenzung des Ionenstromes auf das Gitter durch den äusseren Gitterwiderstand.

Zur oszillographischen Aufnahme der Ionen-Ströme wurde ein Schleifen-Oszillograph ohne Vorschaltwiderstände, unter Benützung eines Shuntes verwendet. Auf allen Oszillogrammen wurde gleichzeitig der Anodenstrom der betreffenden Phase aufgezeichnet. Kontrollversuche mit einem Zweistrahl-Kathodenstrahloszillographen bestätigten die Versuchsergebnisse.

Während der ausgedehnten Versuche wurde die Kühlwassertemperatur des Mutators von 20—90° und die Stromstärke von 100—3000 A variiert. Der verwendete Mutator-Transformator hatte eine Phasenspannung von 60 V. Die Versuche wurden zum Teil mit und zum Teil ohne Saugdrosselspule durchgeführt. Durch Veränderung der Zündpunktlage mit Hilfe des Kontaktgebers erfolgte in bekannter Weise eine Regulierung der Gleichspannung.

B. Versuchsergebnisse.

Aus dem umfangreichen Beobachtungsmaterial greifen wir die Versuchsreihen über den Einfluss der Spannungsregulierung und der Phasenlage der Anoden heraus¹⁾. Die Gleichstromstärke betrug bei Verwendung einer Saugdrosselspule 1500 A, d. h. der Scheitelwert des Anodenstromes erreichte 750 A. Die Mutatortemperatur war 50—60° C.

1. Untersuchung der Dampfströmungen während der Brennzeit des Anodenstromes.

Fig. 13—15 zeigen oszillographische Aufnahmen des Sondenstromes J_s und des Anodenstromes J_A für verschieden starke Spannungsregulierungen. Man erkennt daraus, dass der Sondenstrom eine charakteristische, sattelförmige Kurvenform aufweist, obschon der Anodenstrom während des grössten Teiles der Brennzeit zeitlich konstant ist. Das rührt daher, dass die aus der Hülse herausströmenden Hg-Atome den Hg-Ionen durch Stösse eine Geschwindigkeitskomponente in der Richtung auf die Hülsenmündung erteilen. Als Folge davon sinkt der Sondenstrom und es bildet sich so die Spitze aus. Diese zeigt also den Zeitpunkt des Einsetzens des Ausströmens an. In der Zeit vom Erreichen dieser Spitze bis zum Minimum ist die Behinderung des Sondenstromes am stärksten und damit das Ausströmen am intensivsten. Nachher klingt dieses langsam ab, so dass der Sondenstrom wieder ansteigen kann.

¹⁾ In der Arbeit I sind Oszillogramme des Sondenstromes wiedergegeben, bei denen die Stromstärke und die Brennzeit des Anodenstromes variiert wurden.

Die Fig. 13—15 zeigen den Einfluss der Spannungsregulierung auf den Anoden- und den Sondenstrom, wenn alle Versuchsdaten konstant gehalten werden. Die Zeitdauer der Überlappung, d. h. des Stromüberganges von einer Anode auf die nächstfolgende wird um so kleiner, je mehr die Spannung herunterreguliert wird.

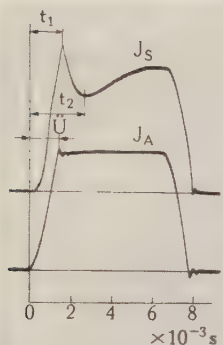


Fig. 13.

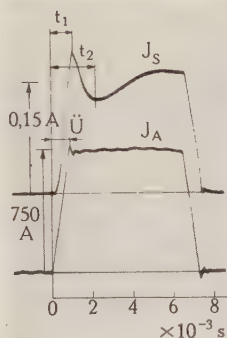


Fig. 14.

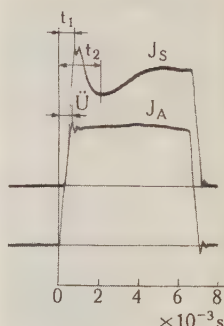


Fig. 15.

Gleichspannung 100%.

Gleichspannung 95%.

Gleichspannung 70%.

Fig. 13—15: Oszillogramme des Anodenstromes J_A und des Sondenstromes J_S für verschieden starke Regulierung der Gleichspannung.

Als Folge davon wird der Hg-Dampf in der Hülse rascher erhitzt und das Ausströmen beginnt früher, wie die auf Seite 278 durchgeführten Rechnungen ergaben. Die in Tab. 2 wiedergegebene Ausmessung der Oszillogramme bestätigt diese Auffassung.

Die Spitze des Sondenstromes tritt ungefähr dann auf, wenn der Anodenstrom seinen Scheitelwert erreicht hat:

$$t_1 - \ddot{u} = \text{ca. } 1 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

Tabelle 2.

Ausmessung der Oszillogramme des Sondenstromes für verschieden starke Spannungsregulierung (Fig. 13—15).

Gleichstrom = 1500 A, Temperatur des Kühlwassers = ca. 55° C.

Fig.	Gleichspannung in %	Überlappung \ddot{u}	Zeitpunkt der Sondenstromspitze t_1	Zeitpunkt des Sondenstromminimums t_2	Zeitdauer des hauptsächlichsten Ausströmens $t_2 - t_1$
13	100%	$14,3 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$	$15,4 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$	$27,5 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$	$12,1 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$
14	95%	8,8	9,8	22	12,2
15	70%	5,8	7,0	21	14

t_1 und t_2 sind vom Einsetzen des Anodenstromes an gezählt.

Eine Verkürzung der Zeitdauer des Anodenstromanstieges bewirkt also auch ein entsprechendes Vorverlegen des Beginnes des Ausströmens. Das Ausströmen selbst wird dadurch nicht wesentlich beeinflusst: die Zeitdauer des intensivsten Ausströmens ($t_2 - t_1$) ist praktisch unabhängig vom Grad der Spannungsregulierung.

2. Untersuchung der Dampfströmungen während der Sperrzeit.

Ist der Mutator in der üblichen Weise an den Transformator angeschlossen, so führen die Anoden in der Reihenfolge $U, W_A, V, U_A, W, V_A, U$ Strom. Aus der Fig. 16 erkennt man, dass sich

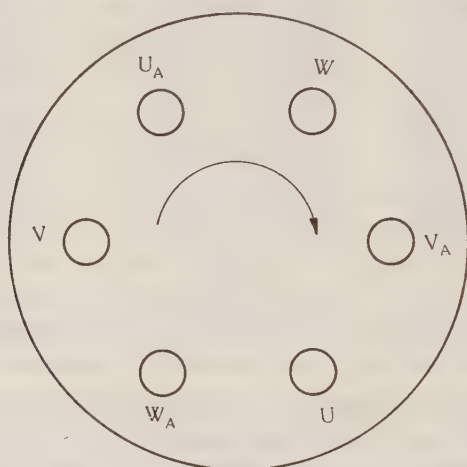


Fig. 16.

Anordnung der Anoden auf der Anodenplatte.

Der Pfeil gibt die Reihenfolge der sich in der Stromführung ablösenden Anoden an.

einander benachbarte Anoden in der Stromführung ablösen. Unter diesen Umständen nimmt der Gitterstrom des Ventils V die Form der Fig. 17 an: Unmittelbar nach dem Erlöschen des Anodenstromes ist der Gitterstrom kurze Zeit widerstandsbegrenzt. Dann beginnt er zu sinken; der Ionenstrom auf das Gitter wird durch die äusseren Schaltungselemente von diesem Moment an nicht mehr beeinflusst. Bevor der Gitterstrom auf kleine Werte gesunken ist, bildet sich ein Maximum aus. Ganz am Ende der Sperrzeit steigt der Gitterstrom noch einmal etwas an. Der Buckel des Gitterstromes im ersten Teil der Sperrzeit rührt von den Ionen her, die durch den einströmenden Quecksilberdampf aus dem Kathodenraum in die Hülse hineingeführt werden. Er gibt also den Zeitpunkt des intensivsten Einströmens an. Nachher wird es allmählich verlangsamt. Gegen das Ende der Sperrzeit gelangt wieder etwas

mehr ionisierter Dampf in die Hülse hinein, da die benachbarte Anode W_A Strom führt und der aus ihrer Hülse Herausschliessende Hg-Dampf auf der Bodenplatte des Mutators umgelenkt und z. T. in die Hülse V hineingetrieben wird. Diese Deutung der Oszillogramme wird durch die folgenden Figuren belegt.

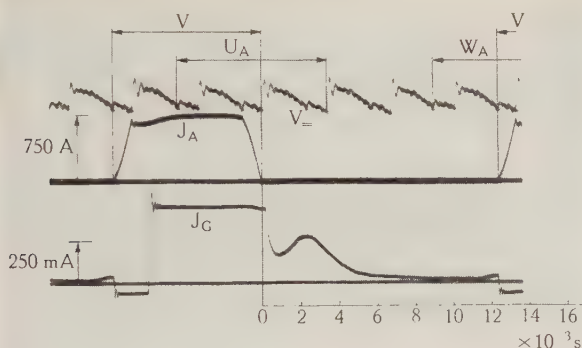


Fig. 17.

Die Nachbaranoden W_A und U_A brennen unmittelbar vor, resp. nach der Anode V .

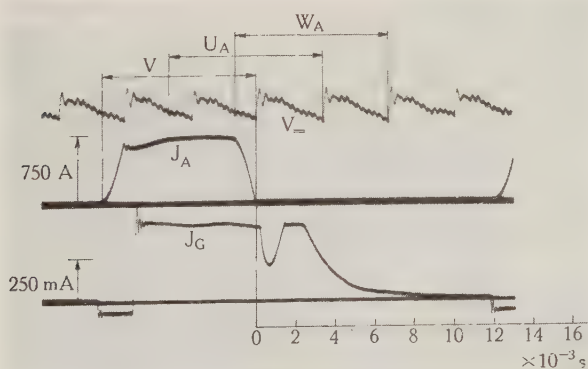


Fig. 18.

Beide Nachbaranoden U_A und W_A brennen in der ersten Hälfte der Sperrzeit von V .
Fig. 17 und 18: Oszillogramme des Gitterstromes eines Hochstrom-Mutators bei verschiedener Phasenlage der Nachbaranoden.

J_A = Anodenstrom. J_G = Gitterstrom. V = Gleichspannung des Mutators. Die Pfeile bezeichnen die Brennzeit der untersuchten Anode V und ihrer Nachbaranoden U_A und W_A . Der Mutator war für diese Versuche nur mit einem Gitter ausgerüstet.

In Fig. 18 brennen beide Nachbaranoden U_A , W_A am Anfang der Sperrzeit von V . In der Nähe der Hülsmündung brennen nun zwei Lichtbogen. Die Ionendichte ist daher dort sehr gross. Der Gitterstrom steigt aus diesem Grunde im ersten Teil der Sperrzeit so stark an, dass er für eine bestimmte Zeit durch den Aussen-

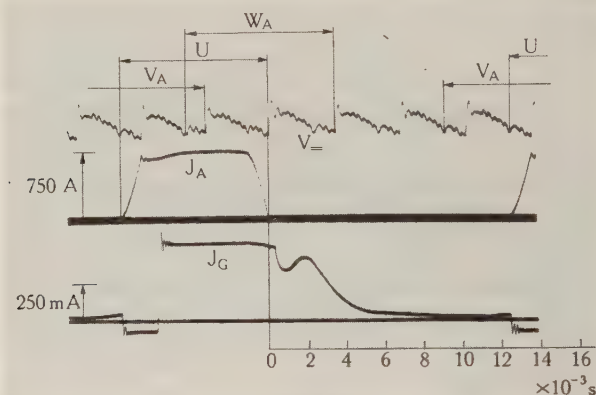


Fig. 19.

Die Nachbaranoden V_A und W_A brennen unmittelbar vor, resp. nach der Anode U .

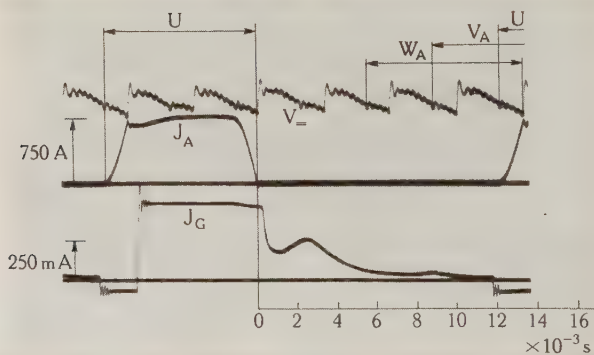


Fig. 20.

Beide Nachbaranoden V_A und W_A brennen in der 2. Hälfte der Sperrzeit von U .
Fig. 19 und 20: Oszillogramme des Gitterstromes eines Hochstrom-Mutators bei verschiedener Phasenlage der Nachbaranoden.

J_A = Anodenstrom. J_G = Gitterstrom. V_- = Gleichspannung des Mutators.
Die Pfeile bezeichnen die Brennzeit der untersuchten Anode U und ihrer Nachbaranoden V_A und W_A .

widerstand begrenzt wird. Das Ansteigen am Ende der Sperrzeit hingegen tritt nicht mehr auf. In Fig. 19 sehen wir den Gitterstrom der Phase U bei normaler Schaltung der Nachbaranoden. Das Bild ist im Prinzip das gleiche wie in Fig. 17. Schalten wir die Anode derart, dass beide Nachbaranoden W_A, V_A am Ende der Sperrzeit von U -Strom führen (Fig. 20), dann wird das Maximum im ersten Teil der Sperrzeit kleiner: In unmittelbarer Nähe der Hülsenmündung brennt in diesem Zeitpunkt ja kein Lichtbogen. Dafür tritt ein neuer kleinerer Buckel im zweiten Teil der Sperrzeit auf. Das Ansteigen am Schluss ist in diesem Fall nicht zu erkennen, da der positive Gitterimpuls etwas zu früh erteilt wurde.

Regulieren wir die Spannung bei normalem Anschluss der Anoden an den Transformator durch Verzögern des Zündpunktes, so wird die Überlappung kürzer, und damit die Sperrzeit entsprechend länger. Zudem setzt das Ausströmen während der Brennzeit früher ein. Die Wirkung auf das Einströmen zeigen die Fig. 21 und 22. Um die Erscheinungen am Ende der Sperrzeit besser erkennen zu können, wurde die Empfindlichkeit der Messschleife vergrößert. Dies bedingte eine entsprechende Begrenzung des Gitterstromes. Das Einströmen zu Beginn der Sperrzeit kommt nun nicht mehr deutlich zum Vorschein, da der Gitterstrom beinahe während $\frac{1}{3}$ der Sperrzeit widerstandsbegrenzt ist. Die Wirkung der Spannungsregulierung besteht in einem Vorverschieben des Gitterstrombuckels am Ende der Sperrzeit. Trägt man in Fig. 22 die Länge S_1 der Sperrzeit bei nicht regulierter Spannung ein (einfacher Pfeil), so erkennt man, dass die Verschiebung des Gitterstrombuckels nicht nur durch die Verlängerung der Sperrzeit, sondern zum Teil auch noch durch das rascher nach dem Zünden der Nachbaranode einsetzende Ausströmen zustande kommt. Vermindert man nämlich die Länge S_1 noch um die Differenz der Überlappungen $\dot{U}_1 - \dot{U}_2$ (Doppelpfeil), so nimmt der Gitterstrom bei regulierter Spannung praktisch genau die Form des Gitterstromes bei nicht regulierter Spannung (Fig. 21) an.

Die Ausmessung sehr vieler Oszillogramme ergab folgende Zeiten, gemessen vom Anfang der Sperrzeit an:

Minimum des Gitterstromes (das Einströmen beginnt sich am Gitter bemerkbar zu machen)	$8 - 10 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$
Buckel des Gitterstromes (Zeitpunkt des intensivsten Einströmens)	$17 - 23 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$
Gitterstrom auf kleine Werte gesunken (Einströmen stark verlangsamt). . .	$55 - 65 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$

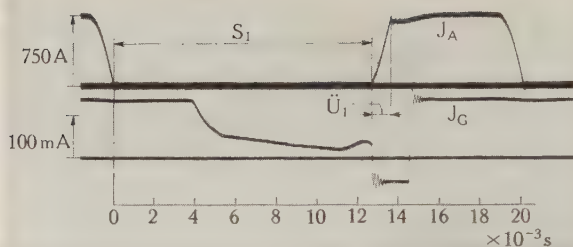


Fig. 21.

Gleichspannung = 100%.

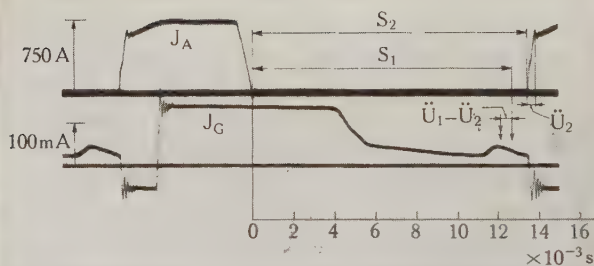


Fig. 22.

Gleichspannung = 86%.

Fig. 21 und 22: Oszillogramme des Anodenstromes J_A und des Gitterstromes J_G für verschieden starke Regulierung der Gleichspannung.

S_1, S_2 = Sperrzeiten. \ddot{u}_1, \ddot{u}_2 = Überlappungszeiten.

Die Nachbaranoden brennen in der üblichen Reihenfolge unmittelbar vor, resp. nach der untersuchten Anode.

IV. Vergleichung der Rechnungen mit den Versuchsergebnissen.

Die Rechnungsergebnisse wurden je in einem Oszillogramm der Brennzeit und der Sperrzeit eingezeichnet. Aus Fig. 23 ergibt sich, dass das Ausströmen nach der Rechnung etwas früher einsetzt als in Wirklichkeit. Das ist verständlich, da die Wärmeverluste während der Aufheizperiode für die Rechnung bewusst

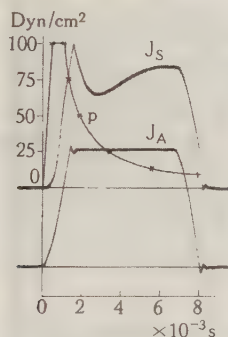


Fig. 23.

Das Ausströmen während der Brennzeit.

Vergleichung der Versuchsergebnisse mit den Rechnungen.

J_A = Anodenstrom

J_S = Sondenstrom

p = Berechneter Überdruck in der Nähe der Anode.

vernachlässigt werden. Zählt man die Zeit vom Einsetzen des Anodenstromes an, so sinkt der Überdruck nach der Rechnung in der Zeit zwischen $1,5$ und $3 \cdot 10^{-3}$ sec auf $\frac{1}{4}$ des Anfangswertes. In diesem Zeitabschnitt ist das Ausströmen wirklich so intensiv, dass die Diffusion der Ionen auf die Sonde zu gehemmt wird und der Sondenstrom als Folge davon sinkt. Mit abnehmender Intensität des Ausströmens ($t > 3 \cdot 10^{-3}$ sec) nimmt die Behinderung des Sondenstromes ab und dieser kann nach der Durchschreitung eines Minimums wieder ansteigen.

Das Einströmen beginnt nach der Rechnung ziemlich genau in dem Zeitpunkt, in dem der Gitterstrom (Fig. 24) wieder anzu- steigen beginnt. Der Gitterstrombuckel tritt in der Zeit zwischen 1 und $5 \cdot 10^{-3}$ sec (gezählt vom Anfang der Sperrperiode aus) auf. Die Rechnung ergibt für diesen Zeitabschnitt ein Ansteigen des Druckes um $\frac{4}{5}$. Damit ist sowohl nach der Rechnung, als auch nach den Versuchen das Einströmen zur Hauptsache beendet. In

der zweiten Hälfte der Sperrzeit strömt nur noch wenig Quecksilberdampf in die Anodenhülse hinein. .

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist also überraschend befriedigend. Es gelang, die sehr rasch pulsierenden Dampfströmungen, die durch die elektrischen Entladungen in den Anodenhülsen der Mutatoren auftreten, zu untersuchen.

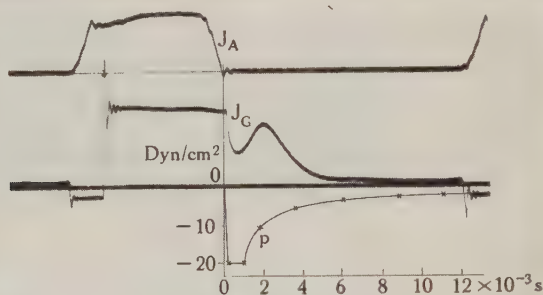


Fig. 24.

Das Einströmen während der Sperrzeit.

Vergleichung der Versuchsergebnisse mit den Rechnungen.

p = Berechneter Unterdruck in der Nähe der Anode

J_A = Anodenstrom

J_G = Gitterstrom.

Ihre Kenntnis ist von grosser praktischer Bedeutung für die Konstruktion und die Wahl der Betriebsbedingungen der Mutatoren. Wie in der früheren Arbeit ausgeführt wurde, können sich diese Dampfströmungen je nach den Umständen für das Betriebsverhalten günstig oder ungünstig auswirken. Letzteres ist z. B. der Fall bei relativ kleiner Dampfichte. Durch das Ausströmen wird die Dampfichte in der Anodenhülse während der Brennzeit weiter verringert und dadurch das Auftreten der gefürchteten Überspannungen begünstigt. Ist umgekehrt die Dampfichte gross, so wird dadurch auch der Anodenrückstrom und damit die Disposition der Anoden zu Rückzündungen grösser. Das Ausströmen wirkt diesen Tatsachen entgegen, indem es die Dampfichte gegen das Ende der Brennzeit zu verkleinert. Die Dampfströmungen können ferner Materienteilchen mit sich führen und so Zündsubstanzen von Orten, wo sie unschädlich sind, auf die Anode transportieren.

Entgegen der fast allgemein üblichen Anschauung ist es also möglich, auch komplizierte Vorgänge im Innern der Mutatoren experimentell einwandfrei zu untersuchen und rechnerisch zu erfassen.

Absorptionsspektren dreiatomiger Moleküle im Schumanngebiete

von P. Müller und M. Wehrli.

(13. III. 1942.)

Inhalt: Es werden die Absorptionsspektren der Dämpfe von TeCl_2 , TeBr_2 , HgF_2 und Hg(CN)_2 im Vakuumultraviolett untersucht und dabei einige neue Bandensysteme oder Kontinua festgestellt.

Das bekannte Bandensystem von TeCl_2 , das im Wellenlängengebiet 4700—6400 ÅE. liegt, gehört, wie in früheren Arbeiten¹⁾ hier gezeigt worden ist, zu einem teilweise verbotenen Elektronenübergang, bei dem die Elektroneneigenfunktion ihre Symmetrie relativ zur Symmetrieebene des Moleküls nicht ändert. Die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit ist nur 1/500 erlaubter Systeme. Es erschien deshalb interessant zu untersuchen, ob TeCl_2 nicht im Schumanngebiete andere Bandensysteme aufweist, die zu erlaubten Übergängen gehören, wie sie zum Beispiel bei den Quecksilberdihalogeniden beobachtet worden sind.

Der Dampf über TeCl_2 und TeBr_2 wurde mit einer kürzlich näher beschriebenen Versuchsmethodik²⁾, die bei raschem Auswechseln der Substanzen bis 1500 ÅE. zu messen gestattet, untersucht. Die Apparatur enthält ein mit Reinstickstoff gefülltes Absorptionsrohr, in welchem die Substanzen verdampft werden. Als Spektrographen gelangten der kleine Göttinger-Flußspat-Prismenspektrograph und das 1-m-Vakuumgitter unserer Anstalt zur Verwendung.

Ergebnisse: 1. TeCl_2 und TeBr_2 . Die Dämpfe dieser Substanzen zeigen tatsächlich drei neue Elektronenbandensysteme und ein Kontinuum, deren allgemeine Daten in Tabelle 1 zusammengestellt sind.

¹⁾ M. WEHRLI, *Helv. Phys. Acta* **9**, 208, 1936 und **11**, 339, 1938. Arbeiten I. M. WEHRLI und N. GUTZWILLER, *Helv. Phys. Acta* **14**, 307, 1941.

²⁾ P. MÜLLER, *Helv. Phys. Acta* **15**, 233, 1942.

Tabelle 1.

Spektren von TeCl_2 und TeBr_2 zwischen 2400 und 1600 ÅE.

Kurzwellige Bandensysteme				
Substanz	Erscheinungs- temperatur	Bereich in ÅE	Abschattie- rung	Zahl der Banden
TeCl_2	120° C	1680—1840	violett	13 z. T. diffus
TeBr_2	165°	1760—1900	?	16 diffus
Langwellige Systeme				
TeCl_2	145° C	2050—2200	violett	25 z.T. diffus
TeBr_2	225°	2100—2300		} Kontinuum
	255°	2000—2400		

Tabelle 2.

*Langwelliges Bandensystem von TeCl_2 .**Kanten oder langwellige Bandenränder.*

Nr.	Wellen- länge in ÅE	Wellen- zahl in cm	Int.	Bem.	Nr.	Wellen- länge in ÅE.	Wellen- zahl in cm	Int.	Bem.
1	2049,1	48802	0	dd	14	2131,5	46915	3	dd
2	2056,0	48638	1	dd	15	2138,6	46760	5	d
3	2061,7	48504	1	dd	16	2143,9	46644	3	dd
4	2067,4	48370	3	dd	17	2151,4	46481	2	dd
5	2073,2	48235	3	d	18	2158,1	46337	3	K
6	2079,6	48086	5	d	19	2163,5	46221	2	K
7	2084,6	47971	5	d	20	2168,9	46106	1	K
8	2091,8	47806	3	dd	21	2175,7	45962	2	K
9	2099,8	47624	3	dd	22	2181,2	45846	1	K
10	2105,4	47497	4	dd	23	2187,2	45721	0	d
11	2111,9	47351	5	d	24	2193,5	45589	0	K
12	2118,6	47201	5	d	25	2198,8	45479	0	dd
13	2124,5	47070	3	d					

K = violett abgeschattigte Kante, d = diffus, dd = sehr diffus,

Int. = geschätzte Intensität.

Tabelle 3.

Kurzwelliges System von TeCl_2 .

Kanten oder langwellige Bandenränder.

Nr.	Wellen- länge in ÅE	Wellen- zahl in cm^{-1}	Int.	Bem.	Nr.	Wellen- länge in ÅE	Wellen- zahl in cm^{-1}	Int.	Bem.
1	1687	59276	5	K d	8	1773	56402	0	dd
2	1699	58858	6	K s	9	1784	56053	3	dd
3	1711	58445	7	K s	10	1797	55648	3	dd
4	1723	58038	6	K s	11	1811	55218	3	dd
5	1736	57603	4	d	12	1825	54794	1	dd
6	1749	57175	2	dd	13	1837	54437	0	dd
7	1761	56786	0	dd					

K = violett abgeschattigte Kante, s = scharf, d = diffus, dd = sehr diffus,
Int. = geschätzte Intensität.

Tabelle 4.

Bandensystem von TeBr_2 .

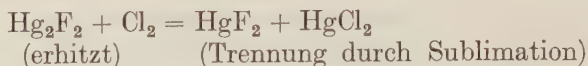
Bandenmitten.

Nr.	Wellen- länge in ÅE.	Wellen- zahl in cm^{-1}	Int.	Bem.	Nr.	Wellen- länge in ÅE.	Wellen- zahl in cm^{-1}	Int.	Bem.
1	1758	56883	0		9	1830	54644	1	
2	1767	56593	1		10	1841	54318	2	
3	1776	56306	3		11	1850	54054	2	
4	1785	56022	3	*	12	1860	53763	3	*
5	1793	55772	3		13	1870	53475	3	
6	1802	55493	3		14	1879	53219	3	
7	1812	55187	2		15	1888	52966	2	
8	1820	54945	1		16	1898	52687	0	

* = sämtliche Banden sehr diffus, Int. = geschätzte Intensität.

Man erkennt aus Tab. 1, dass je zwei Systeme zusammengehören, wobei dasjenige des Bromids etwas nach langen Wellen verschoben ist, eine Tatsache, die auch für die oben erwähnten bekannten Bandensysteme der Tellurdihalogenide im Sichtbaren gilt. Die Tabellen 2, 3 und 4 enthalten die Wellenlängen der einzelnen Kanten bzw. Banden der Diskontinua. Weitere Versuche, die zur Sicherstellung der Träger und zur Schwingungsanalyse der Bandensysteme führen sollen, sind im Gange.

2. HgF_2 . Ausgehend von Hg_2F_2 wurde nach G. BAHLAU¹⁾ mittels der Reaktion:



wasserfreies HgF_2 hergestellt, das in einem Platinschiffchen im Absorptionsrohr verdampft wird. Das gesuchte, dem bekannten Bandensystem von $HgCl_2$ entsprechende Diskontinuum konnte nicht gefunden werden. Es dürfte unterhalb 1400 ÅE. liegen. Dagegen wird oberhalb 400° C ein Kontinuum festgestellt, das mit steigender Temperatur zu längeren Wellen vorrückt und bei 500° C eine langwellige Grenze von 1850 ÅE. aufweist. Es ist wahrscheinlich, dass es sich dabei um das langwelligste HgF_2 -Kontinuum α (nach K. WIELAND²⁾) handelt, dessen Maximum bei $HgCl_2$ die Wellenlänge 2050 ÅE. aufweist.

3. $Hg(CN)_2$. Bei 110° ist ein deutliches Kontinuum zwischen 1800 und 1650 ÅE. erkennbar. Mit wachsender Temperatur verschiebt sich die kurzwellige Grenze nach kleineren Wellenlängen. Die Quecksilber-Resonanzlinie 1849,7 ÅE., welche unterhalb 280° nur schwach sichtbar ist, nimmt oberhalb 300° stark an Intensität zu, was mit der bekannten Zersetzung³⁾ $Hg(CN)_2 \rightarrow Hg + (CN)_2$, oberhalb 320°, in Übereinstimmung ist.

Es ist uns eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. A. HAGENBACH für die entgegenkommende Überlassung der Institutsmittel und dem ALUMINIUM-FONDS NEUHAUSEN für finanzielle Unterstützung aufs beste zu danken.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

¹⁾ G. BAHLAU, Diss. 1919, Weida i. Th.

²⁾ K. WIELAND, Zs. f. Phys. **77**, 157, 1932 und Arbeiten I (l. c.).

³⁾ H. REMY, Lehrbuch der anorganischen Chemie, II. Bd. 356, Leipzig 1932.

Bericht über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft

in Fribourg, am 9. Mai 1942.

Präsident: Prof. Dr. J. WEIGLE (Genève)

Vizepräsident: Prof. Dr. H. KÖNIG (Bern)

Sekretär: Prof. Dr. E. MIESCHER (Basel).

Geschäftlicher Teil.

Es wird die folgende Revision der Statuten beschlossen: Art. 9 wird erweitert zu: „Der Vorstand besteht . . . und einem Beisitzer, der verantwortlich für das Auskunfts- und Pressewesen ist“.

Zum Beisitzer wird Herr Prof. M. Wehrli, Basel, gewählt; es werden ihm aus dem Gesellschaftsvermögen Fr. 500.— als Betriebskapital für die zu gründende Auskunfts- und Pressestelle bewilligt.

Herr Prof. Aug. Hagenbach (Basel), Präsident der Redaktionskommission der *Helv. Phys. Acta* ist anlässlich seines 70. Geburtstages zum Ehrenmitglied der S.P.G. ernannt worden.

In die S.P.G. werden aufgenommen:

Ordentliche Mitglieder: HH. Dr. H. Ammann (Fribourg); Dr. G. Badarau (Genève); H. Bömmel (Zürich); E. Bleuler, Dipl. Phys. (Küsnacht-Zürich); K. Bleuler (Genève); Edm. Brasey, Priv. Doz. (Fribourg); P. Dinichert (Genève); A. Grass (Basel); W. Hälg (Basel); H. Hausmann, Ing. (Basel); Dr. E. Kessler (Bern); Dr. P. Längler (Riehen); B. Lauterburg, Dipl. Phys. (Zürich); H. Loosli, Ing. (Wallisellen); F. Marti, Ing. (La Chaux-de-Fonds); H. Merklingshaus, Ing. (Le Locle); W. Müller (Basel); J. Rossel (Zürich); E. Schönmann (Basel); Dr. P. B. Thürlemann (Engelberg); P. K. Zünd (Einsiedeln); W. Zünti, Dipl.-Phys. (Zürich).

Kollektivmitglieder: Hoffmann-La Roche & Co. A.G. (Basel); Fr. Sauter A.G. (Basel).

Die S.P.G. hat durch den Tod verloren:

Prof. Jean Perrin (Paris), Ehrenmitglied.

Aus der S.P.G. sind ausgetreten:

Dr. W. Billeter (Zürich); Dr. W. Brückmann (Locarno); Dr. F. Müller (Zürich).

Die S.P.G. zählt zur Zeit 245 Mitglieder.

Die nächste Sitzung soll anlässlich der Jahresversammlung der S.N.G. am 29.—31. August 1942 in Sion stattfinden.

*Wissenschaftlicher Teil.***Die Verteilung der Strukturen kristallisierter Verbindungen über die 219 Raumgruppen**

von W. NOWACKI (Bern).

(Die ausführliche Arbeit wird a. a. O. erscheinen.)

Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung

von O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER (Zürich, E.T.H.).

Mit Gammaquanten genügend hoher Energie ist es möglich, von einem Atomkern ein Neutron abzuspalten, was als Kernphotoeffekt bezeichnet wird. Die dabei dem Kern zugeführte Energie muss mindestens so gross wie die Bindungsenergie eines Neutrons sein, die im Mittel ungefähr 8 MeV beträgt. Beim Einfang eines Protons durch den Li^7 -Kern wird eine γ -Strahlung mit einer Quantenenergie von 17 MeV erzeugt, die energetisch bei fast allen Kernen einen (γ, n) -Prozess ermöglicht. Die Wirkungsquerschnitte sind von der Grössenordnung 10^{-28} cm^2 ; es ist deshalb bei den zur Verfügung stehenden γ -Intensitäten von $\sim 10^6$ γ -Quanten pro sec nicht möglich, den Kernphotoeffekt direkt durch den Nachweis des emittierten Neutrons festzustellen. Wenn hingegen der durch den (γ, n) -Prozess entstehende Kern radioaktiv ist, genügt es, die induzierte Aktivität nachzuweisen. Nach dieser Methode haben BOTHE und GENTNER¹⁾ bei einer ersten Durchmusterung des periodischen Systems 15 solcher Prozesse gefunden. Mit grösserer γ -Intensität und verbesserter geometrischer Anordnung ist es uns gelungen, im Vergleich zu diesen Autoren die induzierte Aktivität zu steigern. Deshalb erschien es aussichtsreich, bis jetzt der Beobachtung entgangene Kernphotoeffekte mit unserer Apparatur aufzufinden.

Die schon beschriebene Hochspannungsanlage²⁾ liefert in ihrer Nachbeschleunigungsrohre Kanalströme bis 100 μA und eine Maximalspannung von 800 KV. Für eine gute Ausbeute an γ -Quanten ist es wesentlich, dass die mit Protonen beschlossene Li-Target sehr rein ist. Wir stellten sie deshalb durch Aufdampfen von Lithium im Hochvakuum her, mit Hilfe eines kleinen, ausschwenkbaren elektrischen Ofens.

Die auf (γ, n) -Prozesse untersuchten Elemente wurden in reinem Zustand (Mg, Al, S, Fe, Cu) oder, wo dies nicht möglich war,

¹⁾ W. BOTHE und W. GENTNER, Zs. f. Phys. **106**, 236, 1937.

²⁾ O. HUBER, O. LIENHARD, P. PREISWERK, P. SCHERRER und H. WÄFFLER, H.P.A. XV, 45, 1942.

als sehr reine Verbindungen bestrahlt (Kalium als K_2S , Fluor als LiF und CaF_2). Nach Bestrahlung bis zur praktischen Sättigung der induzierten Aktivität (Bestrahlungsdauer $\sim 4 T$) wurden unserg Versuchskörper, die die Form von Hohlzylindern hatten, über ein genau passendes dünnwandiges Aluminiumzählrohr geschoben. Die Bestimmung der Halbwertszeit genügt dann, falls diese schon bekannt ist, zur Identifizierung des entsprechenden radioaktiven Isotops. Um auch sehr schwache Aktivitäten, das heisst kleine Ausbeuten des Kernphotoeffekts, finden zu können, muss der Null-effekt des verwendeten Zählrohres klein sein. Unsere Aktivitätszählrohre haben bei einem Innendurchmesser von 25 mm und einer wirksamen Länge von 60 mm unter 10 cm Blei ca. 20 Nullstösse pro Minute. Mit Hilfe eines Kranzes von 8 grossen Zählrohren, in deren Mitte das Messzählrohr angebracht wurde, konnten die von der Höhenstrahlung herkommenden Stösse durch eine Antikoinzidenzschaltung unterdrückt werden. Es blieb ein Nulleffekt von 4 Stössen pro Minute.

Die vom Kanalstrahl getroffene Lithiumtarget emittiert ausser der gewünschten γ -Strahlung schnelle Neutronen, deren Intensität äquivalent zu 8 mC Radium + Beryllium bestimmt worden ist. Diese werden durch die im Wasserstoffkanalstrahl enthaltenen Deutonen in der Reaktion $Li^7(d,n)Be^8$ gebildet. Da nun ein $(n,2n)$ -Prozess auf das gleiche Isotop führt wie ein (γ,n) -Prozess, ist in jedem Fall zu untersuchen, ob die entstandene Aktivität von der γ -Strahlung oder von den Neutronen induziert worden ist. Dies lässt sich leicht entscheiden, wenn man die induzierte Aktivität bei verschiedenen Protonenenergien misst. Die Intensität der γ -Strahlung zeigt bei 440 KV den für sie charakteristischen Resonanzanstieg und bleibt bei höheren Spannungen konstant, während die Neutronenintensität einen exponentiellen Anstieg zeigt und von 500 KV auf 700 KV auf den dreifachen Wert ansteigt. Wenn also die bei verschiedenen Spannungen gemessene Aktivität der γ -Intensität proportional ist, ist ein $(n,2n)$ -Prozess ausgeschlossen.

Bis jetzt ist es uns gelungen, an den folgenden Isotopen einen Kernphotoeffekt neu zu finden: Mg^{24} , Al^{27} , S^{32} , K^{39} , Fe^{54} . Die Kernphotoeffekte an N^{14} und F^{19} wurden schon von BOTHE und GENTNER¹⁾ angegeben, wobei diesen aber nur eine Abschätzung der sehr kleinen Ausbeuten möglich war, welche wir nun genauer gemessen haben. In der folgenden Tabelle sind die von uns bis jetzt gemessenen Kernphotoeffekte zusammengestellt. Wie von BOTHE und GENTNER werden die Ausbeuten der Kernphotoeffekte in Pro-

¹⁾ W. BOTHE und W. GENTNER, Zs. f. Phys. **112**, 45, 1939.

zenten von dem an Cu^{63} angegeben. Bei der Halbwertszeit sind in der Kolonne „Literaturwerte“, die von anderen Autoren für die betreffenden Kerne gemessenen Halbwertszeiten angeführt. Literaturangaben dazu findet man zum Beispiel bei MATTAUCH und FLÜGGE¹⁾.

Kernphotoeffekte.

Ausgangsisotop mit relativer Häufigkeit	Endkern	Halbwertszeit		Ausbeute
		Literatur- werte	von uns gemessen	
${}^7\text{N}^{14}$ 99,62%	N^{13}	$9,93 \pm 0,03$ m	$9,92 \pm 1$ m	0,6
${}^9\text{F}^{19}$ 100	F^{18}	112 ± 4 m 107 ± 4 m	115 ± 5 m	0,75
${}^{12}\text{Mg}^{24}$ 77,4	Mg^{23}	$11,6 \pm 0,5$ s	13 ± 3 s	5
${}^{13}\text{Al}^{27}$ 100	Al^{26}	$7,0 \pm 0,5$ s	$7,2 \pm 0,5$ s	11
${}^{16}\text{S}^{32}$ 95,1	S^{31}	$3,18 \pm 0,04$ s	$2,9 \pm 0,2$ s	14
${}^{20}\text{K}^{39}$ 93,44	K^{38}	$7,65 \pm 0,1$ m	$8,0 \pm 0,5$ m	3
${}^{26}\text{Fe}^{54}$ 5,84	Fe^{53}	$8,9 \pm 0,2$ m	$8,8 \pm 0,2$ m	38
${}^{29}\text{Cu}^{63}$ 68	Cu^{62}	$10,5 \pm 0,5$ m $9,92 \pm 0,05$	$10,5 \pm 0,25$ m	100

Eine an Chlor mit schnellen Neutronen induzierte Aktivität

von O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER (Zürich, E.T.H.)

Die Bestrahlung von Chlor mit den Neutronen einer $\text{Ra} + \text{Be}$ -Quelle von 55 mC ergibt eine bisher nicht beobachtete Aktivität von der Halbwertszeit $T = 14,7 \pm 1$ sec. Da die von Cl^{35} ausgehenden (n, p) -, (n, α) - und $(n, 2n)$ -Prozesse zu anderen schon bekannten Halbwertszeiten führen, bleiben als einzige noch in Betracht fallende Reaktionen: a) $\text{Cl}^{37} (n, \alpha) \text{P}^{34}$ und b) $\text{Cl}^{37} (n, p) \text{S}^{37}$. Nun haben CORK und MIDDLETON²⁾ ein seiner Masse nach unbestimmtes Phosphorisotop mit $A > 31$ und der Halbwertszeit $T = 12,7$ sec gefunden. Andererseits wird von DICKSON und KONOPINSKI³⁾ für den Schwefel S^{37} eine Halbwertszeit der Grössenordnung 10 sec theoretisch vorausgesagt. Es kann deshalb nicht ohne weiteres entschieden werden, ob Prozess a) oder b) oder beide zusammen vorliegen. Versuche zur chemischen Identifizierung der Aktivität sind im Gange.

Die ausführliche Arbeit erscheint in den H. P. A.

¹⁾ J. MATTAUCH und S. FLÜGGE, Kernphysikalische Tabellen, Berlin 1942.

²⁾ CORK und MIDDLETON, Phys. Rev. **58**, 474 (1940).

³⁾ DICKSON und KONOPINSKI, Phys. Rev. **58**, 949 (1940).

3 Demonstrationen über die dynamische Linse

VON F. DESSAUER und FRANZ MEIER (Fribourg).

Es wird das Prinzip der dynamischen Linse im Experiment vorgeführt. Nach kurzer Besprechung der Aussichten dieses Prinzips in der Abbildungsoptik werden die Schwierigkeiten des Fassens, Dichtens, Wölbens der brechenden Flächen, insbesondere die Untersuchungen über die Eigenschaften der angewendeten Kunststoffe dargelegt. Sodann werden als Beispiele der Anwendung Lupen und Brillengläser mit stetig veränderlicher Brechkraft, Projektionslinsen allein und in Verbindung mit Glasoptik vorgeführt.

VON F. DESSAUER und S. METZGER (Fribourg).

Gegenstand der Demonstration sind die Füllstoffe, die durch Wahl und Mischung einen weiten Bereich der Brechung und Dispersion auszunutzen gestatten. Das Experiment der Apochromatisierung einer dynamischen Linse, das durch einen Glassprung am Samstag den 9. abgebrochen werden musste, wurde am Sonntag den 10. den noch in Freiburg verbliebenen Teilnehmern der Tagung gezeigt.

VON F. DESSAUER und L. SAXER (Fribourg).

Demonstration eines im Institut gebauten Linsenprüfgerätes nach WETTHAUER, das bei dynamischen Linsen zur Ermittlung der Objektive, nicht nur zu ihrer Prüfung benutzt werden kann.

Photodissoziation zweiatomiger Moleküle in Ionen

VON M. WEHRLI und W. HÄLG (Basel).

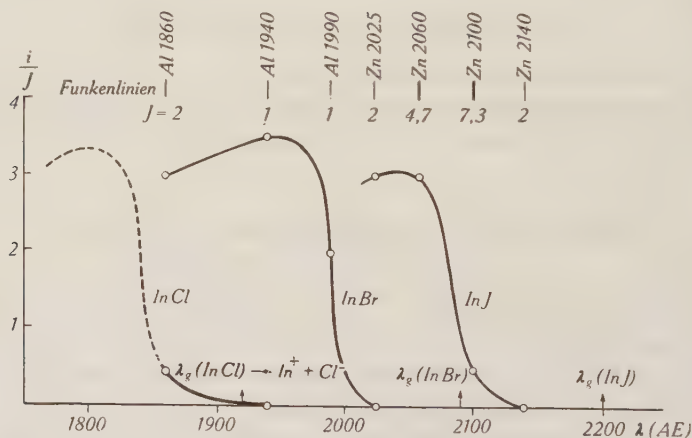
Über den Photoeffekt an freien Molekülen AB , wobei durch Photonenabsorption ein positives Ion und ein Elektron entsteht, ist schon viel bekannt. Dagegen weiss man sehr wenig über die Photodissoziation in zwei Ionen gemäss dem Prozesse: $AB + h\nu \rightarrow A^+ + B^-$. Es scheint darüber bisher nur die Arbeit von TEREININ und POPOV¹⁾, welche den Effekt an den Molekülen TlJ , $TlBr$, $TlCl$ entdeckt haben, vorzuliegen. Mit einer etwas verbesserten Apparatur wurden deshalb die Versuche der obigen Forscher mit TlJ wiederholt. Dabei war das Dissoziationsgefäss von der Pumpe abgeschmolzen, und die Rohr- bzw. Substanztemperaturen konnten unabhängig voneinander reguliert und konstant gehalten werden.

An Stelle der Nickelelektroden wurden lange Wolframelektroden verwendet, die von den Halogenen weniger angegriffen werden.

¹⁾ A. TEREININ und B. POPOV, Phys. Zs. d. Sowjetunion 2, 299, 1932.

Der maximale Ionenstrom i_m , der bei einem Tl-J-Druck von 0,07 mm Hg festgestellt wurde, betrug bei integraler Einstrahlung mit einem kondensierten Zn-Funken $0,91 \cdot 10^{-5}$ A, die mit Filter bestimmte Wellenlänge maximaler Wirkung λ_m 2120 ÅE, in guter Bestätigung der Versuche von TERENIN und POPOV. Es wurde auch bestätigt, dass es sich nicht um einen Photoeffekt, weder an den Elektroden noch im Dampfe, handeln kann. Sekundäre Stossprozesse sind ebenfalls ausgeschlossen, da die Ionenströme schon bei Drucken von 10^{-4} mm Hg vorhanden sind.

Die Photodissoziation in Ionen konnte dann bei 4 weiteren Molekülen, die mit den Tl-Halogeniden chemisch verwandt sind, festgestellt werden. Die 2-atomigen Halogenide von Indium, das im periodischen System über dem Thallium steht, ergaben folgende Ionenströme i_m : InJ $1,6 \cdot 10^{-5}$ A, InBr $0,99 \cdot 10^{-5}$ A, und InCl $0,2 \cdot 10^{-5}$ A. Die Figur enthält als Funktion der eingestrahnten Wellenlänge die Ionenströme, bezogen auf gleiche Intensitäten der einzelnen Spektrallinien. Diese wurden mit einem Quarzmonochromator getrennt und ihre Intensitäten J mit einer Thermosäule gemessen.



Photodissoziation zweiatomiger Indiumhalogenide in Ionen.

λ = eingestrahlte Wellenlänge.

λ_g = berechnete Grenzwellenlänge, bei der energetisch der Prozess möglich ist.
 i = Ionenstrom. J = gemessene Relativintensität der Funkenlinien.

Die Kurven verschieben sich beim Übergang vom Jodid \rightarrow Bromid \rightarrow Chlorid systematisch zu kürzeren Wellenlängen, ganz entsprechend wie die minimalen Dissoziationsenergien D_1 der Moleküle in Ionen, die aus den bekannten Dissoziationsenergien D^1),

¹⁾ M. WEHRLI und E. MIESCHER, H.P.A. 7, 298, 1934.

aus der Ionisierungsenergie I von Indium und den Elektronenaffinitäten A der Halogene nach der Gleichung: $D_1 - hc/\lambda_g = D + I - A$ berechnet werden können. Man erkennt aus der Figur, in der die Grenzwellenlängen λ_g eingetragen sind, dass die Photodissoziation erst unterhalb λ_g einsetzt. Messungen an überhitzten Dämpfen ergaben bei steigender Temperatur eine Annäherung der Kurven an λ_g .

Bei GaJ wurde ebenfalls eine Photoionisation festgestellt, die einen Ionenstrom $i_m = 0,13 \cdot 10^{-5}$ A ergab¹⁾. Messungen an GaBr und GaCl, sowie bei Einstrahlung im Schumanngebiet sind in Vorbereitung. Die ausführliche Arbeit erscheint in den *Helv. Phys. Acta*.

Ultrarotspektren höherer Dicarbonsäuren

von M. WEHRLI und E. SCHÖNMANN (Basel).

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung einer Reihe von Publikationen²⁾, die zeigten, dass die vier ersten Dicarbonsäuren $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_n-\text{COOH}$ ($n = 0$ bis 3) im kristallinen Zustande Ultrarotspektren mit ausgeprägten Absorptionsbanden aufweisen. Die zugehörigen Frequenzen konnten als Gruppen- oder Kettenschwingungsfrequenzen der Kristallmoleküle gedeutet werden, die teilweise mit steigender Zahl der Kohlenstoffatome $N=n+2$ hin- und herpendeln. Mit dem Ziele, das Verhalten der höhern Dicarbonsäuren kennen zu lernen, werden die Absorptionsspektren der vier nächsten Glieder mit $n = 4$ bis 7 untersucht. Dazu gelangt das früher beschriebene, in der Physikalischen Anstalt Basel konstruierte Ultrarotspektrometer zur Anwendung, dessen neues Steinsalzprisma im Gegensatz zu früher, das optimale Öffnungsverhältnis von 1:6 auszunützen gestattet. Die Herstellung der dünnen Kristallschichten wurde wesentlich verbessert, indem an Stelle der Auskristallisierung aus Lösungsmitteln die Methode der Aufdampfung auf Steinsalzplatten im Hochvakuum trat. Die so erzeugten viel homogenen Schichten ergeben schärfere Banden, wodurch mehr und genauere Schwingungsfrequenzen gemessen werden können.

¹⁾ Damit ist bewiesen, dass auch die Moleküle InJ, InBr, InCl und GaJ Atomoleküle sind, was WEHRLI und MIESCHER als wahrscheinlich angenommen hatten.

²⁾ R. FICHTER und M. WEHRLI, H.P.A. **13**, 217, 1940; **14**, 189, 1941. — R. FICHTER, H.P.A. **13**, 309, 1940; **13**, 342, 1940. — M. WEHRLI, H.P.A. **14**, 516, 1941.

Tabelle 1 zeigt die Messergebnisse. Neun der angeführten Banden sind von LECOMTE gemessen worden.*.

Tabelle 1.

Wellenzahlen ν der Absorptionsmaxima und Intensitäten i der Banden.

Adipinsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_4-\text{COOH}$		Pimelinsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_5-\text{COOH}$		Korksäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_6-\text{COOH}$		Azelainsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_7-\text{COOH}$	
$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i
				645	0	652	0?
		676	} 1d	680	1	677*	1/2
690*	1	692*					
735*	1/2	729*	0	725	0	724*	1/2
				760	0?	772	0
				802	0		
926*	4	924*	5	930	4	926*	7
				971	0?		
1040	0?	1017	0	1010	0	1048	0
		1080	1/2			1091	1/2
		1125	1/2	1162	0	1122	0
1190	3	1190	1	1186	2	1186	1
		1235	0			1223	0?
1275	7	1265	7	1250	6	1250	} 10d
		1300	0			1300	
1362	1/2	1350	1/2	1334	2		
1430	4	1420	5	1430	5	1410	5
						1461	0?
1695	10**	1682	10**	1695	10**	1690	10**
2650	} 50b	2625	} 77b	2660	} 62b	2675	} 55b
2740		2695					
2910		2890		2900		2860	
2960		2940		2950		2935	
3020		3020		3015		3040	

d = Doppelbande b = breit ? = sehr schwach, unsicher ** = Annahme

* von LECOMTE gemessen (C. R. 211, 776, 1940).

Die von WEHRLI und FICHTER gefundene Oszillation der C=O-Gruppenfrequenzen mit steigender Zahl n wird auch im Bereich $n = 4$ bis 7 festgestellt, interessanterweise mit Phasenwechsel zwischen $n = 3$ und 4. Dehnt man die Rechnung der Kettenschwingungsfrequenzen von WEHRLI auf die höhern Dicarbonsäuren aus, so kann man wiederum allen gemessenen Banden berechnete zuordnen. Dagegen können nicht alle berechneten Frequenzen experimentell festgestellt werden, die mittleren Frequenzen scheinen zu fehlen.

Bei der Glutarsäure ($n = 3$) wurden an der gleichen Schicht Messungen unter- und oberhalb des Schmelzpunktes ausgeführt. Die beiden Spektren zeigen starke Differenzen; z. B. ist die höchste Kettenschwingungsfrequenz mit der Wellenzahl 914 cm^{-1} , die im Kristall sehr intensiv erscheint, in der Flüssigkeit fast ganz verschwunden. Ähnlich verhält sich die Gruppenschwingungsfrequenz bei 1282 cm^{-1} , und auch im Gebiete der C-II-Frequenzen sind beträchtliche Abweichungen vorhanden.

Die ausführliche Arbeit erscheint in den *Helv. Phys. Acta*.

Terme hoher Multiplizität in Molekülspektren

von E. MIESCHER und W. MÜLLER (Basel).

Im Gegensatz zu den Atomspektren, wo im Falle der Viel-elektronensysteme sehr zahlreiche Multiplette beobachtet und in Termsysteme vielfach hoher Multiplizität eingeordnet werden, sind die Kenntnisse über analoge Multiplette in Molekülspektren äusserst spärlich, obwohl sie mehrfach theoretische Behandlung gefunden haben¹⁾. Zwar sind einzelne Bandensysteme auf Grund des Prinzips der Zuordnung zu den Termen getrennter Atome als Übergänge zwischen Quartett-Termen gedeutet worden, ohne dass es jedoch möglich war, die Grösse der Multipletttaufspaltung anzugeben. Sicher beobachtet, und das in vielen Fällen, sind nur Triplet-Terme.

Trotzdem ist zu erwarten, dass auch bei zweiatomigen Molekülen Terme hoher Multiplizität selbst im Grundzustand häufig sein sollten, insbesondere in den Fällen, in denen eines der Atome im freien Zustand mehrere Elektronen mit unabgesättigtem Spin besitzt, wie etwa bei den Atomen der Eisengruppe und der im periodischen System voranstehenden Elemente. Tatsächlich sind von den Halogeniden dieser Atome seit längerer Zeit wohlausgebildete Bandenspektren bekannt²⁾, die jedoch infolge ihrer komplexen Struktur bisher kaum eine Analyse zugelassen haben, und die deshalb von den Autoren meist mehratomigen Trägern zugeschrieben worden sind.

Es sind nun einzelne dieser Spektren erneut aufgenommen worden, einerseits in Emission mit Anregung durch Hochfrequenz (Geheiztes Quarzrohr mit wasserfreiem Salz MX_2), aber ausserdem auch in Absorption mit erheblich grösserem experimentellem Aufwand, da die zweiatomigen Moleküle MX durch thermische Dis-

¹⁾ R. MULLIKEN, *Rev. of Mod. Phys.* **2**, 60, 1930; s. a. G. HERZBERG, *Molekülspektren* 1939, S. 163 ff.

²⁾ P. MESNAGE, *Ann. d. physique* **12**, 5, 1939.

soziation der MX_2 -Salze angereichert werden müssen. Hiefür sind Temperaturen von 1600—1700° C nötig, die in einem speziell angefertigten Kohlegriessofen (100 Volt, 30 Amp.) erzeugt wurden. Die Absorptionsröhren aus Pythagorasmasse waren beiderseitig mit aufge kitteten, durch Wasserkühlung kalt gehaltenen Fenstern aus Quarzglas verschlossen; ein langsamer Stickstoffstrom von Atmosphärendruck führte den Salzdampf in die heisse Zone und verhinderte zu rasche Wegdiffusion. Wenn bestimmte Bedingungen genau eingehalten wurden, gelang es so, das Absorptionsspektrum während hinreichend langer Zeit aufrecht zu erhalten. Die Aufnahmen wurden an Quarzspektrographen mittlerer Grösse und insbesondere in der zweiten Ordnung eines Rowland'schen 3 m-Gitters gemacht (2,8 Å/mm).

Das Bandensystem von MnCl , welches sowohl in Emission als auch in Absorption erscheint, besteht aus 8 Gruppen im Spektralbereich von 3500 bis 4000 Å. Die Gruppe zwischen 3670 Å und 3720 Å lässt sich als Multiplett deuten, bestehend aus (0,0)-Banden (Schwingu ngsquantenzahlen $v' = v'' = 0$); es werden darin 19 Banden entsprechend den zwischen zwei Septett-Termen erlaubten Übergängen $\Delta\Omega = 0, \pm 1$ beobachtet (Ω = Quantenzahl des Gesamtelektronendrehimpulses um die Molekülachse). Die Multiplettaufspaltungen in den beiden Termen sind beinahe äquidistant ($\Delta v' = 33 \text{ cm}^{-1}$, $\Delta v'' = 78 \text{ cm}^{-1}$), wie es für starke Kopplung des Elektronenspins an die Molekülachse zu erwarten ist. Die übrigen Gruppen enthalten die Schwingu ngssequenzen $\Delta v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, -4$ mit völlig analoger Multiplettstruktur. Die Kernfrequenzen findet man zu $\omega' = 407 \text{ cm}^{-1}$, $\omega'' = 381 \text{ cm}^{-1}$. Die Banden dieser Gruppen zeigen vielfach die Isotopendublette des Chlors.

Ein völlig ähnliches Spektrum wird auch bei MnBr gefunden, es liegt etwas langwelliger bei 3650—4050 Å, mit merklich grösserer Multiplettaufspaltung.

Das früher behandelte Bandenspektrum von FeCl^1) ist nun auch in Absorption erhalten worden. Neben dem Sextett-Term, der eine nichtäquidistante, angenähert der Intervallregel gehorchende Multiplettaufspaltung besitzt, und der in Kombination mit einem ${}^6\Sigma$ -Term mit verschwindender Multiplettaufspaltung ein einfaches Sextett von Bandensystemen gibt, lassen sich jetzt auch die auf der langwellig en Seite anschliessenden Systeme weiteren Termen hoher Multiplizität zuordnen.

Die ausführliche Arbeit wird später in den Helv. Phys. Acta erscheinen.

¹) E. MIESCHER, Helv. Phys. Acta **11**, 463, 1938.

Über die Bestimmung akustischer Resonanzen nach der Hitzdrahtmethode

von A. LOEBENSTEIN (Fribourg).

Im Anschluss an Messungen von H. ZICKENDRAHT¹⁾, der die Feinstruktur akustischer Resonatoren mit Hilfe der schallempfindlichen Flamme aufnahm, wurden die gleichen Messungen an einem Zylinderresonator mit einem Hitzdrahtschallmesser wiederholt. Dieser²⁾ besteht aus einem dünnen elektrisch geheizten Draht, der durch den darauffallenden Schall abgekühlt wird. Dadurch ändert sich sein Widerstand, wie man in einer Wheatstone'schen Brücke messen kann. Die Ergebnisse von Zickendraht wurden bestätigt und gleichzeitig eine quantitative Auswertung versucht.

In einem flachen Zylinder sind mindestens zwei Arten von Luftschwingungen möglich: einmal diejenigen nach Art der Helmholtzresonatoren, deren Frequenz durch die Formel³⁾

$$n = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{V}} \quad (1)$$

c — Schallgeschwindigkeit; a = akustische Leitfähigkeit der Mündung;
 V = Volumen des Zylinders.

geliefert wird, Sie sind unabhängig von der Form des Resonators, die in ihm enthaltene Luft wirkt nur durch ihre Zusammendrückbarkeit, der eigentliche Schwingungsvorgang spielt sich in der Mündung ab. Die Wellenlänge ist gross gegen die Dimensionen des Zylinders.

Zweitens sind ebene radiale Schwingungen der Luft im Zylinder möglich⁴⁾. Ihre Wellenlänge ist gegeben durch

$$\frac{dJ_n(\kappa r)}{d(\kappa r)} = 0 \quad (2)$$

J_n = nte Besselfunktion; $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$; λ = Wellenlänge;

r = Radius des Zylinders.

Die Wellenlängen dieser Art sind vergleichbar mit dem Durchmesser des Zylinders. Beide Arten von Schwingungen haben prinzipiell nichts miteinander zu tun.

¹⁾ H. ZICKENDRAHT, H.P.A. **14**, 525 (1941).

²⁾ Siehe u. a. W. S. TUCKER und E. T. PARIS, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] **221**, 389 (1921); R. C. RICHARDS, Phil. Mag. [6] **45**, 926 (1923); A. v. HIPPEL, Ann. Physik **75**, 521 (1924). — Ann. Physik **76**, 590 (1925); P. E. SCHILLER und H. CASTELLIZ, Akust. Zschr. **2**, 11 (1937).

³⁾ RAYLEIGH, Theorie des Schalls II, S. 211 (Braunschweig 1880).

⁴⁾ RAYLEIGH, Theorie des Schalls II, S. 344 (Braunschweig 1880).

Die von uns gemessenen Resonanzfrequenzen am Zylinder sind von der Grössenordnung der Helmholtzschwingungen nach Gleichung (1), es handelt sich also sicher nicht um die radiale Art. Berechnet man jedoch die Verhältnisse der von uns gefundenen höheren Resonanzlagen zu derjenigen, die der Gleichung (1) entspricht, so ergeben sich die gleichen Zahlen, wie wenn man diese Verhältnisse für die radialen Obertöne zum Grundton nach Formel (2) bestimmt, wie aus Tabelle 1 hervorgeht. Die Streuung der Messwerte um die Mittelwerte der Spalte 2 ist dabei sehr klein.

Tabelle 1.

I Verhältnisse der ersten Obertöne zum Grundton bei radialen Zylinderschwingungen	II Verhältnisse der gemessenen höheren Resonanzlagen zur Grundfrequenz nach (1) (Mittelwerte)
1,66	1,64
2,08	2,15
2,28	2,28

Die Klärung dieser erstaunlichen Tatsache soll in einer späteren Arbeit versucht werden.

Eine ausführliche Publikation wird in den *Helv. Phys. Acta* erscheinen.

Über ein neues hydrodynamisches Prinzip zur Schallmessung

VON HANS ZICKENDRAHT (Basel).

Die Schallempfindlichkeit von Flüssigkeits- und Gasstrahlen ist schon seit über hundert Jahren bekannt, indessen ist sie, soviel wir wissen, nie zur Schallmessung verwendet worden. Nachdem der Verfasser 1932 bereits auf die durch Schall bewirkte Geschwindigkeitsverminderung in geeignet gestalteten Gasstrahlen hingewiesen¹⁾ und sie 1932 gemessen hatte²⁾, wurde 1941 auf dieser Basis ein *Gasstrahl-Schallmesser* entwickelt, dessen Grundlagen im Folgenden beschrieben seien³⁾.

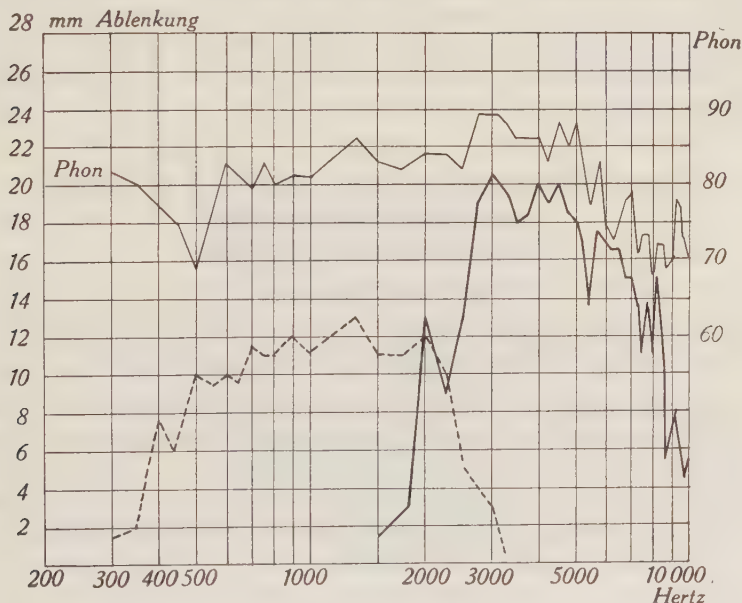
Bekanntlich verhalten sich Diskontinuitätsflächen zwischen ruhenden und bewegten Flüssigkeiten, also z. B. die Begrenzungsflächen von Flüssigkeits- und Gasstrahlen gegenüber irgendwelchen Störungen instabil und lassen sich deshalb als Amplitudenverstärker akustisch gebrauchen. So konnte gezeigt werden, dass sich

¹⁾ H. ZICKENDRAHT: *Helv. Phys. Acta* V, 326 (1932).

²⁾ H. ZICKENDRAHT: *Helv. Phys. Acta* VII, 798 (1934).

³⁾ H. ZICKENDRAHT: Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Band III (1942).

z. B. Schallamplituden in Luft von 10^{-5} cm längs einer Diskontinuitätsfläche von bloss 2,5 cm Länge auf 0,1 cm vergrössern lassen, es liegt dann eine Amplitudenverstärkung um das 10000-fache vor. Derartige Verstärkungen und noch höhere wurden in Luftstrahlen aus Düsen von etwa 2—3 mm² Öffnung erhalten. Dieser Effekt allein genügt aber nicht, um die zur Schallmessung herbeigezogene Geschwindigkeitsverminderung im Strahle zu erklären. Diese rührt in komplizierter Weise von der früher schon bekannten Wirbelbildung in der Diskontinuitätsfläche her, die den Strahl zunächst kontrahiert und daraufhin fächerartig auszubreiten strebt. Dieser Vorgang muss dann eine Herabsetzung der Geschwindigkeit im Strahle zur Folge haben. Die Geschwindigkeitsverminderung wird gemessen und in funktionellen Zusammenhang mit Amplitude und Frequenz des auffallenden Schalles gebracht.



Das Messgerät selbst besteht aus einer besonders gebauten Düse, der Luft unter geringem Drucke entströmt. Zwei bis drei Zentimeter über der Düse befindet sich ein *Pitot'sches Rohr* mit kleiner Stauscheibe, das an einem empfindlichen Manometer (Toepler'sche Drucklibelle oder ein Mikromanometer nach Jaquet-Marey) den Druck im Luftstrahle und damit die Gasgeschwindigkeit misst. Ausserordentlich schwache Schalle können auf diese Weise nachgewiesen und nach Eichung des Gerätes mit einem absoluten Schallmesser quantitativ gemessen werden.

Die Apparatur ist denkbar einfach und besteht lediglich aus Gasflasche mit Druckreduzierventil, Düse mit Pitotrohr und dem angeschlossenen Mikromanometer¹⁾. Zahlreiche Eichungen ergaben, dass sich ein und dasselbe Gerät bei zwei verschiedenen Einstellungen für die Frequenzgebiete 300 bis 3000 Hertz einerseits und 1500 bis 11000 Hertz andererseits verwenden liess. Die hydrodynamische Schallmessung eignet sich prinzipiell mehr für hohe Frequenzgebiete, von etwa 500 Hertz an aufwärts, weil tiefe Töne grosse Düsen und kleine Gasgeschwindigkeiten verlangen und unter 200 Hertz zu vorläufig unhandlichen Einrichtungen führen.

Wertvoll scheint das Verfahren für die Messung von *Ultraschall* zu sein. So konnte eine ausserordentlich einfache Apparatur für das Gebiet 4000 Hertz bis 16000 Hertz und darüber verfertigt und durchgemessen werden. Die Empfindlichkeit der Gasstrahl-Schallmesser ist im allgemeinen sehr gross. Schalle von 60 bis 90 Phon physiologischer Lautstärke eignen sich am besten zur Messung. Oberhalb 90 bis 100 Phon nimmt die Empfindlichkeit auffallenderweise wieder rasch ab.

Le phénomène de scission et les atomes qui en résultent

par A. JACQUEROD (Neuchâtel).

(V. Helv. Acta 15, 259, 1942.)

Der spontane Kerreffekt an KH_2PO_4 - und KH_2AsO_4 -Kristallen

von W. BANTLE, G. BUSCH, B. LAUTERBURG, P. SCHERRER (Zürich E.T.H.)

Bei den seignette-elektrischen Substanzen vom Typus KH_2PO_4 besteht folgendes Problem bei der unteren Curietemperatur: Einerseits deutet der dort stattfindende Abfall der anomal hohen Dielektrizitätskonstanten auf ein Verschwinden der spontanen Polarisierung während andererseits die Messungen der spezifischen Wärme dafür sprechen, dass die Polarisierung nicht abfällt, da sonst eine Wärmeanomalie (analog derjenigen bei der oberen Curietemperatur) gemessen werden sollte, was jedoch nicht der Fall ist.

Dieser scheinbare Widerspruch kann erklärt werden durch die Annahme, dass die spontane Polarisierung am unteren Curiepunkt zwar nicht verschwindet, jedoch ihre Möglichkeit von der $+c$ - in die $-c$ -Achse umzuklappen verliert. Diese bei tiefen Temperaturen immer stärker werdende Bewegungshemmung äussert sich deutlich in der ausserordentlich gross werdenden Koerzitivfeldstärke.

¹⁾ Die Firma JAMES JAQUET, Thannerstrasse 25, in Basel, hat die Herstellung der Schallmesser übernommen.

Dieses Einfrieren der Polarisation erklärt sofort den Abfall der Dielektrizitätskonstanten und den stetigen Verlauf der spezifischen Wärme.

Um diese Behauptung noch weiter zu stützen, wurde nun der spontane Kerreffekt an KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 (Beobachtungsrichtung senkrecht zur c -Achse; ohne äusseres Feld) von Zimmertemperatur bis 61°K , also bei KH_2AsO_4 9° unter die sogenannte untere Curietemperatur gemessen. Es ergab sich dabei (Fig. 1)

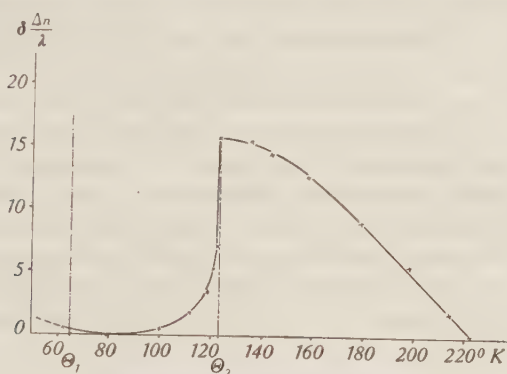


Fig. 1.

Doppelbrechung von KH_2PO_4 -Kristallen.

am oberen Curiepunkt der erwartete sprunghafte Abfall der Doppelbrechung (der sich dem normalen Temperaturgang überlagert), während am unteren Curiepunkt nichts analoges bemerkt werden konnte. Die Doppelbrechung verläuft dort stetig.

Da der spontane Kerreffekt quadratisch von der Polarisation abhängt, ist damit nicht nur bewiesen, dass die durch ein äusseres Feld ausgerichtete Polarisation am unteren Curiepunkt bestehen bleibt, sondern auch, dass die spontane Polarisation in den unausgerichteten Weiss'schen Bezirken eines Kristalls, an dem kein äusseres Feld liegt, am unteren Curiepunkt nicht verschwindet.

Das elastische Verhalten seignette-elektrischer Substanzen

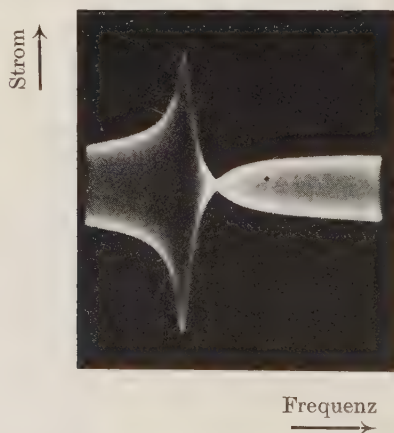
von W. BANTLE und W. LÜDY (Zürich E.T.H.).

Die experimentelle Tatsache des so aussergewöhnlich grossen Piezomoduls seignette-elektrischer Substanzen (bei KH_2PO_4 ist der Piezomodul bis 5000mal grösser als bei Quarz) beweist eine viel stärkere Kopplung zwischen elastischen und elektrischen Eigenschaften, als sie bei gewöhnlichen piezoelektrischen Stoffen vorhanden ist. Dieselbe spezifische Längenänderung, die durch einen

Druck von $1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$ hervorgerufen wird, kann deshalb auch schon durch ein elektrisches Feld von einigen Volt/cm erzeugt werden.

Diese enge Verknüpfung von elastischen und elektrischen Grössen erschwert einerseits direkte mechanische Messungen der verschiedenen Elastizitätsmoduln, da hierbei die Randbedingungen eine wesentliche Rolle spielen, anderseits lässt sich der Piezoeffekt bei genauer Berücksichtigung der elektrischen Randbedingungen gut verwenden, um elastische Konstanten auf sehr bequeme Weise mit einer bisher nicht verwendeten Methode zu bestimmen.

Dabei wird der Zusammenhang zwischen der Eigenfrequenz eines in der Grund- oder Oberschwingung schwingenden, sehr dünnen Stäbchens mit dem Elastizitätsmodul benützt. Um die Resonanzkurven und die Eigenfrequenzen dieser Stäbchen aufzufinden, wurde ein Frequenzmodulator verwendet. Dieser gestattet in Verbindung mit einem Hochfrequenzgenerator einen gewissen, einstellbaren Frequenzbereich periodisch rasch zu überstreichen, so dass auf dem Schirm eines Kathodenstrahloszillographen direkt der Strom durch den Kristall in Funktion der Frequenz aufgezeichnet wird. (Resonanz und Antiresonanz, siehe Figur.)



Aus dem Kristall werden möglichst schlanke Stäbchen bestimmter Orientierung herausgeschnitten und durch das frequenzmodulierte Wechselfeld zu Längsschwingungen angeregt. Die Auswertung der so erhaltenen Resonanzkurven bei verschiedenen Temperaturen des Kristalls ergibt sowohl die Resonanzfrequenzen und daraus die Elastizitätsmoduln, als auch die Dämpfung, beide in Funktion der Temperatur. Die Messungen zeigen, dass es Elastizitätsmoduln gibt, welche am Curiepunkt keinerlei Anomalie be-

sitzen, während andere Elastizitätsmoduln, welche mit den Umklappprozessen der spontanen Polarisation gekoppelt sind, am Curiepunkt ausgeprägte Temperaturabhängigkeit aufweisen. Die ausführlichen Resultate werden demnächst in den *Helv. Phys. Acta* erscheinen.

Remarques à propos de la relation entre spin et statistique

par E. C. G. STUECKELBERG (Genève).

1^o *Théorie classique.* La théorie d'un champ chargé peut être mise dans la forme:

$$(\gamma_\alpha D^\alpha - \kappa) u(x)_A = 0 \quad (1)$$

où u_A est un spineur à 2 *f* composantes réelles ($A = 1, 2, \dots, 2f$), $\gamma_{AB}^\alpha = \gamma_A^{\alpha C} \eta_{CB} = \gamma_{BA}^\alpha$ un *spino-tenseur* ($\alpha = 1, 2, \dots, 4$; $x^4 = ct$) symétrique, $\eta_{AB} = \eta_{BA}$ le *spineur fondamental symétrique* (analogue à $g_{\alpha\beta}$) avec $\eta_A^B = \delta_A^B$, $D_{\alpha AB} = (\partial/\partial x^\alpha) \eta_{AB} - (e\Phi_\alpha(x)/h) i_{AB}$ et où $(\gamma^\alpha D_\alpha) u_A = \gamma_A^{\alpha B} D_{\alpha B}^C u_C$. La quantité u_A se transforme suivant une représentation du groupe de Lorentz. Si $i_{AB} = -i_{BA}$ est antisymétrique et si $i\gamma^\alpha = \gamma^\alpha i$, on peut former des expressions $J^\alpha(x)$ et $T^{\alpha\beta}(x)$ bilinéaires en $u^+(x)_A$ et $u(x)_A$ et leurs dérivées, qui satisfont aux équations de continuité. u^+ et u sont deux solutions de (1). J^α et $T^{\alpha\beta}$ sont alors les densités de «charge-courant» et d'«énergie-impulsion» ($J^\alpha = u_A^+ \gamma^{\alpha AB} u_B$).

(1) admet deux solutions fondamentales $D^{(0+)}(x, y)_{AB}$ et $D^{(1+)}(x, y)_{AB}^{(1)}$, symétriques en (xA) et (yB) , qui ont les singularités $\delta(R^2)$ et $R^{-2} (R^2 - (x^\alpha - y^\alpha)(x_\alpha - y_\alpha))$ sur le cône de lumière $R^2 = 0$ (ou des dérivées de $\delta(R^2)$ resp. R^{-2} , cf. par exemple FIERZ²). De $D^{(n+)}$ on forme les fonctions antisymétriques

$$D^{(n-)}(x, y)_{AB} = i_A^C D^{(n+)}(x, y)_{CB}.$$

Ajoutant à (1) $m(< f)$ conditions supplémentaires du type $C_p^A u_A = 0$ ($C_p^A = \text{constantes}$) ($p = 1, 2, \dots, m$), FIERZ a démontré qu'on arrive à des représentations irréductibles²). Pour celles-ci, on a $\int (dx)^3 T^{44} \leq 0$ ou > 0 suivant que u_A est une représentation univoque ou bivoque. (Le spin des quanta entier ou demi-entier donne une énergie totale non définie ou définie.)

2^o *Théorie quantifiée.* Nous devons distinguer a) entre spin entier ou demi-entier ($N - \frac{1}{2}$ ou N), b) entre commutation (statistique BOSE-EINSTEIN (BE)) ou anticommutation, statistique FERMI-

¹) Pour leur définition dans un cas particulier, cf. STUECKELBERG, C. R. Soc. de Phys. et d'Hist. Nat. de Genève **59**, 49 et 53 (1942).

²) FIERZ, *Helv. Phys. Acta* **12**, 3 (1939) éq. (4.2), (4.3), (8.1).

DIRAC (FD)), c) entre l'utilisation de la fonction $D^{(0\pm)}$ ou de la fonction $D^{(1\pm)}$, et d) entre $u^+ = u$ ou $u^+ \neq u$. (1) admet ainsi à priori $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ théories quantifiées. On peut démontrer que:

3° Les huit théories $u^+ \neq u$ amènent à des valeurs propres non entières de la charge électrique liée à un champ (par exemple d'un «électron» lié aux gouttelettes de Millikan).

4° Quatre théories $u^+ = u$ admettent, ou des énergies négatives infiniment grandes, ou rendent u_A identiquement nulle.

5° Les seules possibilités qui restent ainsi sont les quatre théories suivantes:

I. $(N + \frac{1}{2})$; FD; $D^{(0+)}$; $u^+ = u$; Théorie du positron de DIRAC-HEISENBERG (DH).

II. N ; BE; $D^{(0-)}$; $u^+ = u$; Théorie de PAULI-WEISSKOPF (PW)¹⁾

III. N ; FD; $D^{(1+)}$; $u^+ = u$.

IV. N ; BE; $D^{(1-)}$; $u^+ = u$.

Les théories III et IV sont identiques avec la *théorie du point matériel* exposée précédemment²⁾. La théorie III ne permet pas la décomposition

$$(N) \rightarrow (N' + \frac{1}{2}) + (N'' + \frac{1}{2})$$

d'un quantum à spin entier (Deuton ou «mésotron») en deux quanta à spin demi-entier (Proton + neutron ou «électron + neutrino»). Elle nous semble donc devoir être exclue.

Les formes II et IV sont deux théories différentes pour des quanta à spin entier. Mais leur seule différence physique semble être, que II (théorie PW) admet la création de *paires de quanta chargés* par un champ électromagnétique, même s'il n'y a pas de quantum chargé présent (*création spontanée*) tandis que IV ne fournit dans ce cas qu'une augmentation des quanta chargés proportionnelle au nombre des quanta chargés déjà présents (*création induite de paires de quanta*).

Appliquées à la composante «photon» du rayonnement cosmique, I et II (DH) et (PW) montrent une création spontanée de paires proportionnelle à Z^4 , tandis que la nouvelle théorie IV ne donnera qu'une contribution (induite) proportionnelle à $\sim Z^2$ (si l'on admet qu'un tel champ u_A de quanta chargés à spin entier (mésotron) entoure le proton-neutron et donne naissance à la force de Yukawa). (Z = charge nucléaire.)

¹⁾ Dans le rapport du congrès Solvay 1939, PAULI (Phys. Rev. **58**, 716 (1940), Rev. Mod. Phys. **13**, 203 (1941) arrive à la conclusion que seules les théories I et II existent parce qu'il exclut l'application de $D^{(1+)}$ et $D^{(1-)}$.

²⁾ STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **14**, 321, 588 (1941); **15**, 23 (1942).

La théorie IV a l'avantage sur II (PW) de rendre *impossible* la mesure de la « phase » du « champ complexe » ($i \equiv \sqrt{-1}$). Elle enlève ainsi toute possibilité d'observer la jauge des potentiels électromagnétiques. Pour un « *champ réel* », la nouvelle méthode est exclue, $D^{(1-)}$ n'existant pas.

Influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux

par JEAN WEIGLE (Genève).

On peut montrer que le réseau de Fourier (réciproque) d'un cristal parcouru par des ondes stationnaires de longueur d'onde $\lambda \left(= \frac{1}{k} \right)$ et d'amplitude $\tilde{\xi}$ est fait du réseau des points non perturbés placés en \tilde{b}_h et de points additionnels en $\tilde{b}_h + nk$ (n , entier). Les facteurs de structure carrés de ces points sont alors donnés par l'expression

$$F_{h,n}^2 = F_h^2 \sum_p J_p(x) J_{n-p}(x) \quad x = 2\pi (\tilde{b}_h \cdot \tilde{\xi})$$

où F_h est le facteur de structure associé à la réflexion en l'absence d'ondes et les J sont les fonctions de Bessel.

Cet effet produit un étalement de la réflexion des rayons X, ce que nous avons vérifié expérimentalement sur le quartz excité piezoélectriquement. Comme cet effet n'augmente pas linéairement avec l'ordre de la réflexion, mais croît beaucoup plus rapidement, nous n'avons pu l'observer que sur les réflexions d'ordre élevé. Alors qu'il est inobservable pour les réflexions sur $(11\bar{2}0)$ (2240) (3360) (4480) , il est très net sur $(55\bar{1}00)$ (66120) $(77\bar{1}40)$ pour les rayons K du Mo et de l'Ag. En fait, sur ce dernier plan, les réflexions voient leur largeur doublée. Toutes les observations ont été faites photographiquement.

Bemerkung zur Mesontheorie der Kernkräfte

von M. FIERZ (Basel).

In der korrespondenzmässigen (klassischen) Mesontheorie wird die Ladung der Kernteilchen durch einen Vektor $\tau = (\tau_{\xi}, \tau_{\eta}, \tau_{\zeta})$ beschrieben, der sich unter dem Einfluss des Mesonfeldes z^a bewegt. Die vom Verfasser früher aufgestellten Bewegungsgleichungen des Mesonfeldes und von τ (Helv. Phys. Acta XIV (1941), 257) können

durch einen Zusatzterm verallgemeinert werden und erhalten dann die Gestalt

$$\dot{\tau}_\xi = 2g [\tau \times \Delta z^a - g\tau''' + \frac{g}{a} \ddot{\tau}]_\xi$$

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}_\xi + i\dot{\tau}_\eta = 2ig\tau_\xi (\Delta z^a - g\tau''' + \frac{g}{a} (\mu\tau + \ddot{\tau})).$$

a spielt hier die Rolle eines Teilchenradius. Dass durch einen solchen Zusatz $\sim \frac{1}{a}$ die Streuquerschnitte die Grössenordnung $4\pi a^2$ erhalten, ist bekannt. Es ändert sich aber auch die Reichweite der Kernkräfte; und zwar wird diese, falls $a \ll \frac{\hbar}{\mu c}$ (μ = Mesonmasse) grösser als in der gewöhnlichen Theorie, wo sie den Wert $\frac{\hbar}{\mu c}$ hat. Es scheint bemerkenswert, dass im Falle $a = \frac{\hbar}{Mc}$ (M = Protonmasse) und $\mu = 180m$ (m = Elektronenmasse), die Reichweite von der Grössenordnung $\frac{1}{130} \frac{\hbar}{mc}$ wird, was den experimentellen Ergebnissen entspricht. Die Schwäche dieser Betrachtung ist, dass sie sich auf eine „klassische“ Theorie stützt, d. h. das Wirkungsquantum vernachlässigt.

Stabilisation du champ magnétique du cyclotron

par H. BAUMGARTNER, C. R. EXTERMANN, P. C. GUGELOT, P. PREISWERK et P. SCHERRER (Zürich E.P.F.).

On peut évaluer à 0,2⁰/₀₀ les fluctuations admissibles dans le champ magnétique d'un cyclotron si on veut obtenir un courant ionique stable. Le groupe fournissant le courant de l'électro-aimant donne une tension qui varie de 1 % par suite principalement des variations de fréquence du réseau. Une stabilisation est donc nécessaire.

Le système de stabilisation est commandé par le courant de l'électro-aimant. Les variations du courant autour de la valeur exacte font dévier un galvanomètre sensible qui commande une série de relais par l'intermédiaire de deux cellules photo-électriques et de deux thyratrons.

Pour éviter de longues interruptions du faisceau d'ions quand le champ varie brusquement, le stabilisateur doit agir très rapidement. Or tous les circuits dans lesquels le courant doit être corrigé présentent une résistance R et une self-inductance L . Si on effectue la correction en amenant simplement la tension E_0 à la valeur désirée $E_0 + E_1$, le courant tend vers la valeur $\frac{E_0 + E_1}{R}$ avec une

constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$. Pour diminuer le délai d'établissement du courant, on pourrait augmenter la résistance R , solution peu économique (pour diminuer de moitié la constante de temps du circuit de l'électro-aimant, on perdrait une puissance de 150 kilowatts). La solution à laquelle nous nous sommes arrêtés consiste à amener la tension à une valeur trop élevée, diminuant ensuite jusqu'à la valeur de régime. Si la pointe de tension est de la forme

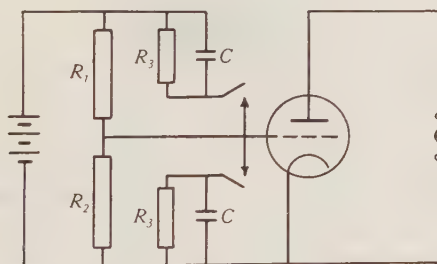
$$E = E_0 + E_1 + E_2 e^{-\frac{t}{\tau/m}}$$

le courant tend vers la valeur $\frac{E_0 + E_1}{R}$ avec la nouvelle constante de temps $\tau' = \tau/m$ pourvu que

$$E_2 = (m - 1)E_1.$$

On obtient donc le même résultat qu'en augmentant m fois la résistance, mais sans introduire une dissipation d'énergie supplémentaire.

Pour obtenir l'allure désirée de la force électro-motrice, nous introduisons dans un circuit une résistance ϱ composée par l'espace anode-cathode d'une lampe triode dont la tension de grille présente la variation voulue (fig.).



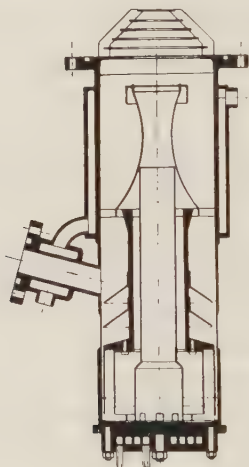
Resistance à caractéristique exponentielle. $\tau' = C \cdot \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2 R_3}$.

Lorsque le courant reste un certain temps à une valeur sensiblement différente de la valeur exacte, le point de fonctionnement de la dynamo est changé automatiquement par un rhéostat entraîné par un moteur (relais différé). On s'assure ainsi que le fonctionnement du stabilisateur est symétrique et que la valeur moyenne du champ est bien égale à la valeur choisie.

Untersuchungen an Öldiffusionspumpen

VON H. BAUMGARTNER, C. R. EXTERMANN, P. C. GUGELOT, P. PREISWERK und
P. SCHERRER (Zürich E.T.H.).

Für die Vakuumanlage des Cyclotrons musste eine Pumpe entworfen werden mit einer Sauggeschwindigkeit von 1000 l/sek. Um Unterlagen für die Konstruktion einer derartigen Öldiffusionspumpe zu gewinnen, haben wir systematische Messungen an Pumpen von kleinerem Typus mit 4,5 cm und 10 cm Öffnungsdurchmesser, ausgehend von einem Modell von HOLTSMARK¹⁾ und unter Verwendung der neuen Düsenformen von HICKMAN²⁾ durchgeführt.



Schema der 200-Liter-Pumpe (Öffnungsdurchmesser 10 cm).

Einfluss von Düsenform, Diffusionsspalt, Heizleistung und namentlich die Abhängigkeit der Pumpleistung von der Temperaturverteilung in der Dampfströmung wurden studiert.

Durch Abänderung der Pumpen unter Berücksichtigung der gewonnenen Erkenntnisse wurde eine Steigerung der Sauggeschwindigkeit von 6 auf 20 l/sec bei der kleinen Pumpe und von 70 auf 260 l/sec beim grossen Modell erreicht. Diese Angaben verstehen sich im Gebiet zwischen 10^{-4} und 10^{-5} mm Hg, in welchem die Sauggeschwindigkeit unverändert die angegebenen Werte beibehält.

Die Pumpen wurden auch zweistufig mit einer fraktionierenden Destillationsvorrichtung gebaut, so dass ohne Verwendung spezieller Hochvakuumöle dieselben Resultate erzielt wurden.

¹⁾ J. HOLTSMARK, W. RAMM und S. WESTIN: Rev. Sci. Instr. 8, 90, 1937.

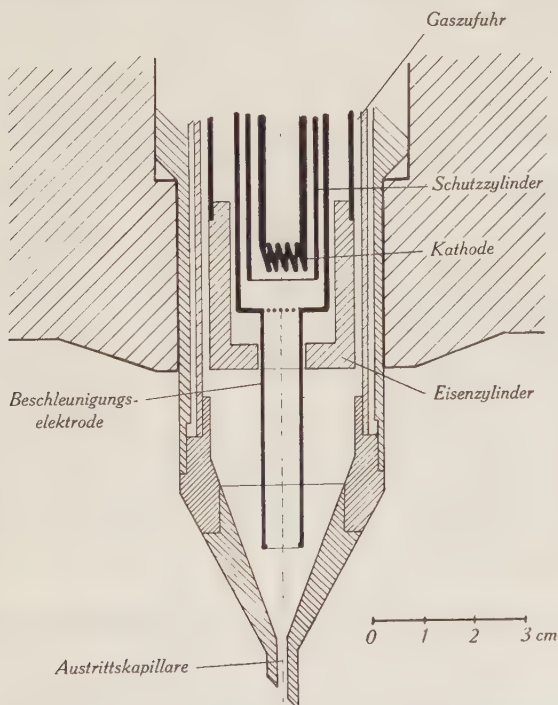
²⁾ KENNETH C. D. HICKMAN, J. App. Phys. 11, 303, 1940.

Auf Grund der Vorversuche wurden bei der Konstruktion der 1000-Liter-Pumpe die Flächen der Diffusionsspalte möglichst gross, hohe Düsentemperatur und grosse Dampfrohrdimensionen gewählt. Tatsächlich gelang es, die verlangte Saugleistung von 1000 l/sec zu erreichen.

Ionenquelle für das Cyclotron

VON H. BAUMGARTNER, C. R. EXTERMANN, P. C. GUGELOT, P. PREISWERK und P. SCHERRER (Zürich E.T.H.).

Für Cyclotrons wurden bis jetzt zwei Arten von Ionenquellen verwendet. Entweder wird über den Spalt der Beschleunigungselektroden (Dees) eine Glühkathode eingeführt und die Ionen werden im Spaltraum durch Elektronenstoss erzeugt¹⁾, oder es kommt eine Kapillarionenquelle mit Niedervoltbogen zur Anwendung²⁾.



¹⁾ E. O. LAWRENCE and D. COOKSEY, Phys. Rev. **50**, 1131, 1936.

²⁾ M. STANLEY LIVINGSTON, M. G. HOLLOWAY and C. P. BAKER, Rev. Sci. Inst. **10**, 63, 1939.

ALEXANDER ALLEN, J. FRANK. Inst., Oct. 1939.

Beim Cyclotron der ETH. haben wir die Ionenquelle durch eine Durchbohrung des Magnetjoches und der Polplatte in die Beschleunigungskammer eingeführt. Bei einer solchen Einführung steht für die Durchbildung der Quelle ein grösserer Raum zur Verfügung. Ferner wird erreicht, dass am Ort der Ionenquelle eine radiale Komponente des Magnetfeldes entsteht, die auf die Ionen fokussierend wirkt.

Die Ionenquelle (siehe Figur) besteht aus einer ausgedehnten Glühkathode, einer Beschleunigungselektrode (Zylinder mit Gitter) und einer Gegenelektrode mit der Austrittskapillare. An diese ist eine gegenüber dem Gitter negative Spannung angelegt, so dass die ionisierenden Elektronen im Raum zwischen der Austrittsöffnung und der Kathode hin und her pendeln. Die Gaszuführung erfolgt von oben. Die im Raum vor der Austrittskapillare gebildeten Ionen werden zur Öffnung hingezogen.

Bei kleinen Energien folgen sowohl die Elektronen wie die Ionen im starken Magnetfeld praktisch den magnetischen Kraftlinien. Es ist deshalb günstig, die Konvergenz der Kraftlinien am Ort der Ionenquelle auf die Austrittsöffnung hin zu verstärken. Mit einem zusätzlichen Eisenzylinder wird eine Konvergenz von 2 cm^2 Querschnitt in Kathodenhöhe auf 2 mm^2 bei der Austrittsöffnung erzeugt. Auf diese Weise wurde erreicht, dass trotz einer grossen Ausdehnung der Kathode und der strahlverbreiternden Raumladungswirkung eine enge Austrittskapillare verwendet werden konnte.

Die Störung der Homogenität des Feldes in der Mittelebene zwischen den Polplatten, die durch das Loch entstand, wurde durch eine Verengung des Polplattenabstandes gegen innen kompensiert.

Mit einer Emission von 50 Milliamp., einer Beschleunigungsspannung von 250 Volt und einem Gasdruck von 10^{-3} mm in der Ionenquelle wurde ein aus der Kapillaröffnung austretender Ionenstrom von 1 Milliamp. gemessen. Das Verhältnis Atomionen zu Molekülionen ist noch nicht bestimmt worden.

Farbblinde Stelle in einer sonst normal farhentüchtigen Netzhaut

von M. Besso (Genf).

Beim Blicken nach einer Verdunkelungsglühlampe aus einer Entfernung von 15—20 Metern erschien die Lampe zunächst hellblau. Zufällig schloss ich das rechte Auge und sah sie dann orangefarben; das rechte Auge sah sie hellblau, das linke orangefarben. Bei einer raschen Kopfbewegung blitzte das viel hellere Blau auch im linken

Auge wieder auf. Es erwies sich dann, dass bei indirektem Sehen — fixieren einer etwa 1 Meter von der Lampe entfernten Stelle — die blaue Farbe wieder auftrat. Bei genauerem Betrachten des blauen Lampenbildes im rechten, schwach astigmatischen Auge zeigte es sich von zwei kleinen, diametral liegenden rötlichen Fleckchen begleitet.

Herrn Prof. WEIGLE war so freundlich, mich den Versuch an einem künstlichen Stern, durch Verdunkelungsglas abgeblendet, wiederholen und auch das Absorptionsspektrum des Glases betrachten zu lassen. Das durchgehende Licht erwies sich als bestehend aus einem Gebiet im Blau, einem schmalen grünen Gebiet und einem ebenfalls schmalen, sehr hellen orangeroten Gebiet.— Die Astigmatismus-Erscheinung entdeckte Herr Prof. WEIGLE auch bei seinen farbnormalen Augen.

Die Beobachtung steht im Einklang mit den Theorien, die organisch verschiedene, getrennt beeinflussbare farbenempfindliche Elemente in den farbenempfindlichen Organen der Netzhaut postulieren.

Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone pour l'enregistrement continu des variations de résistance électrique

par E. BRASEY (Fribourg).

La détermination des caractéristiques du pont de Wheatstone n'est pas la même selon que l'on envisage son emploi en méthode de zéro ou pour l'enregistrement d'une variation de résistance au moyen de l'élongation du galvanomètre de pont. Dans le premier cas, on définit la sensibilité par rapport au courant qui traverse la résistance à mesurer, courant que l'on tend à réduire le plus possible

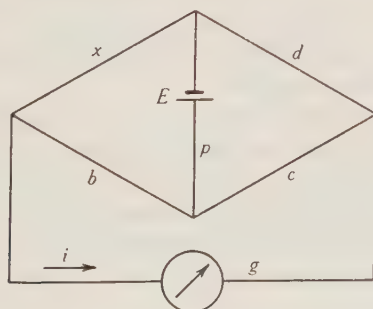


Fig. 1.

afin d'éviter les erreurs de mesure dûes à l'élévation de température; les équations se simplifient immédiatement du fait que le

courant dans le galvanomètre est nul et que le courant d'alimentation du pont peut être considéré comme constant. Dans le second cas auquel est consacrée cette étude, c'est-à-dire lorsque le pont, maintenu invariable, doit indiquer une variation de résistance par l'élongation du galvanomètre, la sensibilité se définit par rapport à la tension d'alimentation E et dépend de cinq paramètres: les trois bras constants du pont b , c , d , la résistance g du galvanomètre et celle du circuit d'alimentation p (fig. 1). En outre, la sensibilité n'est pas constante: pour un montage donné, elle varie en fonction de la résistance variable x et passe par un maximum.

Quelles sont les conditions pour que, les limites de la résistance variable étant connues, le courant d'enregistrement ait une valeur adéquate à la sensibilité du galvanomètre et à quelle valeur de la résistance variable faut-il faire correspondre le maximum de sensibilité pour obtenir l'enregistrement le plus favorable à l'étude du phénomène que l'on se propose d'étudier par voie électrique?

Pour résoudre ce problème il est nécessaire de réduire à quatre, au plus, le nombre des paramètres en faisant coïncider le maximum de sensibilité avec l'équilibre du pont. Cette condition présente l'avantage d'assigner au maximum de sensibilité une place précise dans le domaine d'enregistrement en le faisant correspondre à une valeur bien défini x_0 de la résistance variable; l'examen des résultats montre que cette condition n'écarte aucune des solutions qui présentent, pour la sensibilité, le maximum maximorum.

Le bras c du pont, opposé à la résistance variable, est utilisé comme paramètre d'orientation. Il présente trois valeurs remarquables,

$$\frac{c}{x_0} \leq 3 - \sqrt{8}, \quad \frac{c}{x_0} = 1, \quad \frac{c}{x_0} \geq 3 + \sqrt{8}$$

qui déterminent, pour les valeurs acceptables de g et de p jouant le rôle de variables, trois domaines fixes entre lesquels s'intercalent deux domaines à limite mobile.

Les deux autres bras du pont, b et d , obéissent aux relations: $(c + p)(x_0 - g)b^2 + (cx_0 + pg)(x_0 - c)b + cx_0(c + g)(x_0 - p) = 0$ et $bd = cx_0$.

La sensibilité est inversement proportionnelle à une grandeur R qui a les dimensions d'une résistance et qui se détermine au moyen de l'équation:

$$R^2 - \left(\frac{c + g}{x_0 - p} \cdot \frac{cx_0 - p^2}{c} + \frac{c + p}{x_0 - g} \cdot \frac{cx_0 - g^2}{c} \right) R + \frac{c + g}{x_0 - p} \cdot \frac{c + p}{x_0 - g} \cdot \left(\frac{cx_0 - pg}{c} \right)^2 = 0$$

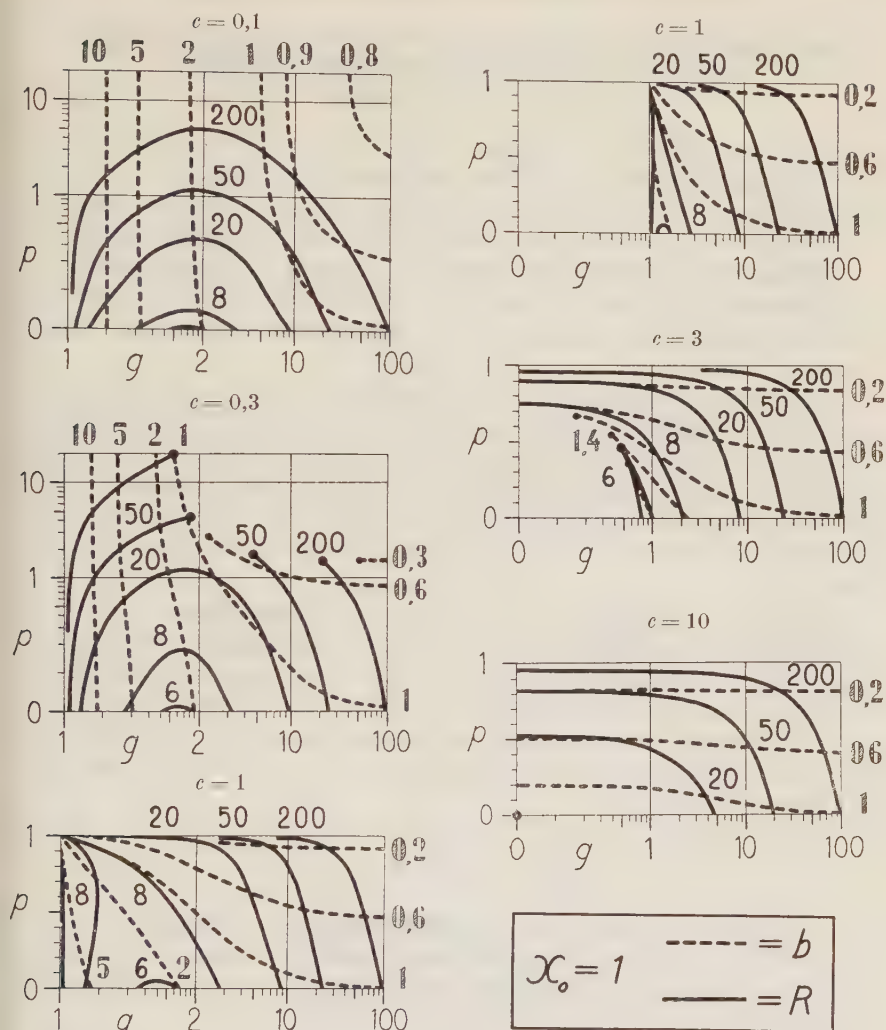


Fig. 2.

Les résultats sont présentés sous forme de faisceaux de courbes en fonction des variables g et p et des paramètres b et R ; leur utilisation pratique est immédiate (fig. schémat. 2). Pour le cas limite, $p = 0$, qui est près d'être réalisé expérimentalement lorsque les résistances des bras de pont sont élevées, on a les relations simples:

$$R' = b \cdot \frac{b + x_0}{b - x_0} \quad \text{et} \quad g = x_0 \left(\frac{b}{b - x_0} - \frac{c}{c + x_0} \right)$$

Une étude détaillée paraîtra dans les *Helv. Phys. Acta.*

Méthode nouvelle de détermination des dimensions des ions par la déperdition d'un écoulement gazeux ionisé unipolaire

par G. JOYET (Lausanne).

Dans un cylindre métallique, de section circulaire, on considère un écoulement gazeux de vitesse uniforme u parallèle à l'axe. Le gaz est ionisé à l'origine de l'écoulement et on ne laisse passer¹⁾ que les ions d'un seul signe. L'écoulement est unipolaire.

Entre la production constante à l'origine de l'écoulement et la disparition des ions à la paroi, il s'établit dans l'écoulement un régime permanent de distribution des densités ioniques n que nous avons recherché.

Pour que le problème soit accessible au calcul, on néglige la « diffusion électrique » des charges, c'est-à-dire le mouvement qu'elles prennent dans le champ de la charge d'espace. On ne tient compte que de la diffusion gazeuse proportionnelle au gradient de densité ionique et au coefficient de diffusion D du « gaz ionique » dans le gaz neutre. La simplification est admissible aux densités basses.

Dans les coordonnées cylindriques de l'écoulement (x, r) , l'équation différentielle qui régit la distribution des densités n s'établit en considérant aux coordonnées x, r un tore élémentaire de dimensions axiales et radiales dx et dr . En établissant le bilan des charges qui entrent et sortent du tore par diffusion et par la translation du gaz, et en exprimant que ce bilan est nul, on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \frac{u}{D} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} = 0.$$

Si l'on prend le même tore élémentaire au voisinage immédiat de la paroi ($r = R$), et si l'on exprime en théorie cinétique que chaque ion qui heurte la paroi disparaît en tant qu'ion, on est conduit à la condition

$$\text{en } r = R, \quad n: - \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{4}{3} l. \quad (1)$$

qui suppose une distribution de MAXWELL des vitesses. l est le libre parcours moyen des ions dans le gaz.

Les autres conditions sont: 2) n fini; 3) en $x = 0$, $n = N_0(r)$, fonction déterminée; 4) $x \rightarrow \infty$, $n \rightarrow 0$.

M. G. DE RHAM nous a donné la solution de l'équation différentielle précédente,

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i x} J_0(k_i r).$$

¹⁾ G. JOYET. — H.P.A. XIII, 339, 1940.

Les k_i sont fixés par la condition (1) qui devient $k_i R \cong \varrho_i$; les ϱ_i étant les zéros successifs de la fonction J_0 de BESSEL.

$$\lambda_i \cong \frac{\pi \varrho_i^2 D}{G}$$

où G est le débit gazeux. Les C_i sont fixés dans le développement par la condition 3).

Expérimentalement, on mesure le débit ionique

$$Q = 2\pi u \int_0^R n r dr$$

dans une section. On montre que les harmoniques de BESSEL, d'ordre supérieur, s'amortissent très rapidement — pour les ions légers à la pression et à la température voisines de la normale — et qu'il suffira pratiquement de tenir compte de la fondamentale seule. L'expression du débit ionique devient

$$Q = Q_0 e^{-\lambda_1 x}.$$

La détermination expérimentale du coefficient d'affaiblissement λ_1 , permettra de fixer la valeur du coefficient de diffusion et par lui les dimensions des ions si l'on admet une relation supplémentaire

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma'}\right)^3 = \frac{m}{m'}$$

entre les diamètres et les masses des ions et des molécules déjà adoptée par LENARD²⁾.

Untersuchung des Aufladevorganges im Kaskadengenerator

von M. JAGGI (Zürich).

Der in der Kernphysik und in der Röntgentechnik verwendete Höchstspannungs-Kaskadengenerator (abgek. K.G.) besitzt eine charakteristische und exakt reproduzierbare Spannungsaufbaukurve. Wenn man zwischen P_1 und dem dauernd geerdeten Schalt-punkt P_0 (Fig. 1) eine Wechselspannung $U_1 = U_0 \sin \omega t$ anschliesst, so wird der K.G. schrittweise aufgeladen und nähert sich asymptotisch dem stationären Betriebszustand. Es wurde nun über einige theoretische und experimentelle Untersuchungen dieses Einschwingungsvorganges im unbelasteten K.G. mit Kondensatoren gleicher Kapazität berichtet. Das Ergebnis sei im Folgenden kurz dargestellt.

²⁾ P. LENARD. — Ann. d. Phys. **60**, 329—80, 1919; **61**, 665—741, 1920.

Während jeder Wechselspannungsperiode durchläuft der *ein-schwingende* K.G. eine bestimmte Anzahl von genau definierten Betriebszuständen. Während des Durchlaufens der ersten Halbperiode (vom Maximum bis zum Minimum) zünden der Reihe nach von oben nach unten alle nach links gerichteten Ventile Z_{2n-1} , Z_{2n-3} , ... Z_3 und Z_1 . Dies hat zur Folge, dass die im rechten Generatorast aufgestapelten Ladungen teilweise auf die linksseitigen Kondensatoren C_{2n-1} , C_{2n-3} , ... C_3 und C_1 abfließen. In der zweiten Halbperiode werden alle Potentiale des linken Astes vorerst gehoben, und dann zünden der Reihe nach von oben nach

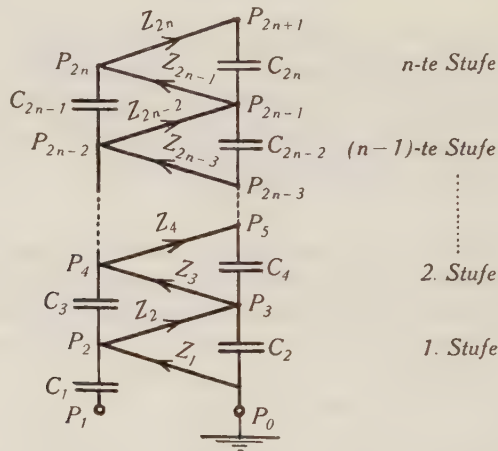


Fig. 1.

Schaltschema des n -stufigen Kaskadengenerators (nach GREINACHER).

n = Stufenzahl C = Kondensator Z = Ventil.

unten alle nach rechts gerichteten Ventile Z_{2n} , Z_{2n-2} , ... Z_4 und Z_2 . Dadurch werden die linksseitigen Ladungen teilweise auf die nächsthöherliegenden rechtsseitigen Kondensatoren geschoben. Die verschiedenartige Tätigkeit der beiden Generatoräste kann man sich dadurch versinnbildlichen, dass man die rechtsseitigen Kondensatoren als *Sammelkondensatoren* und die linksseitigen als *Schubkondensatoren* bezeichnet. Im stationären Zustand geht die komplizierte Potentialbewegung der Schubkondensatoren über in eine Sinusschwingung. Der gesamte linke Generatorast schwingt synchron mit dem Eingangspotential U_1 . Der rechte Ast befindet sich alsdann im elektrostatischen Gleichgewicht.

Für die formelmässige Berechnung des Aufladevorganges wird der Anfangszustand einer beliebigen (k -ten) Einschwingungsperiode mit dem Anfangszustand der nächstfolgenden Periode in Beziehung

gebracht. Die nach diesem Verfahren als Rekursionsformeln ermittelten *Differenzengleichungen* liefern alsdann die gesuchten Spannungsaufbaufunktionen. Die Rechnung ergibt beispielsweise für den Einsatz der k -ten Einschwingungsperiode des Schaltpunktes P_3 am einstufigen K.G. (= GREINACHER-Gleichrichter-Schaltung) ein Potential

$$U_{k,3} = 2 U_0 \left[\sum_{\lambda=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda + \left(\frac{1}{2}\right)^k q_1 \right] \quad \text{wobei } k = 1, 2, \dots \infty.$$

Der entsprechende Ausdruck für P_5 am zweistufigen K.G. lautet:

$$U_{k,5} = 4 U_0 + \frac{1}{2} U_0 (q_1 - 4 - 2\sqrt{2}) \left[\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} + 1) \right]^{(k-1)} \\ + \frac{1}{2} U_0 (q_1 - 4 + 2\sqrt{2}) \left[\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} - 1) \right]^{(k-1)}$$

(die Konstante q_1 berücksichtigt die Einschaltphase). Die spannungsverdoppelnde bzw. vervierfachende Eigenschaft des eingeschwungenen Generators folgt unmittelbar aus diesen Aufbauformeln: $\lim_{k \rightarrow \infty} U_{k,3} = 2 U_0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} U_{k,5} = 4 U_0$. Alle Potentialkurven

der verschiedenen Schaltpunkte bestehen aus aneinandergereihten Sinuskurvenstücken. Die Aufladekurven des zwei- und des mehrstufigen K.G. verlaufen unregelmässig oszillierend. Mit zunehmender Periodenzahl k verschwinden diese Oszillationen und die Kurve nähert sich asymptotisch der konstanten Endspannung $2 n U_0$ (vgl.



Fig. 2.

Auflade-Oszillogramm des zweistufigen Kaskadengenerators (Schaltpunkt P_5).

Fig. 2). Die Aufladekurve des einstufigen K.G. verläuft monoton ansteigend.

(Die ausführliche Arbeit erscheint demnächst im *Bulletin* des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins.)

Bemerkung zum logisch-physikalischen Parallelismus

von M. Besso (Genf).

Bei der Schematisierung der physikalischen Erscheinungswelt im raumzeitlichen Bilde ergeben sich der Erfahrung schlechthin und von vornherein unzugängliche Stellen. Bemerkt wurde dies zunächst bezüglich des Unendlichen und des unendlich Kleinen. Jeder im logischen Aufbau undefiniert eingeführte Begriff, bzw. jedes Vorstellungselement, jedes Axiom, jedes Postulat bezeichnet eine solche singuläre Stelle. Physikalisch — und darin liegt die heuristische Bedeutung dieser Bemerkung — scheint sich eine solche Stelle in der Erfahrung durch eine die unzugängliche Stelle einschliessende Erscheinung auszuzeichnen. So zunächst bei der Geschwindigkeit, wo das Unendliche durch die Lichtgeschwindigkeit „abgebildet“ wurde; bei der Entfernung, wo es durch die Einstein-de Sitter-Hubbel'sche Entfernungsgrenze bezeichnet wird. Beim unendlich Kleinen, bzw. beim Ort, durch die Materieelemente, bei den Ladungen, den magnetischen Momenten, durch die Elektronen. Dem undefinierbaren Begriff der geraden Linie entspricht der physikalische Gehalt der allgemeinen Relativitätstheorie.

Der prinzipiellen Unabgrenzbarkeit zwischen Traum und Wachbewusstsein entspricht, als Physikalisches, die Härte der realen Welt.

Es ist zu vermuten, dass die heuristische Bedeutung der Bemerkung nicht etwa erschöpft ist.

Über die Abhängigkeit der Flimmer-Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges von den Messbedingungen*)

von Herbert Lüthy.

(26. III. 1942.)

Zusammenfassung. Die Neubestimmungen der spektralen Hellempfindlichkeit $V(\lambda)$, welche vor 1939 im Hinblick auf eine evtl. Abänderung des internationalen Mittelwertes $V(\lambda, \text{int})$ unternommen worden waren, liessen eine Reihe von Fragen offen.

Die vorliegende Untersuchung wurde von einem besonders aufgebauten Spektral-Flimmerphotometer durchgeführt. Einige charakteristische Ergebnisse:

Es können Bedingungen angegeben werden, unter denen sich $V(\lambda)$ von $V(\lambda, \text{int})$ zwischen $520 \text{ m}\mu$ und $650 \text{ m}\mu$ um weniger als 5% unterscheidet.

Generell bestätigt sich die Verschiebung des Maximums von $V(\lambda)$ von $555 \text{ m}\mu$ nach $560 \text{ m}\mu$.

Durch Übergiessen sowohl des Umfeldes als des Flimmerfeldes mit zeitlich konstantem Licht wird der Flimmerabgleich verbessert.

Die Abhängigkeit von $V(\lambda)$ vom Vergleichslicht (λ_2) steigt bis zur Grössenordnung 5%, wenn λ_2 im roten oder blauen Ende des Spektrums gewählt wird. Dasselbe gilt von den Abweichungen vom Additionsgesetz.

Die Änderung von $V(\lambda)$ mit der Leuchtdichte ist von derselben in erster Annäherung logarithmisch abhängig.

Wenn man von einem Beobachter den Grad der Abhängigkeit seines $V(\lambda)$ von Leuchtdichte, Flimmerfrequenz, Zusatzbeleuchtung usw. kennen lernen will, so muss man nicht sein Gelb/Blaugrün-Verhältnis, sondern sein Rot/Grün-Verhältnis in Funktion dieser Parameter untersuchen.

Einleitung.

Die auf unsere Netzhaut fallenden Strahlen der Wellenlängen $400 \dots 700 \text{ m}\mu$ lösen in uns die Empfindungen „farbig“ und „hell“ aus. Die Hellempfindlichkeitsfunktionen $V(\lambda)$ vergleichen die Hellempfindungen, die von verschiedenfarbigen Spektrallichtern gleicher Energie nach verschiedenen Methoden unter verschiedenen Bedingungen erzeugt werden.

Den praktischen lichttechnischen Bedürfnissen entsprechend hat die Internationale Beleuchtungskommission 1924¹⁾ $V(\lambda, \text{int})$

*) Dissertation Basel 1942. Siehe auch die vorläufige Mitteilung H.P.A. 14, 145, 1941.

provisorisch festgesetzt: Siehe Kurve $V(\lambda, \text{int.})$ in Fig. 1 und die Zahlenwerte in Tab. 2.

Wir möchten vorausschicken, dass man mit „ $V(\lambda)$ “ nicht den Begriff von etwas vollkommen Präzisierbarem verbinden darf, wie es leider zu oft geschehen ist. So paradox es klingt: $V(\lambda)$ existiert nicht; wir müssen es konstruieren.

Unsere Messungen zur Bestimmung von $V(\lambda)$ erfolgen ausschliesslich nach dem sog. Flimmerverfahren. Dasselbe beruht darauf, dass dem Auge die zu vergleichenden Leuchtdichten auf

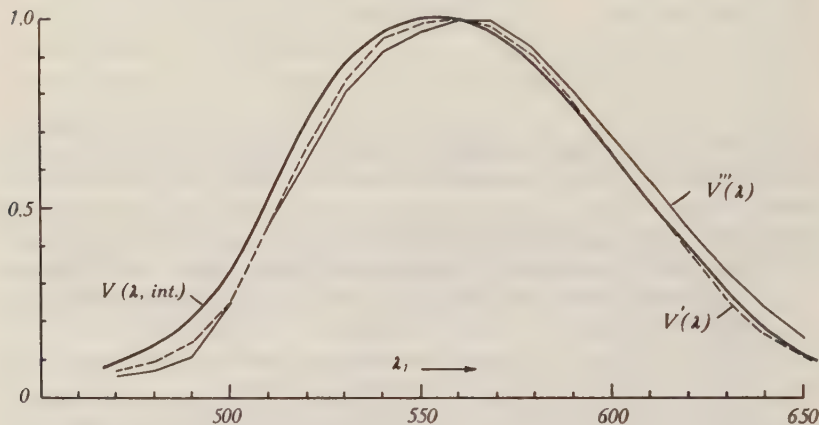


Fig. 1.

Zusammenstellung einiger $V(\lambda)$: Dick ausgezogen: $V(\lambda, \text{intern.})$. $V'(\lambda)$: Mittelwert für 19 farbnormale Beobachter, Flimmerleuchtdichte 500 asb, Feldgrösse $1,5^\circ$, übergossen mit 100 asb weiss. $V''(\lambda)$: entsprechend für 35 asb, übergossen mit 35 asb.¹

derselben Fläche in raschem Wechsel dargeboten werden und dass hierbei das Verschwinden des Farbwechsel-Eindrucks bei niedrigerer Frequenz erfolgt als das Verschwinden des Eindrucks des Helligkeitswechsels. Es gibt also einen schmalen Frequenzbereich, für welchen, im Sinne steigender Frequenz betrachtet, das Auge nicht mehr auf Farbwechsel, aber doch noch auf Helligkeitswechsel („Flimmern“) anspricht. Es ist nun stets möglich, durch Veränderung der Stärke der einen Leuchtdichte ein Minimum des Flimmerns und bei leichter Erhöhung der Wechselfrequenz ein Verschwinden des Flimmerns zu erreichen. Diesen Zustand zieht man zur Definition der „Gleichheit“ im Sinne des Flimmerverfahrens heran.

Selbst für dieses Verfahren, bei welchem mehr als bei jedem anderen subjektiven Verfahren auf Linearität gerechnet werden

kann, wo also am meisten Hoffnung auf richtig integrierende Bewertung der Strahlung $S(\lambda)$ gemäss dem Ausdruck

$$\int S(\lambda) V(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

besteht — selbst in diesem Falle ist $V(\lambda)$ nach bestgemeinter Festlegung der äusseren Bedingungen (Typus des Flimmerphotometers, Flimmerfrequenz, Leuchtdichte, Zusatzleuchtdichte, Feldgrösse, Jahreszeit, Ernährung, Vorbehandlung des Auges) namentlich an den Enden des Spektrums noch ein bis einige Prozent von den inneren Bedingungen (gesamte Verfassung, momentaner Stand der Übung in der Wahl des Kriteriums „flimmerfrei“) des Beobachters abhängig, so dass man besser beim einzelnen Beobachter nur summarisch von den charakteristischen Zügen des $V(\lambda)$ -Funktionalen spricht. Statistisch lässt sich dann stets aus solchem Ausgangsmaterial durch Mittelbildung eine einfache Funktion konstruieren. Ob man eine solche Funktion dann noch „wahres“ oder „wirkliches $V(\lambda)$ “ nennen will, ist Sache der Übereinkunft.

Die wichtigsten $V(\lambda)$ -Bestimmungen sind in der den Berichten der Internationalen Beleuchtungskommission²⁾ entnommenen Fig. 2 berücksichtigt, und zwar als Verhältnis

$$f(\lambda) = \frac{V(\lambda)}{V(\lambda, \text{int})} \quad (2)$$

Die durch Vierecke gekennzeichneten Kurven beziehen sich auf das Kleinstufenverfahren, bei welchem der gesamte zu überwindende Farbensprung derart in einige kleinere Sprünge zerlegt wird, dass die Ungleichfarbigkeit der nebeneinanderliegenden Flächen zwar merklich ist, aber ein Urteil „gleichhell“ nicht zu stark erschwert wird.

Alle übrigen Kurven beziehen sich auf das Flimmerverfahren. Bei den durch Dreiecke bezeichneten Kurven wird $V(\lambda)$ so *gewählt*, dass die aus diesem $V(\lambda)$ und aus den Durchlässigkeitsfunktionen von Farbfiltern berechneten Durchlässigkeits-Koeffizienten sich mit den entsprechenden flimmerphotometrisch gemessenen Durchlässigkeiten dieser Filter decken.

Die starken Abweichungen der verschiedenen Kurven in Fig. 2 von der horizontalen Geraden zeigen deutlich, dass es sich lohnt, von einem $V(\lambda)$ -Problem zu sprechen. Im wesentlichen sind es die Kurven der obersten Gruppe (1 ... 7), die zur Bildung von $V(\lambda, \text{int})$ führten. Die zweite Gruppe (8 ... 11 einschliesslich 12), sowie Untersuchungen von ARNDT³⁾, DRESLER⁴⁾ und RIECK⁵⁾ an den Linien 546, 578 und 589 veranlassten das Deutsche Beleuchtungskomitee, die Internationale Beleuchtungskommission auf die Notwendigkeit einer Neubestimmung von $V(\lambda)$ aufmerksam zu machen.

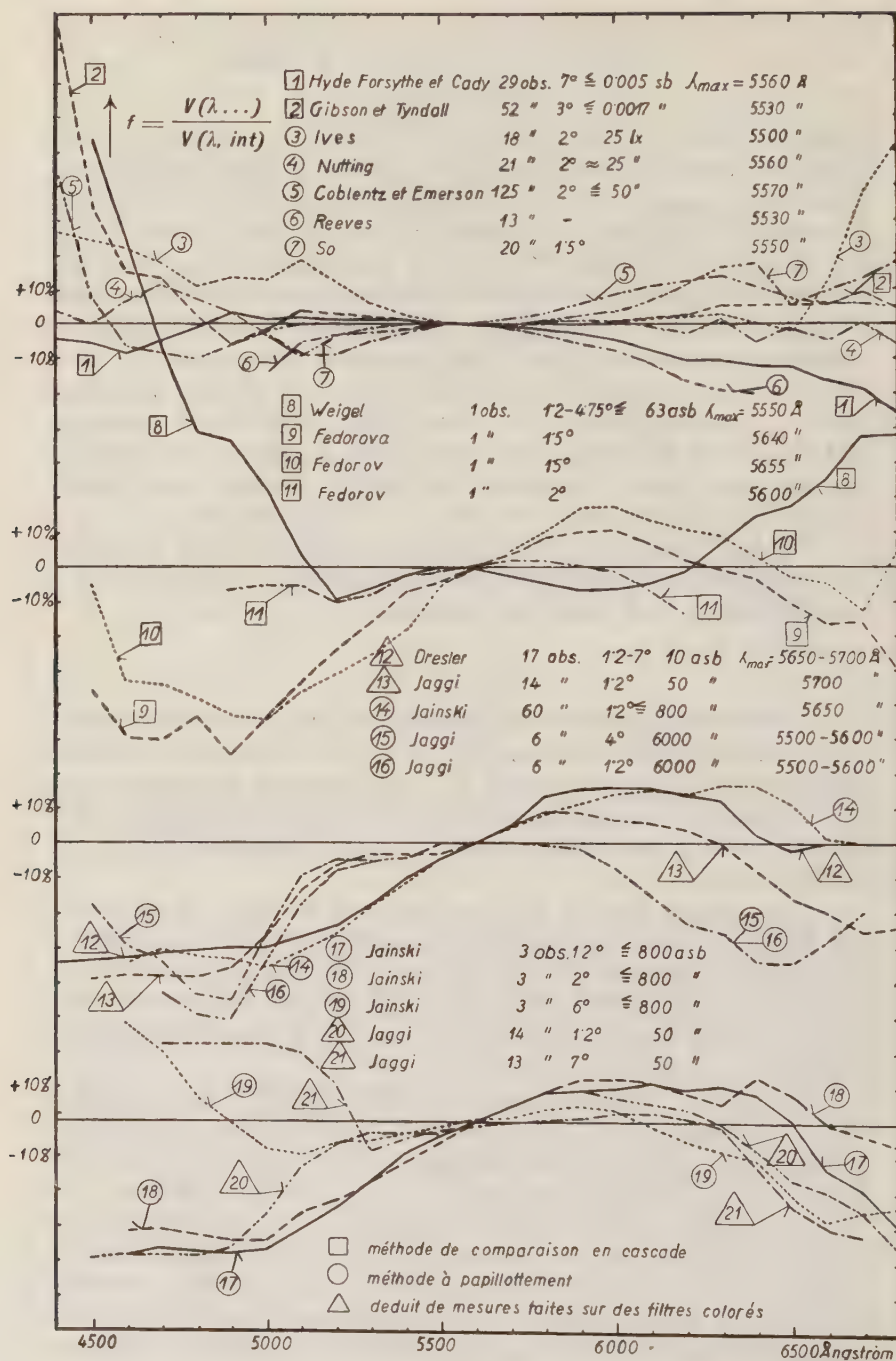


Fig. 2.

Übersicht über $V(\lambda)$ -Bestimmungen, Stand Mitte 1939. Aus Compte-rendu de la Commission Internationale de l'Eclairage (1939, Sitzung in Scheveningen), Report CT 5.

Die in den Jahren 1937/38 von DRESLER⁶⁾, PRESTON⁷⁾, JAGGI⁸⁾, JAINSKI⁹⁾ und FORSYTHE, BARNES und SHRIDER¹⁰⁾ gemachten Anstrengungen brachten eine weitgehende, aber nicht vollkommene Klärung der Sachlage.

Dem damaligen Stand der Erkenntnis entsprechend fasste die Internationale Beleuchtungskommission im Jahre 1939 u. a. folgende Beschlüsse:

1^o Tout résultat de mesure photométrique doit être placé . . . sur la base fondamentale unique définie par la relation

$$B = K_m \cdot \int E(\lambda) V(\lambda) d\lambda$$

2^o Il n'y a pas lieu de changer les facteurs de visibilité relative actuellement en vigueur.

Den allgemein niedrigen Verlauf der neueren Kurven *im Blau* deutet man einstweilen als Feldgrösse-Effekt: Heute braucht man eher kleinere Flimmerfelder, deren Bilder vollständig innerhalb des gelben Fleckes der Netzhaut fallen. Die Diskrepanzen *im Rot* sind im wesentlichen der starken Leuchtdichteabhängigkeit zuzuschreiben.

Diese beiden aus Fig. 2 ersichtlichen charakteristischen Züge, die übrigens seit IVES¹¹⁾ andeutungsweise bekannt sind, aber lange Zeit nicht genügend gewürdigt wurden, stellen eigentlich alles dar, was man an dem in Fig. 2 enthaltenen Material wirklich „versteht“.

Ausserdem besteht die Vermutung, dass die Form von $V(\lambda)$ sich mit der Jahreszeit ändert^{12) 13)} (Vitamin A?), und zwar soll die f -Kurve gegen Rot im Winter mehr ansteigen als im Sommer: Effekt 5% im Verhältnis $V(589)/V(546)$. Es liegen bis jetzt aber nur systematische Messungen an den Linien 546, 578 und 589 vor. Über das jahreszeitliche Verhalten im Rot weiss man so gut wie nichts. Es ist verfrüht, einen grossen Anteil der im Rot noch bestehenden Streuung bereits jetzt dem Saison-Effekt zur Last zu legen. Wir haben in dieser Arbeit darauf geachtet, dass nur Werte miteinander zum Vergleich gelangen, die nicht von diesem Effekt betroffen sein können.

Zusammenfassend über den Stand der $V(\lambda)$ -Frage orientieren der Sitzungsbericht der Internationalen Beleuchtungskommission 1939²⁾ und die Berichte von DRESLER¹⁴⁾ und KÖNIG¹⁵⁾.

Engere Problemstellung.

Vorab einige stets wiederkehrende Bezeichnungen und Abkürzungen:

$V(\lambda, \dots)$ spektrale Hellempfindlichkeit;
 λ_1, λ_2 Wellenlänge, λ_2 Wellenlänge des Vergleichslichtes;
 $f(\lambda) = V(\lambda)/V(\lambda, \text{int})$ (sog. f -Darstellung);

B_F Leuchtdichte des Flimmerfeldes (in asb);

B_{U+IZ} Umfeld- und Infeld-Zusatzleuchtdichte;

1 asb (Apostilb) = $\frac{1}{\pi \cdot 10^4}$ Stilb = $\frac{1}{\pi \cdot 10^4} \cdot \text{Kerzen/cm}^2$;

α Flimmerfeldgrösse, bei uns stets $1,5^0$.

Der Vergleich unserer Arbeit mit derjenigen von JAGGI, der ersten im Eidg. Amt für Mass und Gewicht ausgeführten $V(\lambda)$ -Bestimmung, nimmt hier naturgemäss einen breiten Raum ein, da die beiden Arbeiten in gewissem Sinn ein Ganzes darstellen.

Die verschiedenen Autoren arbeiten meist nur mit *einer* Flimmeranordnung. Solange sogar nur innerhalb der Flimmermethode Unterschiede zwischen den mit Spektrallichtern und Filterlichtern gewonnenen Ergebnissen, sowie Unterschiede im Flimmerphotometer-Typus zur Diskussion stehen und überdies Zweifel an den nicht ganz einfachen Energiemessungen und den Leuchtdichteangaben bei einigen Autoren berechtigt erscheinen, ist es wünschenswert, in demselben Institut mit möglichst denselben Beobachtern auf möglichst viele Arten $V(\lambda)$ zu bestimmen.

Unsere Aufgabe besteht darin, die Abklärung tunlichst so weit zu fördern, dass die Untersuchung eines Beobachters vor seiner Verwendung zu technischen Messungen nur noch einiger Test-Messungen mit gefiltertem Glühlampenlicht bedarf. In erster Linie handelt es sich um folgende Teilaufgaben:

1) *Mittelwert*. Es ist ein weiterer Beitrag zur Frage des Mittelwertes für Spektrallichter bei mittleren Messbedingungen (35 bis 500 asb) zu leisten.

JAGGI hat seinerzeit $V(\lambda)$ für die schon fast blendend wirkende Leuchtdichte von 6000 asb ($\approx 1/5$ Kerzen je cm^2) für Spektrallichter (mit Glühlampenlicht als Vergleichslicht untersucht. Die Messungen waren mühsam, so dass in vorliegender Arbeit mit maximal 500 asb gearbeitet werden soll. Diese Einsparung gestattet Verwirklichung eines homogeneren Flimmerfeldes und damit eines bessern Flimmerabgleichs, als dies bei JAGGI der Fall war. Unsere Ergebnisse bei 35 asb werden mit den von JAGGI bei ca. derselben Leuchtdichte auf ganz andere Weise, nämlich mit dem Differenz-Filterverfahren mittelst eines Bechstein-Flimmer-Photometers gewonnenen Werten zu vergleichen sein.

2) $V(\lambda_1; \lambda_2)$. Das Standardauge arbeitet gemäss Ausdruck (1) eindeutig und linear, d. h.:

a) Die Form von $V(\lambda)$ ist unabhängig vom Vergleichslicht λ_2 .

b) Die einzelnen spektralen Komponenten tragen unabhängig voneinander additiv zum Helligkeitseindruck bei.

Die Abhängigkeit der Funktion $V(\lambda_1; \lambda_2)$ vom Parameter λ_2 , mit andern Worten die Abhängigkeit vom Weg in der Farbmännigfaltigkeit ist näher zu untersuchen, weil in dieser Hinsicht die Literatur eine Lücke aufweist und weil festzustellen ist, ob ein von KÖNIG²⁰⁾ vermuteter Zusammenhang zwischen der Grössenordnung der Abweichungen vom Axiom a) und denjenigen vom Axiom b) besteht.

3) $V(\lambda; B_F)$. Es ist eine Besonderheit des Flimmerversfahrens, dass namentlich im Rot $V(\lambda)$ stark von B_F abhängt. Die neueren Messungen beziehen sich alle auf gefiltertes Glühlampenlicht. Die Untersuchung soll hier auf Spektrallicht ausgedehnt werden.

4) $V(\lambda_1; B_{U+IZ})$. Bei Jaggi wird die Annehmlichkeit des Übergiessens von Umfeld und *Infeld* mit konstanter Zusatzleuchtdichte B_{U+IZ} hervorgehoben. Da es sich bei dieser $U+IZ$ -Beleuchtung um eine Massnahme handelt, die allgemein als Kunstgriff zur Erleichterung des Flimmerabgleichs empfohlen werden kann, ist $V(\lambda)$ in Funktion von B_{U+IZ} für verschiedene B_F zu bestimmen.

Ältere Messungen an *einem* Beobachter liessen vermuten, dass sich durch starke $U+IZ$ -Leuchtdichten die Leuchtdichteabhängigkeit von $V(\lambda)$ im Rot beträchtlich reduzieren lasse. Es ist zu untersuchen, ob dieser Vermutung allgemeine Gültigkeit zukommt. Leider wird sich zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

Apparatur.

Der Aufgabestellung entsprechend wurde ein Spektral-Flimmerphotometer aufgebaut, das jede Wellenlänge mit jeder andern zu vergleichen gestattet. Um die gewünschte Leuchtdichte von 500 asb zu erhalten, wurde mit wenig zerstreuten Strahlenbündeln gearbeitet. Eine Anordnung bestehend aus Wolframdrahtlampe, Monochromator und Bechstein-Photometer mit Gipsprisma wäre zu lichtschwach. Wir verwenden deshalb einen Aufbau bzw. einen Strahlengang gemäss Fig. 3; die Arbeitsweise geht aus dem Text unter dieser Figur hervor.

Vorfilterung. Durch passende Wahl der Vorfilter (zwischen 450 und 500 $m\mu$ 2 mm BG 14, von 510 ... 550 $m\mu$ 2 mm BG 7, von 550 ... 600 $m\mu$ 2 mm BG 14, von 600 $m\mu$ an 2 mm RG 6) und der Spaltweiten (reproduzierbar abgelesen an den Zeigern Z) wird in einem Bereich von 470 ... 640 $m\mu$ die Leuchtdichte auf $\pm 20\%$ konstant gehalten. Zugleich vermeiden die Vorfilter

falsches Licht. Die Monochromasie ist derart, dass die Messergebnisse keiner Korrektur nach der Paschen-Runge-Formel bedürfen.

Energiemessung. Zur Bestimmung der spektralen Hellempfindlichkeit muss das Verhältnis der visuell ermittelten Hellempfindlichkeit und der entsprechenden Strahlungsenergie gebildet werden. Da die Berechnung der Energie aus Energieverteilung der Lampe, Dispersion und spektraler Durchlässigkeit des Monochromators und Selektivität der übrigen Optik manche Fehlerquellen in sich birgt, ist die aus dem Okular austretende Strahlungsenergie direkt gemessen worden. Dies erfolgte mit einer in Ultrarot durch Vorfilter (2 mm BG 19 + 3 mm BG 17) unempfindlich gemachten AEG-Caesium-Vakuumzelle, deren spektrale Empfindlichkeit mit Thermosäule und Zernike-Galvanometer bestimmt wurde und zwar für diejenige Stelle der Kathode, die bei der Energiemessung wirksam war.

Der Photostrom erzeugt einen Spannungsabfall an einem Hochohm-Widerstand von $1,3 \cdot 10^{10}$ Ohm. Dieser wurde mit einem Lindemann-Elektrometer (Cambridge) als Nullinstrument nach der Kompensationsmethode gemessen. Die Photoströme (10^{-11} A) waren bei uns etwa 10 mal kleiner als bei der entsprechenden Apparatur von JAGGI⁸). Relative Genauigkeit der Energiemessung: 1 ... 2%.

Schwächungsvorrichtung. Zum photometrischen Abgleich ein runder Zeiss-Graukeil GK (siehe Figur 3), der unmittelbar vor dem Austrittsspalt des Doppelmonochromators vom Beobachtungsort aus gedreht werden kann. Seine Stellung lässt sich bequem aus einiger Entfernung an einer linear geteilten Skala ablesen. Wir geben einige Zahlenwerte für diesen als Schwächungsmittel sehr geeigneten Keil in Tab. 1 wieder, da sie wegen des gleichmässigen exponentiellen Verlaufes und der Kleinheit der Selektivität allgemeineres Interesse beanspruchen dürften. Die Durchlässigkeit hat als Funktion von λ ein flaches Maximum bei $530 \text{ m}\mu$. Die Zahlenwerte sind in der Spektralapparatur selbst mit der oben beschriebenen Energiemesseinrichtung bestimmt worden.

Die Schwächung der gesamten Flimmer-Leuchtdichte einschliesslich der $U + IZ$ -Leuchtdichte erfolgt durch Einsetzen von Graufiltern in die Austrittspupille. Zur Erreichung starker Absorptionen wird ein Filter von 40% mittlerer Durchlässigkeit je mm in mehreren mm Schichtdicke verwendet. Die Selektivität des 40%-Filters wird gemessen, für die zusammengesetzten Filter daraus berechnet und tabellarisch festgelegt. Mit 4 solchen Okular-

einsätzen ergeben sich Leuchtdichten von 500, 200, 80, 35 und 15 asb.

Messung der Leuchtdichte. Die starke Abhängigkeit von $V(\lambda)$ von der Leuchtdichte erfordert eine Angabe der wirksamen Leuchtdichte auf 20% genau. Auf der Photometerbank wurde eine Opalglas-Lampe als Leuchtdichtenormal geeicht. Die $U + IZ$ -Leuchtdichte wird hieran wie folgt angeschlossen: Das Normal kommt vor

Tabelle 1.

Durchlässigkeit eines Zeiss-Graukeiles.

Winkel φ in $^{\circ}$	Durchlässigkeit in % für			
	$\lambda_2 = 485$	530	575	630 m μ
40	13,4	13,5	12,7	11,6
50	15,7	15,8	14,8	13,5
60	18,5	18,7	17,6	16,1
70	21,9	22,3	21,0	19,2
80	25,9	26,4	25,1	23,1
90	30,5	31,0	29,8	27,7
100	35,9	36,6	35,4	33,4
110	42,1	43,0	41,8	39,9
120	49,3	50,2	49,2	47,4
130	57,7	58,5	57,5	56,2
140	66,6	67,2	66,2	65,2
150	76,5	77,2	76,1	75,4
160	89,7	90,1	89,4	88,9

B_2 an Stelle von L_5 , ein das Gesichtsfeld halb verdeckender Spiegel an Stelle von G . Durch bekannte Farbfilter vor Q_3 lässt sich jedes Stück des Spektrums ohne grösseren Farbensprung direkt anschliessen. Die Ergebnisse sind noch mit dem Verhältnis der Reflexionskoeffizienten von Glas G und Spiegel zu multiplizieren.

Streuer. Zur Verwischung jeglicher Struktur im Bildfeld ist bei St ein Streuer mit der Eigenschaft, wenig zu absorbieren, kein direktes Licht durchzulassen und trotzdem nur in einem kleinen Winkel zu streuen, in den Strahlengang gebracht. Diesen Anforderungen genügt eine fein mattierte Celluloidfolie, deren Diffusionsvermögen durch kurzes Eintauchen in Aceton herabgesetzt ist. Je nach dem gewünschten Grad der Mattierung wird dieser Prozess mit *frischem* Aceton wiederholt.

Photometerkopf. Es kann sowohl mit $U + IZ$ -Beleuchtung als auch mit reiner Umfeldbeleuchtung gearbeitet werden.

Frequenzmessung. Mit der Flimmerscheibe ist ein Kontakt gekoppelt, welcher abwechselungsweise einen Kondensator auflädt und über ein träges Galvanometer wieder entlädt.

Gang einer Messung. Es wurde im taghellen Zimmer gearbeitet. Die Beobachter sind gehalten, bei einer etwas zu hohen Flimmerfrequenz grob die flimmerfreie Stelle zu suchen und nachher durch symmetrisches Einkreisen von links und rechts die Frequenz auf ein Minimum zu bringen, derart, dass gerade noch Flimmerfreiheit herrscht. Um Ungeübte, an einem gewissen Mangel an Entschlusskraft leidende Beobachter zu einem raschen Urteil zu zwingen, wird vom Protokollführer der Graukeil langsam um die mutmassliche Mittellage hin- und hergedreht. Das Durchlaufen des Minimums wird dem Protokollführer durch ein kurzes Zeichen mitgeteilt. Von diesem Kunstgriff muss bei Anwesenheit von Infeld-Zusatz-Beleuchtung selten Gebrauch gemacht werden.

Die Einstellungen geübter Beobachter streuen um weniger als 2%. 5 Ablesungen genügen in diesem Fall, während in den meisten Fällen 10 Ablesungen je Messpunkt gemacht werden.

Gang der Rechnung. Abgleichung bedeutet Gleichheit der Leuchtdichten

$$B(\lambda_1) = B(\lambda_2)$$

oder nach (1), da es sich um praktisch monochromatisches Licht handelt,

$$V(\lambda_1) S(\lambda_1) \Delta\lambda_1 = V(\lambda_2) S(\lambda_2) \Delta\lambda_2.$$

Wir ändern nun λ_1 , nicht aber λ_2 , und regulieren zum Abgleichen $S(\lambda_2)$ (Graukeil):

$$V(\lambda'_1) S(\lambda'_1) \Delta\lambda'_1 = V(\lambda_2) S'(\lambda_2) \Delta\lambda_2.$$

Es folgt:

$$V(\lambda_1) : V(\lambda'_1) : \dots = \frac{S(\lambda_2)}{S(\lambda_1) \Delta\lambda_1} : \frac{S'(\lambda_2)}{S(\lambda'_1) \Delta\lambda'_1} : \dots$$

In Worten: $V(\lambda_1)$ als Ergebnis einer Messreihe erhält man bis auf einen Normierungsfaktor, indem man aus den Zahlenreihen $S(\lambda_2)$ und $S(\lambda_1) \Delta\lambda_1$ die Quotienten bildet. $S(\lambda_2)$ ist proportional der Durchlässigkeit $d(\lambda_2)$ des Graukeiles (vgl. Tab. 1). Die Reihe $S(\lambda_1) \Delta\lambda_1$ wurde direkt mit der geeichten Photozelle gemessen. Die Division der Quotientenreihe durch deren Maximalwert gibt $V(\lambda_1)$, und zwar für Vergleichslicht λ_2 .

Messungen mit dem Bechstein-Photometer. Zwecks engerm Anschluss an die Arbeit von JAGGI⁸⁾ wurden einige Messungen mit dem Flimmerphotometer nach BECHSTEIN¹⁶⁾ auf der normalen

Photometerbank an gefiltertem Glühlampenlicht ausgeführt (Lichtquelle: Klein-Kinolampe 8,5 V, Betrieb mit 6,5 V, 2720° Farbtemperatur; Schottfilter Serie OG und RG).

Ergebnisse.

1. Zur Frage des Mittelwertes.

Fig. 4 gibt die Ergebnisse in f -Darstellung; für die drei wichtigsten f -Funktionen sind in Tab. 2 die $V(\lambda) = f(\lambda) \cdot V(\lambda, \text{int})$ -Werte enthalten.

Kurve 1a: f für 12 farbnormale Männer, $B_F = 500$ asb, $B_{U+IZ} = 100$ asb, $\lambda_2 = 575$ m μ , $\alpha = 1,5^\circ$. Die Hälfte dieser Beobachter war in der Beobachterschar von JAGGI enthalten und stellt das Mittel beidemale gut dar.

Kurve 1b: f für 7 farbnormale Frauen, Bedingungen wie oben. Nur eine hiervon wirkte bei JAGGI mit.

Tabelle 2.

λ	$V(\lambda, \text{int})$	$V'(\lambda)$	$V''(\lambda)$	$V'''(\lambda)$	λ	$V(\lambda, \text{int})$	$V'(\lambda)$	$V''(\lambda)$	$V'''(\lambda)$
470	0,091	0,077	0,072	(0,083)	560	0,995	1,000	1,000	1,000
480	0,139	0,103	0,103	0,111	570	0,952	0,974	0,970	0,989
490	0,208	0,149	0,154	0,158	580	0,870	0,902	0,895	0,921
500	0,323	0,252	0,262	0,254	590	0,757	0,782	0,773	0,805
510	0,503	0,439	0,456	0,440	600	0,631	0,651	0,641	0,678
520	0,710	0,665	0,685	0,660	610	0,503	0,506	0,498	0,541
530	0,862	0,849	0,864	0,828	620	0,381	0,370	0,365	0,405
540	0,954	0,940	0,950	0,923	630	0,265	0,259	0,254	0,289
550	0,995	0,992	0,997	0,977	640	0,175	0,172	0,167	0,195
555	1,000	1,000	1,002	0,995	650	0,107	0,105	0,101	(0,121)

Wahrscheinliche Mittelwerte von $V(\lambda)$ für 19 normale Beobachter, und zwar:

$V'(\lambda)$: $\alpha = 1,5^\circ$, $B = 500$ asb, $B_{U+IZ} = 100$ asb

$V''(\lambda)$: $\alpha = 1,5^\circ$, $B = 500$ asb, $B_{U+IZ} = 500$ asb

$V'''(\lambda)$: $\alpha = 1,5^\circ$, $B = 35$ asb, $B_{U+IZ} = 7$ asb

Kurve 1: f' : Mittel aus 1a und 1b. Hieraus folgt $V'(\lambda) = f'(\lambda) \cdot V(\lambda, \text{int})$ in Tab. 2 und Fig. 1. Das Ergebnis berechtigt füglich zur Behauptung:

Es können Bedingungen angegeben werden, unter denen sich $V(\lambda)$ von $V(\lambda, \text{int})$ zwischen 520 m μ und 650 m μ um weniger als 5% unterscheidet.

Dies mag dazu beitragen, das Bedürfnis nach einer Änderung von $V(\lambda, \text{int})$ um ein Weiteres herabzumindern. Die Abweichung von über 20 % im Blau bestätigt sich allerdings erneut.

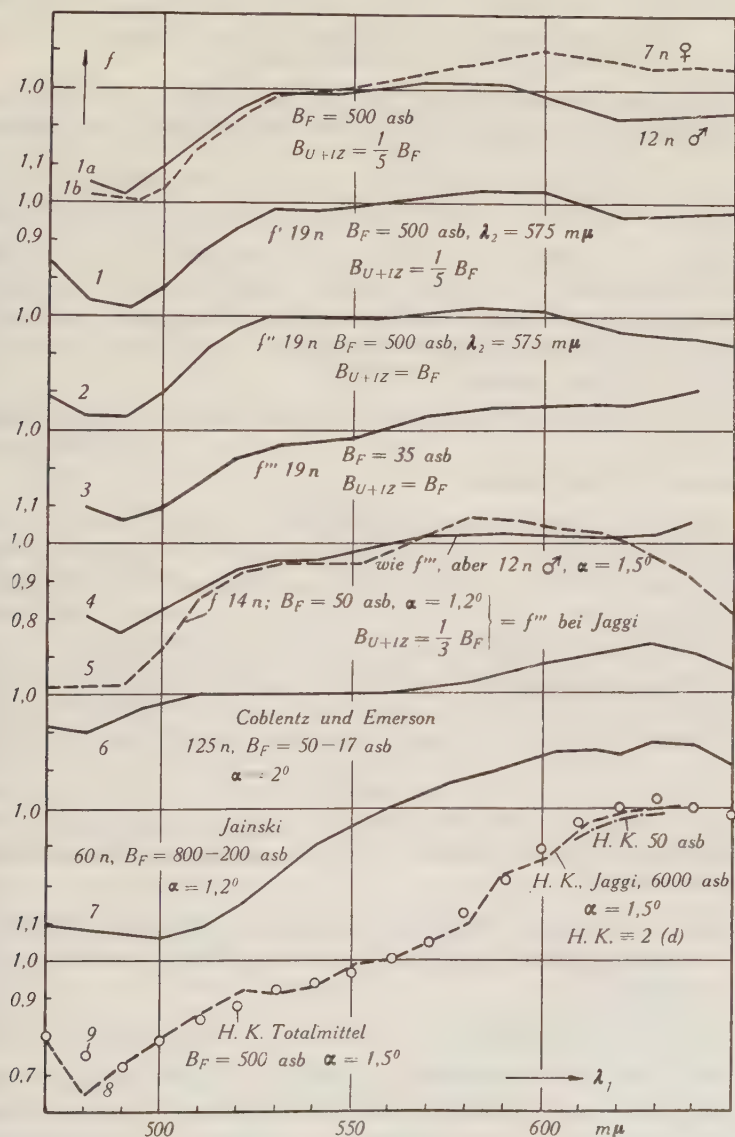


Fig. 4.

Zusammenstellung einiger f -Funktionen. Erläuterungen im Text.

Kurve 2: f''_1 Ergibt sich aus f' durch Erhöhung von B_{U+IZ} auf 500 asb ($= B_F$); führt zu $V'' = f'' \cdot V(\lambda, \text{int})$ in Tab. 1.

Kurve 3: f''' : Ergibt sich aus f' durch Erniedrigung von B_F auf 35 asb. Ob bei dieser niedrigen Leuchtdichte $B_{U+IZ} = B_F$ oder z. B. $= 1/5 B_F$ genommen wird, ist gleichgültig; Effekt 1%. Hieraus $V''' = f''' \cdot V(\lambda, \text{int})$ in Tab. 1 und Fig. 1.

Dem gleichmässigen Anstieg von f''' mit steigender Wellenlänge entspricht eine Verschiebung des Maximums nach etwa 560 m μ .

Kurve 4: Entsteht wie 3, aber unter Zugrundelegung von 1a statt 1. Diese Kurve eignet sich am besten zum Vergleich mit

Kurve 5: In der Arbeit JAGGI⁸⁾, Fig. 6, mit f''' bezeichnet, bezieht sich auf $B_F = 50$ asb, $\alpha = 1,2^\circ$. Ihre Werte im mittleren Teil des Spektrums waren aus Messungen an einer Reihe von Gelb- und Rot-Filtern unter stärkster Heranziehung des Superpositionsprinzips berechnet worden!

Es ist bemerkenswert, dass die auf einem solchen Umweg gewonnenen Werte 5 von JAGGI sich mit unseren direkt gemessenen Werten 4 so gut decken.

Über die Abweichungen oberhalb 630 m μ siehe später. Unsere Kurve verläuft glatter als diejenige von JAGGI; die Einbuchtung bei 540 m μ ist aber noch andeutungsweise vorhanden. Der glattere Verlauf würde zur Folge haben, dass es theoretisch leichter wäre, unseren Durchschnittsbeobachter mittelst Korrekturgläsern¹⁵⁾ auf $V(\lambda, \text{int})$ -getreue Angaben zu korrigieren als denjenigen JAGGI's.

Das den Kurven 4 und 5 zugrunde liegende Material stammt im wesentlichen aus den Monaten März und April (1938 bzw. 1941).

Kurve 6: Nach COBLENTZ und EMERSON¹⁷⁾, 125 Beobachter, $\alpha = 2^\circ$, $B_F = 50-17$ asb, identisch mit Kurve 5 der Fig. 2; wir geben dieselbe hier gesondert wieder wegen Ihrer Ähnlichkeit mit unserer Kurve 3.

Kurve 7: JAINSKI, 60 normale Beobachter, $B_F = 800-200$ asb, $1,2^\circ$; sie wäre mit unserer Kurve 1 zu vergleichen, deckt sich aber nicht mit ihr.

Kurven 8 und 9 beziehen sich auf einen Deuteranormalen (II. K.).

Kurve 8: im Jahre 1938 von JAGGI bei $B_F = 6000$ asb, α ca. $1,5^\circ$ aufgenommen; im Rot ist durch das gestrichelte, mit „50 asb, JAGGI“ bezeichnete Kurvenstück zum Ausdruck gebracht, dass dieser Deuteranomale praktisch keine Leuchtdichte-Abhängigkeit aufweist. Dass sich

Kurve 9, von uns für $B_F = 500$ asb bestimmt, mit Kurve 8 so weitgehend deckt, darf sowohl als Zeichen der Stabilität des Deuteranomalien als auch als Teilbeweis für die Übereinstimmung der Energiemessungen in beiden Arbeiten angesehen werden.

2. $V(\lambda_1)$ in Abhängigkeit vom Vergleichslicht λ_2 .

Es gibt verschiedene Arten von Abweichungen von der Eindeutigkeit. Die eine ist dadurch charakterisiert, dass zwei Lichter, die einem dritten gleich sind, unter sich nicht gleich sind. Wir betrachten hier Versuche, die sich auf mindestens vier Lichter beziehen, indem die Änderung von $V(\lambda_1, \lambda_2)/V(\lambda_1, \text{int})$ in Abhängigkeit von λ_2 untersucht wird. Beide Arten von Versuchen sind einer Änderung des Weges in der Farbmännigfaltigkeit gleichwertig.

Fig. 5 zeigt eine Auswahl von Ergebnissen in f -Darstellung. Um die Figur nicht mit Kurvenzügen zu überladen, sind nur die Messpunkte der $f(\lambda_1, \lambda_2)$ -Funktionen für $\lambda_2 = 485$ und $640 \text{ m}\mu$ durch Kurven verbunden worden, diejenigen für $\lambda_2 = 530$ und $575 \text{ m}\mu$ nicht.

Kurvengruppe Ch. B.: Ein farbnormaler Beobachter, Mittel zweier Gruppen von Messreihen.

Kurvengruppe H. K.: Einfache Gruppe von Messreihen eines Deuteranomalien, keine Wiederholung „unwahrscheinlicher“ Punkte.

Die entsprechenden Messungen für weitere drei Farbtüchtige streuen wenig mehr als diejenigen des Beobachters Ch. B. Bei dem Deuteranomalien ist die Streuung, bezogen auf gleiche Anzahl Messungen, geringer als bei Ch. B. Es lässt sich also feststellen, dass der Deuteranomale geringere Abhängigkeit seines $V(\lambda_1)$ von λ_2 aufweist als der Durchschnitts-Farbtüchtige.

Um Fig. 5 richtig einschätzen zu können, muss man folgendes beachten: Die Aufnahme einer vollständigen Gruppe von Messreihen, bestehend aus vier $V(\lambda_1)$ -Aufnahmen von 20 zu 20 $\text{m}\mu$, dauert mindestens $1\frac{1}{2}$ Stunden. Zu solchen Messungen sind die Beobachter gewöhnlich nur vormittags zu gebrauchen. Die nie ganz zu beseitigende Inhomogenität des Flimmerfeldes ist für die verschiedenen λ_2 etwas verschieden. Kriteriumsänderungen sind bei diesen Eindeutigkeits-Prüfungen weniger zu vermeiden als z. B. bei den Linearitäts-Prüfungen (s. Ergebnisse 3: Abhängigkeit von B_F), wo man immer auf den Kontrollpunkt $\lambda_1 - \lambda_2$ zurückgreifen kann. Die

Kurvengruppen Ch. B. I und Ch. B. II sind zu verschiedenen Zeiten, bei verschiedener Disposition des Beobachters, aber unter

gleichen Vorsichtsmassnahmen bestimmt worden. Eine solche Umkehrung der Reihenfolge der Kurven ist uns allerdings nur dieses eine Mal begegnet; sie zeigt, welche Schwierigkeiten sich der Ermittlung feinerer Effekte entgegenstellen können.

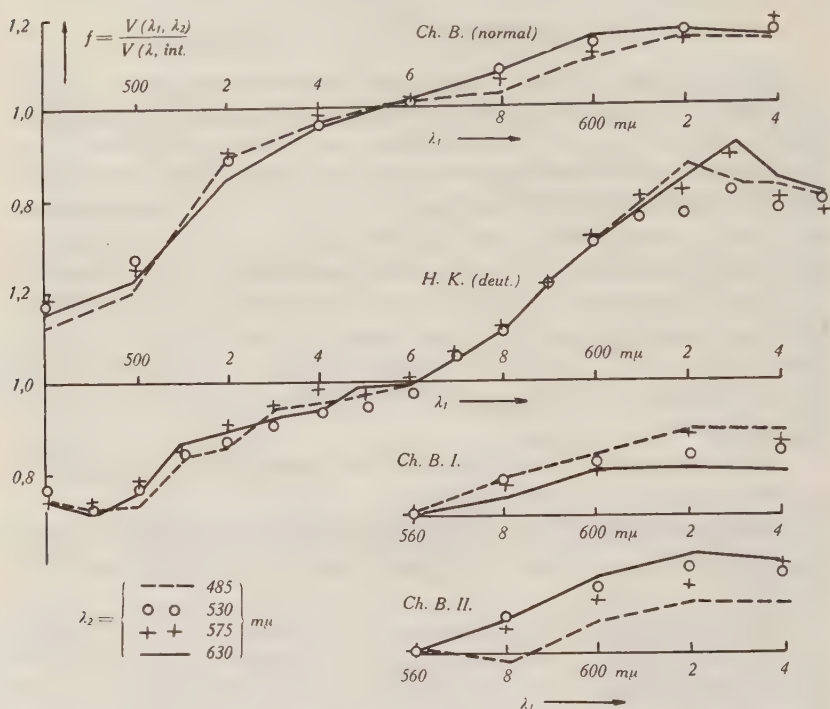


Fig. 5.

Abhängigkeit der Hellempfindlichkeit vom Vergleichslicht. Die Gruppen Ch. B. I., Ch. B. II und H. K. stellen die Ergebnisse von Einzelmessreihen dar.

Die Prüfungen auf Abhängigkeit vom Vergleichslicht scheinen bei stark gefärbten Vergleichslichtern Nicht-Eindeutigkeiten von 10% aufzudecken; sie reduzieren sich aber durch Häufung der Messungen auf grössenordnungsmässig 3% im mittleren Teil des Spektrums und auf grössenordnungsmässig 5%, wenn eine der Komponenten dem roten oder blauen Ende des Spektrums entnommen ist.

Sämtliche Angaben der Fig. 5 beziehen sich auf Leuchtdichten um 35 asb.

Für einen farbnormalen Beobachter (H. L.) ist die Abhängigkeit $V(\lambda_1: \lambda_2, B_F)$, d. h. die Streuung von $V(\lambda_1)$ bei Änderung von λ_1 in Abhängigkeit der Leuchtdichte zwischen 15 und 500 asb unter-

sucht worden. Abgesehen von einer leichten Zunahme der Streuung gegen hohe Leuchtdichten hin, die mit der ermüdenden Wirkung starker und roter Lichter auf diesen Beobachter Hand in Hand geht, kann die Streuung in erster Näherung als unabhängig von der Leuchtdichte bezeichnet werden.

Für diesen Farbtüchtigen gewinnen also Angaben wie „3% bzw. 5% Nicht-Eindeutigkeit“ den Charakter der Beschreibung einer wirklichen (leuchtdichte-unabhängigen) Eigenschaft des Auges.

Es erhebt sich die Frage, ob sich über das Vorzeichen dieser restlichen Abweichungen, von denen man kaum sicher sagen kann, dass sie systematischer, bei äusserster Präzisierung der Messvorschrift reproduzierbarer Natur seien, Regeln angeben lassen.

JAGGI⁸⁾ kommt zur Erkenntnis, dass im Fall stark farbigere Lichter die Messbedingungen kaum so gewählt werden können, dass Abweichungen von der Grössenordnung 2% von der Additivitäts- und Eindeutigkeitsforderung vermieden werden. Für einen genau untersuchten Fall (Filtermessungen, Bechstein-Photometer) findet er 2%. „Das Vorzeichen ist derart, dass man *in diesem speziellen Fall* sagen kann: Eine Leuchtdichte wird durch eine ungefähr gleichfarbige Vergleichs-Leuchtdichte in ihrer Wirkung herabgedrückt. Es ist wie wenn eine konstante gleichfarbige $U + IZ$ -Beleuchtung wirken würde.“ JAGGI benutzte bei diesem Versuch die Schott-Filter 1 mm BG 7 und 2 mm OG 3 vor der Vergleichslampe. Bei uns ist die Variation des Vergleichslichtes grösser, die Erweiterung des Fehlerbereichs von 2% auf 3...5% daher ganz natürlich.

Bei JAGGI's Versuch dürfte angesichts der Nachgiebigkeit von $V(\lambda)$ im Rot hauptsächlich das Rot-Filter 2 mm RG 5 ($\lambda_{eff} \approx 650 \text{ m}\mu$) für den Effekt entscheidend gewesen sein.

Das Mittel von 4 Farbtüchtigen zeigt bei uns ebenfalls niedrigen Verlauf der f -Kurve für $\lambda_2 = 640$ gegen das äusserste Rot hin. Rot wird also durch Rot „herabgedrückt“. Im übrigen lassen sich aber aus unserm Beobachtungsmaterial in andern Gebieten des Spektrums ebenso viele Verstösse gegen diese Regel wie Bestätigungen derselben herauslesen.

3. $V(\lambda)$ in Funktion der Flimmerleuchtdichte B_F .

Das Flimmerverfahren zeichnet sich, wie eingangs erwähnt wurde, leider durch das Vorhandensein einer gerade im praktisch wichtigen Bereich von 20...100 asb foveal wirksamen *Zunahme* von $V(\lambda)$ im *Rot* bei *Abnahme* der Leuchtdichte aus.

Nun bezeichnet man die *Zunahme* der *Blauempfindlichkeit* mit *abnehmender* Leuchtdichte unterhalb 10 asb wegen des Mitwirkens der in der Fovea centralis spärlichen, ausserhalb reichlich vorhandenen Stäbchen nach ihrem Entdecker den Purkinje-Effekt.

Vom rein phänomenologischen Standpunkt aus ist es verständlich, dass sich seit IVES für den erstgenannten Effekt wegen seiner Gegenläufigkeit gegenüber dem Purkinje-Effekt der Name „inverser Purkinje-Effekt“ eingebürgert hat. Morphologisch haben die beiden Phänomene wohl nichts miteinander zu tun. Dies ist der Grund, weshalb wir den Namen „inverser Purkinje-Effekt“ vermeiden und stets die schwerfälligere Bezeichnung „Leuchtdichte-Abhängigkeit“ benutzen.

ROSENBERG¹⁸⁾ hat mit einem Flimmerphotometer nach BECHSTEIN durch Vergleich von grünem mit gelblichem Filterlicht unterhalb $B_F = 14$ asb festgestellt, dass jedenfalls oberhalb 14 asb foveal kein Purkinje-Phänomen mehr vorhanden sei. Wir erwähnen dies, weil JAINSKI⁹⁾, ausser JAGGI der einzige Autor, der neuerdings das ganze $V(\lambda)$ mit Spektrallichtern aufgenommen hat, irrtümlicherweise aus ROSENBERG's Ergebnis den Schluss zieht, dass jedenfalls zwischen 200 und 800 asb wegen des Fehlens des Purkinje-Effektes auf den genauen Wert der Leuchtdichte nicht geachtet zu werden brauche. Diese Schlussweise ist aber nicht statthaft.

DZIOBEK und REEB¹⁹⁾ haben den „inversen Purkinje-Effekt“ bei Natrium- und Neon-Licht bezogen auf Wolfram-Vakuum-Licht flimmer-photometrisch unterhalb 60 asb nachgewiesen.

JAGGI hat eben wegen der grossen Bedeutung der Leuchtdichte $V(\lambda)$ bei 6000 asb aufgenommen, um einmal die praktische Grenze gegen das Gebiet der Blendung hin festzulegen. Von ihm und DRESLER¹⁴⁾ liegen ferner Messungen im Bereich von 5 ... 200 asb an Farbläsern vor, die eine starke Leuchtdichte-Abhängigkeit im Rot gegen 200 asb hin und einen schwachen gegenläufigen Einfluss im Blau und Grün erkennen lassen.

Der allgemeine Verlauf der Leuchtdichte-Abhängigkeit für den Sprung von $B_F = 35$ auf 500 asb, wie er sich aus unseren Messungen ergibt, wurde bereits in Fig. 1 (Kurven V' und V''') und Fig. 4 (Kurven f' und f''') zum Ausdruck gebracht. Die Umrechnungsfunktion

$$\frac{V'}{V'''} = \frac{V(\lambda_1; \lambda_2, B_F = 500, B_{U+IZ} = \frac{1}{5} B_F)}{V(\lambda_1; \lambda_2, B_F = 35, B_{U+IZ} = B_F)} = \frac{f'}{f'''} \\ = \frac{f(\lambda_1; \lambda_2, B_F = 500, B_{U+IZ} = \frac{1}{5} B_F)}{f(\lambda_1; \lambda_2, B_F = 35, B_{U+IZ} = B_F)}$$

gilt es, hier näher zu begründen.

Um die Übersicht zu erleichtern, seien die verschiedenen Parameterübergänge schematisch dargestellt:

$$\begin{array}{ccc}
 V'', f' \left\{ \begin{array}{l} B_F = 500 \text{ asb} \\ B_{U+IZ} = \frac{1}{5} B_F = 100 \end{array} \right. & \xrightarrow{B} & V'', f'' \left\{ \begin{array}{l} B_F = 500 \text{ asb} \\ B_{U+IZ} = B_F = 500 \end{array} \right. \\
 \uparrow A & & \uparrow D \\
 V_o, f_o \left\{ \begin{array}{l} B_F = 35 \text{ asb} \\ B_{U+IZ} = \frac{1}{5} B_F = 7 \end{array} \right. & \xrightarrow{C} & V''', f''' \left\{ \begin{array}{l} B_F = 35 \text{ asb} \\ B_{U+IZ} = B_F = 35 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Hierin ist als neues Paar von Bezeichnungen nur f_o und $V_o = f_o \cdot V(\lambda, \text{int})$ eingeführt worden. Betrachtet man $A, B \dots$ nicht nur als formale Bezeichnungen für die Übergänge, bei denen nur ein Parameter verändert wird, sondern als Funktionen

$$A = \frac{V''}{V_o} = \frac{f'}{f_o}, \quad B = \frac{V''}{V'} = \frac{f''}{f'}, \dots,$$

so gilt:

$$A(\lambda_1) \cdot B(\lambda_1) = C(\lambda_1) \cdot D(\lambda_1)$$

Nun die Entstehung von A in Fig. 6. Zunächst ist festzustellen, ob eine nennenswerte Abhängigkeit von λ_2 berücksichtigt werden muss.

Kurvengruppe H. L. I zeigt: Für den farbtüchtigen Beobachter H. L. ist der allgemeine Verlauf der Leuchtdichte-Abhängigkeit von der Farbe des Vergleichslichtes in erster Näherung unabhängig. Es hat also einen Sinn, hieraus

Kurve H. L. II: Mittelwert der Kurvengruppe H. L. I und weiterer diesbezüglicher Messungen, zu bilden.

Entsprechende Messungen an 6 Farbtüchtigen und leichte Ausgleichung führen zu

Kurve $A = V'/V_o$. Man erkennt:

Die Leuchtdichte-Abhängigkeit ist ein Maximum für das Verhältnis äusserstes Rot/Grün, und zwar rund 20% Abnahme für eine Zunahme von $B_F = 35$ auf 500 asb.

Dies sowie der Umstand, dass die unten besprochenen Kurven B und D ungefähr denselben Verlauf zeigen, erlaubt, für die photometrische Praxis folgende Regel aufzustellen:

Wenn man von einem Beobachter den Grad der Beeinflussbarkeit seines $V(\lambda)$ durch Art der Apparatur (Flimmerfrequenz), Leuchtdichte, Zusatzleuchtdichte usw. kennen lernen will, so sollte man nicht sein Gelb/Blaugrün-Verhältnis (Y/B -ratio), sondern sein Rot/Grün-Verhältnis in Funktion dieser Parameter untersuchen.

Die neuerdings viel untersuchten Verhältnisse $V(578)/V(546)$ und $V(589)/V(546)$ sind nach unseren Ergebnissen ebenfalls ein geeigneter Indikator für das Verhalten von Beobachtern.

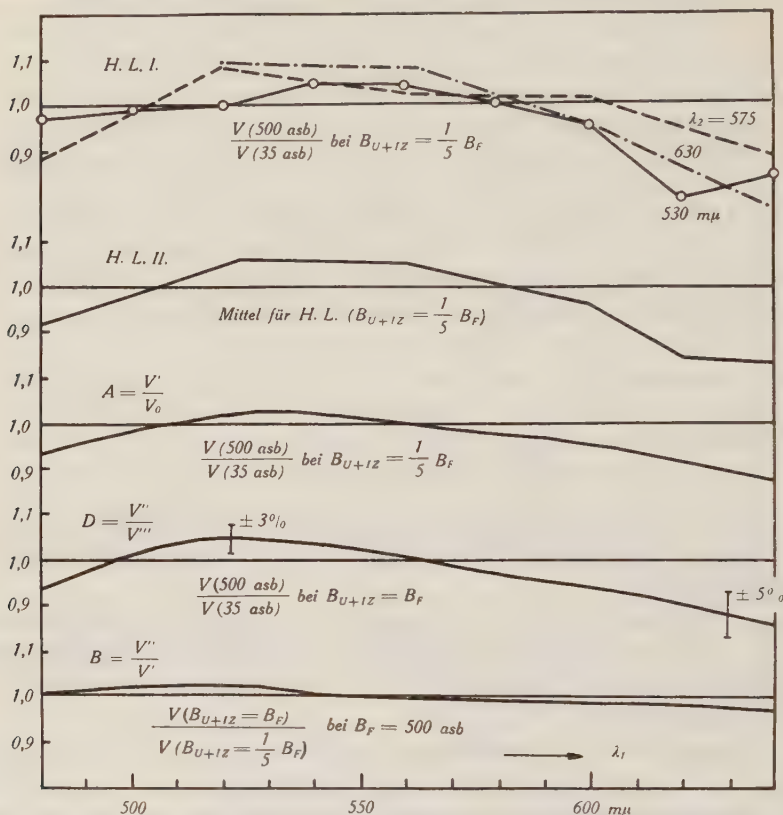


Fig. 6.

$V(\lambda_1)$ in Funktion von λ_2 , B_F und B_{U+IZ} . Die Kurven A, D, B sind ausgeglichen worden; siehe den erläuternden Text.

Kurve $D = V''/V'''$: Entspricht A, ist aber für dieselben Beobachter bei $B_{U+IZ} = B_F$ aufgenommen worden. Die Abhängigkeit von B_F ist also durch Vergrößerung der U + IZ-Beleuchtung verstärkt worden. Hierauf und auf Kurve D wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen.

$B/D = V'''/V'$ und $B = V''/V'$ sind die beiden Umrechnungsfunktionen, die in Fig. 4 zur Bestimmung von f' und f''' zur Anwendung gelangten. Zahlenmässig ergeben sie sich aus Tab. 1.

Bis jetzt war stets nur von der Grösse der Leuchtdichte-Abhängigkeit für den Sprung 35 → 500 asb die Rede. Fig. 7 zeigt

nun für 3 Farbtüchtige den näheren Verlauf in Funktion von B_F für Rot und Grün (bezogen auf $\lambda_2 = 575 \text{ m}\mu$) und für verschiedene $U + IZ$ -Leuchtdichten. Man sieht:

Farbnormale weisen im Rot alle starke Verminderung der Hell-empfindlichkeit auf; im Grün ist der Einfluss bedeutend geringer und für verschiedene Beobachter von wechselndem Vorzeichen.

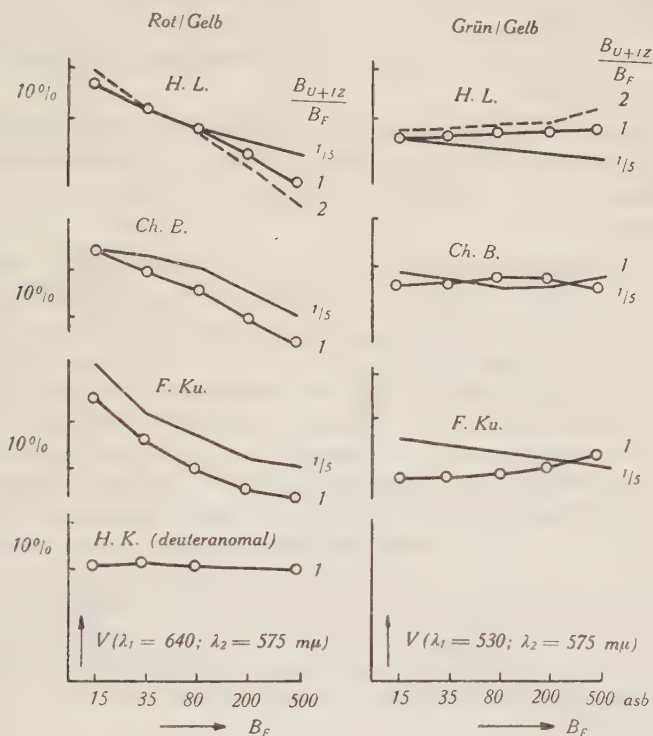


Fig. 7.

$V(\lambda_1)$ in Funktion von B_F und B_{U+IZ} für Rot und Grün, bezogen auf Gelb. Größere Beeinflussung im Rot, vorwiegend Verstärkung der Leuchtdichteabhängigkeit durch $U+IZ$ -Beleuchtung im Rot. Ordinaten in beliebigem relativen Masstab.

JAGGI⁸⁾ hat bereits auf die photometrische Sonderstellung eines Deuteranomalen hingewiesen. Die Unempfindlichkeit seines $V(\lambda)$ gegenüber starken Änderungen von B_F geht erneut aus Fig. 7 hervor und stützt damit die aus Fig. 4, Kurven 8 und 9, gezogenen Folgerungen. Hieraus und aus weiteren, in Fig. 7 nicht enthaltenen Ergebnissen folgt:

Ein Deuteranomaler weist keine Leuchtdichte-Abhängigkeit auf; für die farbnormale Schwester dieses Deuteranormalen, einen Protanormalen und einen Protanopen gilt wahrscheinlich dasselbe.

Ein Blick auf den allgemeinen Verlauf und das Abszissenmass zeigt:

Im Durchschnitt verläuft im Rot die Leuchtdichte-Abhängigkeit zwischen 30 und 500 asb annähernd proportional dem Logarithmus der Leuchtdichte.

Hieraus und aus einer früheren Feststellung über die Grösse des Effektes folgt:

Die Leuchtdichte-Abhängigkeit des Verhältnisses Rot/Grün beträgt zwischen 35 und 500 asb je Sprung 1:2 ca. 5%, unabhängig von der Leuchtdichte, stellt also eine eigentliche Eigenschaft des Auges dar.

Es sei noch auf einen Widerspruch zwischen Fig. 6, Kurvengruppe H. L. II, Kurve $\lambda_2 = 575 \text{ m}\mu$, und Fig. 7, Kurvengruppe H. L., $\lambda_1 = 530$, $\lambda_2 = 575$, $B_{U+IZ}/B_F = 1/5$, hingewiesen. Aus der erstgenannten Kurve entnimmt man für $V(500 \text{ asb})/V(35 \text{ asb}) = \text{ca. } 1,05$ bei $\lambda_1 = 530 \text{ m}\mu$, aus der zweitgenannten geht für dasselbe Verhältnis bei denselben Bedingungen 0,97 hervor. Im ersten Fall ist bei konstantem λ_2 , B_F und B_{U+IZ} λ_1 variiert worden, wobei sich der Beobachter auf andere Farben umstellen musste; im zweiten Fall wurde stets bei derselben Farbe gearbeitet. Solche Vorzeichenwechsel kann man manchmal reproduzieren, manchmal gelingt es nicht. Aus dem sehr ausgedehnten Beobachtungsmaterial lässt sich schliessen, dass in diesem Fall die Kurvengruppe II. L. rechts in Fig. 7 abnormal ist und ein Anstieg aller drei Kurven mit steigendem B_F dem allgemeinen Verhalten des Beobachters besser entsprochen hätte.

4. $V(\lambda)$ in Funktion der Umfeld- und Infeld-Zusatzleuchtdichte B_{U+IZ} .

Die $U + IZ$ -Beleuchtung wirkt physiologisch und psychologisch anders auf den Beobachter als die reine Umfeldbeleuchtung.

Theoretisch kann die Umfeld-Beleuchtung nur durch Wechselwirkung zwischen den Netzhautstellen und als Faktor im Prozess des Ausruhens wirken. Die $U + IZ$ -Beleuchtung wirkt ausserdem dadurch, dass der Flimmerabgleich zweier Lichter durch denjenigen zweier weniger gesättigter Lichter höherer Leuchtdichte ersetzt wird. Es ist verständlich, dass zahlenmässig der Einfluss der reinen

Umfeldbeleuchtung wesentlich kleiner ist als derjenige der $U + IZ$ -Beleuchtung; wir haben auch kein Vorzeichen eines Effektes festlegen können.

Praktisch unterscheidet sich die reine Umfeldbeleuchtung dadurch, dass die Struktur der Flimmerfeld-Blende sichtbar ist, während bei der $U + IZ$ -Beleuchtung das Flimmerfeld wie eine fahle Scheibe durch einen absolut strukturlosen Nebel leuchtet.

Die $U + IZ$ -Beleuchtung wird von allen Beobachtern als angenehmer empfunden und darf allgemein als Massnahme zur Erleichterung des Abgleiches empfohlen werden.

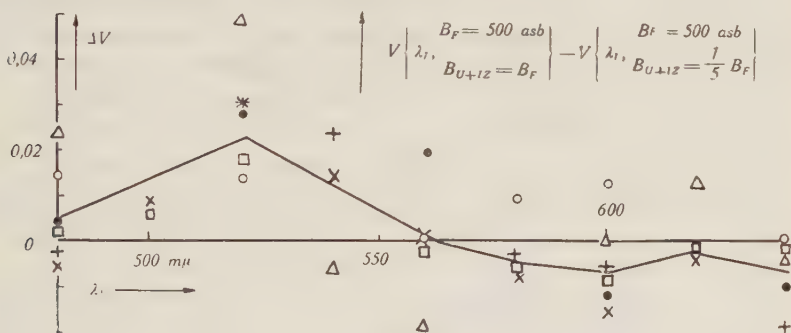


Fig. 8.

Einfluss von B_{U+IZ} bei $B_F = 500$ asb in ΔV -Darstellung. Die ausgezogene Kurve, welche ungefähr den Mittelwert darstellen soll, dividiert durch $V(\lambda, \text{int.})$, gibt Kurve B in Fig. 6.

Der Durchschnittsbeobachter bevorzugt bei $B_F = 35$ asb ein $B_{U+IZ} \approx B_F$, bei $B_{U+IZ} = 500$ asb ein $B_{U+IZ} \approx \frac{1}{2} B_F$. Geübte Beobachter streuen bei $B_{U+IZ} = 1 \dots 2 \cdot B_F$ nicht mehr als bei $B_{U+IZ} \approx \frac{1}{2} B_F$, jedenfalls aber weniger als bei $B_{U+IZ} = 0$.

Den spektralen Verlauf des Einflusses von B_{U+IZ} zeigt Fig. 8: Nur mit einiger Mühe lässt sich aus den Messungen von 4 Farbnormalen ein Mittelwert herauslesen. Die ausgezogene Kurve dividiert durch $V(\lambda, \text{int.})$ gibt Kurve B in Fig. 6. An die bedingte Gültigkeit dieser Funktion soll durch die in Fig. 6 vermerkten Unsicherheiten von 3% bzw. 5% erinnert werden.

Die Funktion C, das Analogon zu B für $B_F = 35$ asb, ist in Fig. 6 nicht enthalten, weil sie von 1 für alle λ um weniger als $\pm 1\%$ abweicht und innerhalb dieser Grenzen unsicher ist.

Während wir für die Abhängigkeit der Hellempfindlichkeit von λ_2 und B_F einen gewissen prozentualen, von der Leuchtdichte unabhängigen Wert (5% bzw. 3%) feststellen konnten, gilt für

die erheblich kompliziertere Abhängigkeit von B_{U+IZ} durchschnittlich nicht dasselbe: Kurve B in Fig. 6 weicht wesentlich mehr von der Einheit ab als C.

Diese Zunahme des relativen $U + IZ$ -Einflusses mit der Leuchtdichte lässt es zweckmässig erscheinen, nicht mit höheren Leuchtdichten als $B_F \approx 200$ asb zu arbeiten.

Es mag sein, dass diese Zunahme einzig eine Nebenerscheinung zu dem Umstand ist, dass bei $B_F = 500$ asb die farbnormalen Beobachter über zu viel Licht klagen und leichter ermüden.

Da die allgemeine Form von A und B ausgenommen im Blau-grün gleich ist, bedeutet das Zuschalten von B_{U+IZ} fast im ganzen Spektrum für den Durchschnittsbeobachter in dieser Apparatur eine Vergrösserung der Leuchtdichteabhängigkeit.

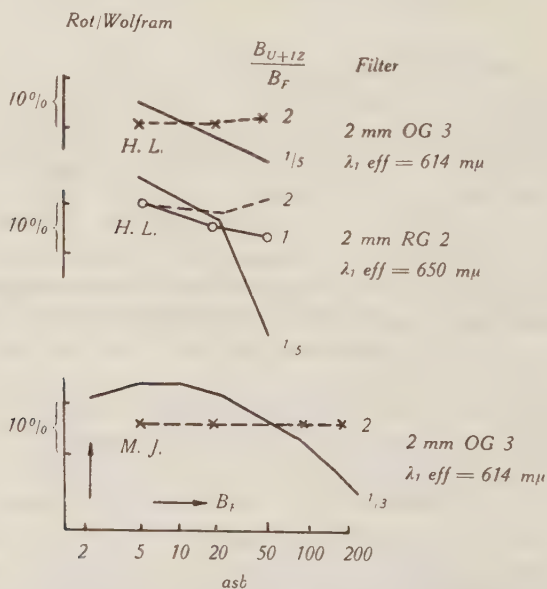


Fig. 9.

Verringerung der Leuchtdichte-Abhängigkeit im Rot durch $U + IZ$ -Beleuchtung für 2 farbtüchtige Beobachter. Filterlicht, Bechstein-Flimmerphotometer.

Von besonderem Interesse ist nun die Feststellung, dass beim Bechstein-Flimmerphotometer, wie der Vergleich von Fig. 7 und 9 zeigt, für $B_{U+IZ} = 1/5$ oder $1/3 B_F$ im Rot dieselbe Abhängigkeit von B_F , aber eine ganz andere Abhängigkeit von B_{U+IZ} herauskommt! Besonders eindrücklich sind die in Fig. 9 dargestellten unveröffentlichten Messungen von JAGGI, die eine restlose Beseitigung des Ganges mit B_F durch $B_{U+IZ} = 2 B_F$ zeigen.

Die Diskrepanz gegenüber den mit unserer Apparatur gewonnenen Ergebnissen ist zu gross, als dass man den Umstand, dass es sich in einem Fall um Filterlicht, im andern Fall um Spektrallicht handelt, dafür verantwortlich machen könnte. Es liegt näher, einen Zusammenhang mit dem Übergang von einem Photometer-Typ auf den andern, im besondern mit der damit verbundenen Frequenzänderung zu vermuten.

Hier sei einstweilen nur festgehalten:

Die Beeinflussbarkeit der Leuchtdichteabhängigkeit im Rot bei 50 asb durch die $U + IZ$ -Beleuchtung hängt stark von der Art des Flimmerphotometers ab (Art des Farbwechsels, Frequenz). Im besonderen wird die Leuchtdichte-Abhängigkeit $(\partial V(\lambda_1, B_F) / \partial B_F)$ bei hartem Farbwechsel und hoher Frequenz wenig im Sinne einer Verstärkung, bei weichem Wechsel und niedriger Frequenz deutlich im Sinne einer Beseitigung der Abhängigkeit beeinflusst.

In diesem Sinne verdient das Bechstein-Photometer wegen der Möglichkeit einer teilweisen Bekämpfung der Leuchtdichte-Abhängigkeit den Vorzug.

Durch diese Feststellungen wird alles, was über die B_{U+IZ} -Beleuchtung *allgemein* gesagt wird, mehr oder weniger problematisch. Man untersuche deshalb einen Beobachter mit

derjenigen Apparatur, an der man ihn nachher praktisch photometrieren lassen will, unter möglichst gleichen Messbedingungen bei Eichung und Anwendung.

Vergleichende Betrachtungen.

Über den Einfluss der Frequenz und die Art des Flimmerns. Beim Bechstein-Photometer nimmt der Farbwechsel mindestens 20% der Zeit in Anspruch; der Übergang kann als weich bezeichnet werden. Bei unserer Apparatur mit hartem Übergang beträgt er 1...2%. Beim Bechstein-Photometer beträgt die Flimmerfrequenz durchschnittlich 5, bei uns 15 vollständige Wechsel je Sekunde.

Dass es sich bei den im vorangehenden Abschnitt dargelegten Erscheinungen nicht *nur* um eine Frequenzangelegenheit handelt, geht daraus hervor, dass man nach Änderung von B_F bei absichtlich konstant gehaltener Frequenz ebenfalls eine Änderung von $V(\lambda)$ nachweisen kann.

Dass die Frequenz mitspielt, kann man durch folgende Versuchsreihe plausibel machen: Man zwingt sich, das eine Mal mit zu hoher Frequenz, also breiter flimmerfreier Zone und Bestimmung des Flimmereinsatzes zu beiden Seiten, das andere Mal

mit zu niedriger Frequenz, also mit verwaschenem Minimum zu arbeiten. Der Erniedrigung der Frequenz um 30%, die sich so erzwingen lässt, entspricht für $\lambda_2 = 575$, $\lambda_1 = 640 \text{ m}\mu$ für den Farbtüchtigen H. L., welcher Tendenz zu verhältnismässig raschem Flimmern zeigte, ca. 5% Abnahme bei asb, ca. 10% Abnahme von $V(\lambda)$ bei 500 asb. Für den Deuteranomalien betragen die entsprechenden Werte ca. 2% bzw. 4%.

Theoretisch lässt sich vermuten, dass unsere Apparatur die Unterschiede im Empfindungsanstieg bei den verschiedenen Farben anders herausarbeitet als das Bechstein-Photometer.

Man könnte glauben, dass der Gedanke an die Frequenz alle ungeklärten Abweichungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen gestatte. In der Tat:

a) JAGGI's Kontrolle auf Eindeutigkeit führt zum Resultat: „Rot erniedrigt Rot“; damit läuft Hand in Hand: Erniedrigung der Frequenz wegen Gleichfarbigkeit.

b) Kurven 4 und 5 in Fig. 4: JAGGI's Kurve 5 liegt ab $640 \text{ m}\mu$ tiefer als unsere Kurve 4; bei JAGGI ist die Frequenz wesentlich kleiner als bei uns.

c) Erniedrigung von $V(\lambda)$ im Rot ist durch bewusste Frequenzverkleinerung zu erzielen, und

d) Bei Erhöhung von B_{U+IZ} , die im Rot zu einer Erniedrigung von $V(\lambda)$ führt, reduzieren normale Beobachter meistens ein wenig die Frequenz (Grössenordnung 10%).

Soweit stimmt alles zusammen, aber: Mit dem Bechstein-Photometer erhält man nach Fig. 9 oberhalb 50 asb eine Erhöhung von $V(\lambda)$ bei Vergrösserung von B_{U+IZ} , trotzdem damit eine leichte Frequenzerniedrigung verbunden *sein kann*.

Man erkennt, dass für die im Rot nach Abzug des durch Leuchtdichte-Abhängigkeit erklärbaren Teiles noch bleibenden Diskrepanzen in den $V(\lambda)$ -Bestimmungen die Art des Flimmerns wohl ebenso sehr von Belang sein kann wie Jahreszeit und Ernährung. Eine definitive Abklärung erfordert die Möglichkeit des Veränderns der Flimmereigenschaften. In unserer Apparatur liess sich dieser Gedanke leider nicht gut verwirklichen. Zur Lösung dieser Fragen ist der Bau eines Photometers mit Filterlicht, Netzanschluss und variabler Flimmereigenschaften geplant.

Es sei nebenbei erwähnt, dass die Beobachter CH. B. (normal) und H. K. (deutanomal) im Mai 1941 für ein dunkles Rotglas (2 mm RG 2) innerhalb 4% dieselbe Durchlässigkeit mit dem Bechstein-Photometer fanden wie im Mai 1938.

Über die individuellen Unterschiede in der Grösse der Flimmerfrequenz und der Grösse von Effekten. Jeder Beobachter hat wieder seine besondere Eigenart. Aber wir glauben doch, andeutungsweise einen Zusammenhang insofern bemerkt zu haben, als Beobachter, welche mit hoher Flimmerfrequenz glauben arbeiten zu müssen, durchschnittlich grössere Effekte (Abhängigkeit von λ_2 , $B_F \dots$) zeigen als Beobachter, die unter denselben Bedingungen langsamer flimmern. Der Deuteranomale H. K. arbeitet mit Frequenzen, die 10...20% unter dem Durchschnitt liegen.

Grundsätzliches über die Forderungen „helladaptiert“ und „ausgeruht“, die den Zustand des Auges determinieren sollen. Im Zusammenhang mit Fig. 7 wurde bewusst die ganze Entstehung der ausgeglichenen Kurve *A* erläutert, um keinen falschen Eindruck über den quantitativen Wert dieser Darstellung feinerer Effekte aufkommen zu lassen. Noch deutlicher mag Fig. 9 die Schwierigkeiten des Herausschälens von sinnvollen Mittelwerten zum Ausdruck bringen. Diese Schwierigkeiten sowie die in Ergebnisse 2) erwähnte Umkehrung der Reihenfolge von Kurven und der in Ergebnisse 3) hervorgehobene Widerspruch zwischen zwei vollwertigen unabhängigen Messreihen veranlassen uns zu einer grundsätzlichen Bemerkung über den zweckmässig einzuhaltenden Messmodus.

Helladaption auf z. B. 1000 asb und nachheriges Messen bei einigen 10...100 asb eignet sich nicht gut zur Ermittlung feinerer Effekte. Wir arbeiteten im hellen Zimmer; nur bei den Messungen mit $B_F = 15$ asb musste das Licht im Raum leicht gedämpft werden. Immerhin war Helladaption einigermassen gewährleistet.

Weniger einfach liegt der Fall bei der Frage des Ausruhens. Dass man beim Kolorimetrieren oder beim Photometrieren nach der Methode des direkten Vergleichs nach kurzem Blick auf das Feld sofort, d. h. möglichst schon nach einer Sekunde das Auge auf einem neutralen Feld ausruhen lässt, um Umstimmung zu vermeiden, ist durchaus in Ordnung. Das Flimmerverfahren hat nun den Vorteil, dem Auge nur den mittleren Farbeindruck zu zeigen, und wenn eine schädliche Umstimmung eintritt, so kann es sich nur um eine Differenzwirkung handeln. Es ist bekannt, dass man in dieser Hinsicht beim Flimmerverfahren nicht ängstlich zu sein braucht. JAGGI hat bei seinen Versuchen über Eindeutigkeit reproduzierbare Unterschiede von 2% je nach der Reihenfolge der Ausmessungen der Filter festgestellt. Bei diesen Versuchen wurde fast dauernd das Flimmerfeld fixiert; das Umfeld wurde nur gelegentlich rasch angeschaut. Diese Stabilität

unseres Auges gestattet also in der Praxis zwischen der Forderung des Ausruhenlassens nach jeder Einstellung und dem Bedürfnis nach rascher Arbeit relativ leicht einen mittleren Weg zu finden, der darin besteht, dass man rasch hintereinander einige Einstellungen, die gewöhnlich sehr wenig streuen, ausgeführt und dieses Vorgehen 2- oder 3mal wiederholt.

Etwas kritischer wird nun die Sachlage, wenn es sich darum handelt, zur Untersuchung eines bestimmten, wenige Prozente ausmachenden Effektes nach einem zeitlich knapp bemessenen Programm unter möglichster Beseitigung aller Faktoren, die die Streuung vermehren könnten, zu arbeiten. Dann leidet das Ausruhen etwas darunter. Ruht der Beobachter aber konsequent aus, so streut er zum Teil wegen Kriteriumswechsel, zum Teil weil das Ausruhen auch eine Ablenkung bedeutet, derart, dass der gesuchte Effekt unter der Streuung zu verschwinden droht.

Sind solche erzwungene Effekte als Eigenschaft des Auges anzuerkennen oder als nicht reell abzulehnen? *Beides* lässt sich begründen; weder das eine noch das andere ist allein richtig. Es gibt eben eine abgestufte Reihe von Realitätsgraden, bei denen die Methode mehr und mehr auf das Ergebnis bestimmend einwirkt. Aber es ist bekanntlich kein spezifisches Merkmal nicht-physikalischer Messergebnisse, sondern eine allgemeine Folge der Art unseres Erkennens, dass das Resultat den Stempel der Messmethode trägt. Nur kann im Gebiete der Physiologie die messtechnisch bedingte Komponente der zu bestimmenden „Eigenschaften“ bereits beträchtlich sein.

Über die Leuchtdichte-Abhängigkeit einer Farbgleichung. Im Interesse des Anschlusses an andere Arbeiten wurde Wert darauf gelegt, im Gebiet stärkster Beeinflussbarkeit von $I(\lambda)$ eine Farbgleichung zu untersuchen. Im Doppelmonochromator (Fig. 3) wurde vor den Spalt S_4 eine Opalglaslampe mit Rotfilter 2 mm OG 3 eingebracht; λ_1 wurde gleich der effektiven Wellenlänge dieses Filters = 620 m μ gewählt.

Für den Farbnormalen II. L. wirkt das rote Filterlicht bei $B_F = 500$ asb, $B_{U+IZ} = \frac{1}{5} B_F$, bezogen auf das farbgleiche Spektralrot, ca. 3% mehr als bei 35 asb, $B_{U+IZ} = \frac{1}{5} B_F$. Bei $B_{U+IZ} = B_F$ für den normalen und unter allen Bedingungen für den Deuternormalen ergibt sich weniger als 2%.

Die Grösse 3% ist verständlich, da es sich um einen Effekt höherer Ordnung, nämlich um die Auswirkung der *Krümmung* der Kurve B (Fig. 6) handelt.

Zusammenfassende Bemerkung über die allgemeine Grössenordnung der Abweichungen von der linear-eindeutigen Struktur. KÖNIG²⁰⁾ hat versucht, durch Modellbetrachtungen plausibel zu machen, dass die Abweichungen von der Eindeutigkeit mit den Abweichungen von der Linearität innerlich verwandt sind, wobei die ersteren Tendenz haben, praktisch weniger in Erscheinung zu treten. Da die Abhängigkeit von der Leuchtdichte eine spezifische Nichtlinearität darstellt, kann man theoretisch vermuten, dass

Abhängigkeit des $V(\lambda)$ von $\lambda_2 <$	Abhängigkeit des $V(\lambda)$ von B_F je Sprung 1:2
--	--

In der Tat konnten wir bei Farbtüchtigen oben in beiden Versuchsgruppen die charakteristischen Fehlerkategorien von 5% für die Enden und 3% für die Mitte des Spektrums feststellen.

Für den Deuteranomalien sind in beiden Fällen engere Grenzen nachgewiesen.

Praktisch bedeutet dies, dass man sich bei der orientierenden Prüfung von Beobachtern wahrscheinlich auf die experimentell wesentlich einfachere Versuchsgruppe der spezifischen Additivitätsprüfungen (insbesondere die Abhängigkeit von B_F , ev. noch von $B_U + I_Z$) wird beschränken dürfen.

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1940/41 unter der Leitung von Prof. Dr. H. KÖNIG im Eidg. Amt für Mass und Gewicht in Bern ausgeführt.

Mein herzlicher Dank gebührt: Herrn Direktor BUCHMÜLLER für die Aufnahme in sein Institut, Herrn Prof. KÖNIG für seine Anregungen und stets fördernde Hilfsbereitschaft, sowie allen Beobachtern für ihre Ausdauer und Sorgfalt, mit denen sie die oft ermüdenden Messungen ausgeführt haben.

Eidg. Amt für Mass und Gewicht, Bern,

Literatur.

- 1) Commission Internationale de l'Eclairage, Compte-rendu Genève 1924 (Cambridge 1926), S. 67.
- 2) Commission Internationale de l'Eclairage, Compte-rendu Scheveningen 1939, Report 5. Erscheint demnächst.
- 3) ARNDT, Das Licht **6**, 75 (1936).
- 4) DRESLER, Das Licht **7**, 81 (1937).
- 5) RIECK, Das Licht **7**, 215 (1937).

- ⁶⁾ DRESLER, Das Licht **7**, 203 (1937).
 - ⁷⁾ PRESTON, Proc. Phys. Soc. **50**, 398 (1938).
 - ⁸⁾ JAGGI, Helv. Phys. Acta **12**, 77 (1939).
 - ⁹⁾ JAINSKI, Diss. T. H. Berlin, Union Deutsche Verlagsgesellschaft Berlin 1938; Auszug: Das Licht **8**, 245 (1938).
 - ¹⁰⁾ FORSYTHE, BARNES und SHRIDER, Journ. Opt. Soc. Amer. **28**, 241 (1938).
 - ¹¹⁾ IVES, Phil. Mag. **24**, 149, 352, 744, 845, 853 (1912).
 - ¹²⁾ PRESTON, Proc. Phys. Soc. **51**, 757 (1939).
 - ¹³⁾ DRESLER, Das Licht **10**, 79 (1940).
 - ¹⁴⁾ DRESLER, Die Naturwissenschaften **29**, 225 (1941).
 - ¹⁵⁾ KÖNIG, Bulletin des Schweiz. El.-tech. Vereins **30**, 729 (1939).
 - ¹⁶⁾ BECHSTEIN, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **25**, 45 (1905).
 - ¹⁷⁾ COBLENTZ u. EMERSON, Bur. of Stand. J. of Research **14**, 167 (1917).
 - ¹⁸⁾ ROSENBERG, Zeitschr. f. Sinnesphysiologie **59**, 103 (1928).
 - ¹⁹⁾ DZIOBEK und REEB, Physikal. Zeitschr. **35**, 545 (1934).
 - ²⁰⁾ KÖNIG, Helv. Phys. Acta **15**, 85, 1942.
-

Die spezifische Wärme seignette-elektrischer Substanzen. Dielektrische Messungen an KD_2PO_4 -Kristallen.

Von Werner Bantle.

(10. III. 1942)

Zusammenfassung. Es wird die Anomalie der spezifischen Wärme der seignette-elektrischen Substanzen KH_2AsO_4 , KH_2PO_4 und KD_2PO_4 am oberen Curiepunkt gemessen. Die Versuchsanordnung ist so gewählt, dass in erster Linie die gesamte anomal verbrauchte Wärmemenge $Q_0 = \int \Delta C \cdot dT$ bestimmt werden kann, da daraus der Lorentz-Faktor des inneren Feldes berechnet wird.

Die Herstellung von KD_2PO_4 -Kristallen wird ausführlich beschrieben. Die Dielektrizitätskonstante dieses Kristalls wird sowohl in der ausgezeichneten c -Richtung als auch in der a -Richtung gemessen. Es ergibt sich daraus, dass der obere Curiepunkt von KH_2PO_4 ($\Theta = 123^\circ \text{K}$) beim Ersatz des Wasserstoffs durch Deuterium um 90° nach höheren Temperaturen verschoben wird. Dies ist weitaus der grösste bisher bekannte Isotopeneffekt.

Aus den mit Hilfe der Braunschen Röhre an KD_2PO_4 aufgenommenen Hysteresiskurven werden die Sättigungspolarisation, die Remanenz, das Koerzitivfeld und die Verluste in Funktion der Temperatur gewonnen. Am sogenannten unteren Curiepunkt zeigt dieser Kristall ein gegenüber Seignettesalz völlig verschiedenes Verhalten. Dies wird dadurch erklärt, dass die spontane Polarisation bei Seignettesalz für tiefe Temperaturen verschwindet, während sie bei dieser Substanz nur die Möglichkeit zum Umklappen verliert. Damit in Übereinstimmung steht die Tatsache, dass am unteren Curiepunkt von KD_2PO_4 keine Anomalie der spezifischen Wärme gefunden wurde.

1. Einleitung.

Eine Substanz bezeichnet man als seignette-elektrisch, wenn sie in einem gewissen Temperaturgebiet eine spontan auftretende elektrische Polarisation besitzt. Bis jetzt sind zwei Gruppen solcher Kristalle bekannt, nämlich das Seignettesalz mit seinen Mischkristallen (Gruppe I) und die beiden isomorphen Salze KH_2AsO_4 und KH_2PO_4 (Gruppe II). Beide Gruppen stimmen darin überein, dass ihre Vertreter bei hohen Temperaturen paraelektrisch sind, unterhalb einer gewissen Temperatur (der sogenannten oberen Curietemperatur) aber eine spontane elektrische Polarisation aufweisen. Damit verknüpft ist das Auftreten einer elektrischen Hysterese zwischen dem angelegten äusseren Feld und der dadurch erzeugten elektrischen Polarisation. Soweit verhalten sich beide Gruppen analog. Wesentliche Unterschiede treten erst bei der sogenannten unteren Curietemperatur auf, wo die Hystereseis-

erscheinungen wieder verschwinden. Diese Verhältnisse werden in Abschnitt VI diskutiert.

Das Auftreten einer spontanen Polarisation drängt natürlich zu einem Vergleich mit den ferromagnetischen Substanzen. Bei diesen ist mit dem Verschwinden der spontanen Magnetisierung am Curiepunkt eine Anomalie der spezifischen Wärme verbunden, welche anschaulich die zusätzliche Energie zeigt, die zum Aufbrechen der spontanen Magnetisierung zugeführt werden muss.

Wie BUSCH¹⁾ zeigte, lässt sich das dielektrische Verhalten von KH_2AsO_4 und KH_2PO_4 gut erklären, indem die Weiss'sche Theorie der ferromagnetischen Substanzen erweitert wird. In der Nähe des Curiepunkts sind diese Erweiterungen jedoch vernachlässigbare Korrekturglieder, so dass für dieses Temperaturgebiet die Ergebnisse der Weiss'schen Theorie ohne weiteres übertragen werden können. Man hat deshalb bei den seignette-elektrischen Substanzen sowohl beim Entstehen als auch beim Verschwinden der spontanen Polarisation eine Anomalie der spezifischen Wärme zu erwarten.

Unter der Voraussetzung, dass das äussere elektrische Feld $E = 0$ ist und dass die Polarisation P des Kristalls dargestellt werden kann als Funktion von $\frac{F}{T}$, also $P_s = \varphi\left(\frac{F}{T}\right)$, wobei F das innere Feld am Ort eines Dipols bedeutet, welches definiert ist als $F = E + fP$ ($f = \text{const} = \text{Lorentzfaktor}$), kann (vgl. ²⁾) mit Hilfe der Thermodynamik folgender Zusammenhang zwischen der zusätzlichen spezifischen Wärme ΔC und der spontanen Polarisation P_s abgeleitet werden:

$$\Delta C = -\frac{1}{2} \cdot f \cdot \frac{dP_s^2}{dT}. \quad (1)$$

Der Lorentzfaktor f hängt ab von der Kristallstruktur und der Verteilung der Dipole darin. Für kubische Kristalle wird $f = \frac{4\pi}{3}$, jedoch kann f im Prinzip auch negativ werden. Für Seignettesalz fand MÜLLER aus dielektrischen Messungen einmal den Wert $2,314^3)$, ein zweites Mal den Wert $3,0 \pm 0,2^4)$. Für KH_2PO_4 hat BUSCH¹⁾ zwei Lorentzfaktoren eingeführt. Der eine, f_D genannt, verknüpft die Gesamtpolarisation mit dem Feld am Ort eines Dipols, im Gegensatz zu f_U , welcher die Gesamtpolarisation mit der Feldstärke an einem dipolfreien Gitterpunkt verbindet. BUSCH findet für f_D den Wert $0,42$ während $f_U = 5$ einer Arbeit von MÜLLER⁵⁾ entnommen werden kann. Mit diesen Werten für die Lorentzfaktoren und dem experimentell bekannten Zusammenhang zwi-

schen spontaner Polarisation und Temperatur erwartet man laut Gleichung (1) am oberen Curiepunkt eine Vergrößerung und am unteren Curiepunkt eine Verkleinerung der normalen spezifischen Wärme.

Die gesamte Wärmemenge Q_0 , die dem Kristall während des Abbaus des inneren Feldes zugeführt werden muss, ergibt sich nach Gleichung (1) zu

$$Q_0 = \int_{T_1}^{T_2} \Delta C \cdot dT = \frac{1}{2} \cdot f \cdot P_s^2(T_1) = \frac{1}{2} \cdot f \cdot P_{s, \max}^2. \quad (2)$$

Sofern es gelingt Q_0 zu messen, erlaubt diese Gleichung eine bequeme Bestimmung des Lorentzfaktors, die überdies gegenüber den dielektrischen Methoden den Vorteil hat, dass nur eine einzige theoretische Voraussetzung $\left(P = f \left(\frac{F}{T}\right)\right)$ gemacht wurde. Im Prinzip könnte natürlich auch Gleichung (1) dazu verwendet werden, jedoch ist speziell bei KH_2AsO_4 der Abfall der spontanen Polarisation mit der Temperatur dermassen steil, dass $\frac{dP_s^2}{dT}$ nur ungenau bestimmt werden kann. Bei bekanntem Lorentzfaktor kann jedoch Gleichung (1) zur Kontrolle des Temperaturganges von ΔC dienen, der mit demjenigen von $\frac{dP_s^2}{dT}$ übereinstimmen sollte.

Den ersten qualitativen Nachweis einer solchen Wärmeanomalie am oberen Curiepunkt von Seignettesalz fanden KOBEKO und NELIDOW⁶⁾. Genauere Messungen machte RUSTERHOLZ⁷⁾. Er fand eine deutliche Anomalie beim oberen Curiepunkt mit einem gesamten anomalen Wärmeverbrauch von 2,1 cal/Mol. Mit dem neuesten Maximalwert der spontanen Polarisation von $2,4 \cdot 10^{-7}$ Clb/cm²⁸⁾ entspricht dies nach Gleichung (2) einem Lorentzfaktor von 2,1, was mit den Werten 2,3—3 von MÜLLER gut übereinstimmt. Die Grösse von ΔC und dessen Verlauf mit der Temperatur stimmt jedoch nicht mit dem theoretisch erwarteten überein.

Nach den Messungen von RUSTERHOLZ hat ΔC nur in einem Temperaturgebiet von 3° einen von Null wesentlich verschiedenen Wert und erreicht am Curiepunkt den Maximalwert von 5 cal/Mol. Entsprechend dem Verlauf von $P_s(T)$ und der Gleichung (1) sollte jedoch der Maximalwert nur 0,3 cal/Mol betragen, dafür müsste sich aber ΔC über ein Temperaturgebiet von 20° erstrecken.

Da aber die normale spezifische Wärme von Seignettesalz in der Umgebung der Curiepunkte schon einen Wert von ca. 100 cal/Mol hat, ist der theoretisch zu erwartende maximale Sprung

von 0,3 cal/Mol nur 0,3%, was im allgemeinen kleiner ist als die Messgenauigkeit. Es ist deshalb nicht sehr erstaunlich, dass die späteren Versuche ⁹⁾ ¹⁰⁾ ¹¹⁾ diese Anomalie überhaupt nicht feststellen konnten. Einzig WILSON¹²⁾ fand sowohl am unteren als auch am oberen Curiepunkt von Seignettesalz eine Andeutung der Anomalie, deren Vorzeichen mit der Theorie übereinstimmt. Auch aus dieser Messung lässt sich jedoch nur folgern, dass die Anomalie kleiner als 1% ist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit bestand nun darin, nochmals die Messung der Anomalie an Seignettesalz zu versuchen, dann aber hauptsächlich an den seignette-elektrischen Salzen der Gruppe II die Richtigkeit der Gleichungen (1) und (2) zu prüfen. Nach den dielektrischen Messungen von BUSCH¹⁾ sollte nämlich z. B. am oberen Curiepunkt von KH_2AsO_4 ein Sprung der spezifischen Wärme von mindestens 30 cal/Mol auftreten, also ein Effekt, der 100 mal so gross ist, wie der an Seignettesalz erwartete.

Ein weiteres Ziel der vorliegenden Arbeit war die Herstellung von KD_2PO_4 , d. h. Kaliummetaphosphat, in welchem der Wasserstoff durch Deuterium ersetzt ist. An dieser Substanz sollte die aus theoretischen Gründen erwartete Verschiebung der Curietemperatur, sowie die dielektrischen Daten über ein möglichst grosses Temperaturgebiet gemessen werden. Überdies bestand die Aussicht, die spezifische Wärme nicht nur am oberen, sondern auch am unteren Curiepunkt messen zu können.

II. Herstellung der Substanzen.

1. *Seignettesalz*. Das zu den Messungen an dieser Substanz verwendete Material bestand aus 5 gleichen Kristallplatten. Ihre Kantenlängen waren $1,5 \cdot 31 \cdot 31$ mm.

2. KH_2AsO_4 . An dieser Substanz wurden zwei Messreihen ausgeführt. Die erste Probe bestand aus 28,066 g reinem KH_2AsO_4 von Kahlbaum, welches grob kristallisiert käuflich ist. Das Salz wurde noch im Mörser fein zermahlen.

Das Material der zweiten Probe (25,747 g) wurde durch Zermahlen einiger Einkristalle erhalten. Diese sind aus einer wässrigen Lösung von Kaliumhydroxyd und Arsensäure durch langsames Absenken der Temperatur gezüchtet worden. (Näheres bei ¹⁾.)

3. KH_2PO_4 . Auch zur Messung dieser Substanz wurden einige Einkristalle (23,4 g) zerkleinert, die analog zu KH_2AsO_4 gezüchtet worden sind.

4. KD_2PO_4 . Dieses Salz ist erstmals von UBBELOHDE und WOODWARD¹³⁾ sowie ROBERTSON und UBBELOHDE¹⁴⁾ 15) hergestellt worden, und zwar dadurch, dass KH_2PO_4 in schwerem Wasser öfters gelöst und wieder ausgefällt wurde. Beim Versuch, einen KD_2PO_4 -Kristall zu züchten, stellte man zwei merkwürdige Tatsachen fest: Erstens fiel aus einer übersättigten KD_2PO_4 -Lösung ein Salz aus, welches monoklin ($a = 7,37 \text{ \AA}$; $b = 14,73$; $c = 7,17$; $\beta = 92^\circ$) kristallisiert war und nicht tetragonal wie KH_2PO_4 ($a = 7,43 \text{ \AA}$; $c = 6,97$). Nachdem aber das fein gepulverte, monokline KD_2PO_4 einige Tage unter Luftabschluss bei Zimmertemperatur gelagert war, hatte es sich vollständig in tetragonales KD_2PO_4 umgewandelt. Zweitens erwies es sich als äusserst schwierig, überhaupt einen grösseren Kristall zu züchten. Erst nachdem ein Keim von KH_2PO_4 in die KD_2PO_4 -Lösung gebracht wurde, gelang nach vielen missglückten Versuchen die Herstellung eines trüben Kristalls, der tetragonal kristallisiert war.

Da wir zur Messung der spezifischen Wärme nur pulverförmiges KD_2PO_4 brauchten, hofften wir, diese letzte Schwierigkeit umgehen zu können. Überdies vermuteten wir die Ursache für die schlechte Kristallisierbarkeit darin, dass der Wasserstoff durch den Austauschprozess nur teilweise ersetzt wurde, so dass sich schlussendlich ein Mischkristall von KH_2PO_4 und KD_2PO_4 bildete, was bei geringfügigen Verschiedenheiten der Gitterkonstanten zu Wachstumsstörungen führen kann. Wir waren aus diesem Grunde bemüht, möglichst überhaupt keinen Wasserstoff in unser Salz zu bekommen und setzten es deshalb zusammen aus D_2O (99,6-proz.), K_2CO_3 (Merck, pro analysi) und P_2O_5 (Merck, pro analysi). Zur Herstellung diente die in Fig. 1 dargestellte Anordnung.

In das Gefäss *A* wurde eine genau gewogene Menge P_2O_5 gebracht, in die Flasche *B* etwas D_2O . Durch teilweise Evakuierung mit nachfolgendem Luftabschluss von *A* und *B* und leichtes Erwärmen der Heizplatte *H* konnte ein langsames Hinüberdiffundieren des D_2O von *B* nach *A* erreicht werden. Der Kühllansatz *K* war dabei mit heissem Wasser gefüllt. In der Flasche *A* bildete sich folglich $P_2O_5 + 2 D_2O \rightarrow 2 D_2PO_4$, also die Deutero-Orthophosphorsäure. Dieser Prozess wurde sehr langsam ausgeführt, damit die grosse Bildungswärme abgeleitet werden konnte, da sonst durch zu starke örtliche Erhitzungen die entstehende Säure gelb gefärbt war. In analoger Weise wurde aus D_2O und K_2CO_3 die Deutero-Kalilauge KOD hergestellt. Durch Zusammengiessen von D_3PO_4 und KOD im richtigen Mengenverhältnis erhielten wir, da D_2O im Überschuss vorhanden war, eine Lösung von KD_2PO_4 in schwe-

rem Wasser. Diese Lösung wurde in die Flasche *B* eingefüllt und indem nun sowohl *K* als auch *A* gekühlt wurden, konnte ihr unter vermindertem Druck nach Belieben schweres Wasser entzogen werden. Das gelöste Salz fiel dann in *B* aus.

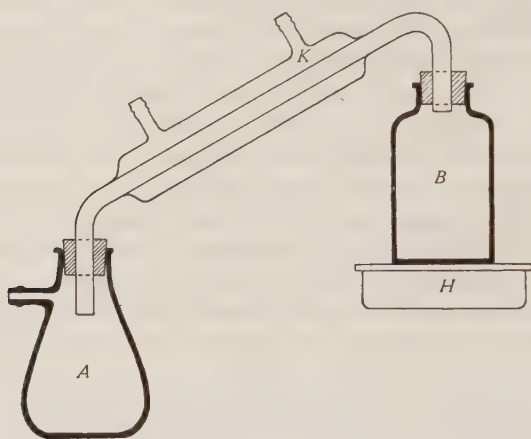


Fig. 1.

Bei allen provisorischen Messungen an dem auf diese Weise gewonnenen KD_2PO_4 konnte keine Anomalie der spezifischen Wärme festgestellt werden. Röntgenaufnahmen*) nach der Methode von Debye und Scherrer bestätigten, dass auch dieses Salz sofort nach der Ausfällung in einer niedrigeren Symmetrieklasse kristallisiert war und sich erst im Verlauf einiger Tage in tetragonales KD_2PO_4 verwandelte. Trotzdem wurde auch nach wochenlanger Lagerung keine Andeutung eines Curiepunktes bei der Messung der spezifischen Wärme von Zimmertemperatur bis 80°K gefunden. Um anhand des Temperaturverlaufs der Dielektrizitätskonstante festzustellen, ob diese Substanz überhaupt nicht mehr seignetteelektrisch sei, oder ob nur der Curiepunkt zu noch tieferen Temperaturen verschoben sei, versuchten wir einen Einkristall zu züchten. Wir stellten zu diesem Zweck eine bei ca. 40°C gesättigte KD_2PO_4 -Lösung her. Die sich beim Absenken der Temperatur bildenden Kristalle hatten alle die Form langer und dünner Nadeln, die für die Messungen unbrauchbar waren. Da man bei KH_2PO_4 den Kristallhabitus durch eine kleine Abweichung von der stöchiometrischen Zusammensetzung der Lösung verändern kann, wurde auch hier auf diese Weise versucht, die Nadeln zu grösserem Dickenwachstum anzuregen, jedoch vergebens. Nun

*) Ausgeführt von dipl. phys. M. DE QUERVAIN.

entschlossen wir uns, als Keim ein winziges KH_2PO_4 -Kriställchen in eine Lösung von 130 cm^3 einzusetzen und konnten damit erreichen, dass sowohl dieser Keim wuchs, als auch am Boden einige Kristalle entstanden, die den normalen Habitus der KH_2PO_4 -Kristalle aufwiesen. Durch äusserst langsames Absenken der Temperatur von 40°C auf 23°C gelang es uns, am eingehängten Keim einen $5,7\text{ g}$ schweren und vollständig klaren KD_2PO_4 -Kristall zu züchten. Alle dielektrischen Messungen sind an Kristall-Platten ausgeführt worden, die dieser Mutterlösung entstammten. Dabei wurde der obere Curiepunkt bei 213°K festgestellt. Als wir daraufhin Kristalle zerkleinerten und daran die spezifische Wärme bestimmten, zeigte sich eine deutliche Anomalie bei dieser Temperatur. Es ist somit anzunehmen, dass KD_2PO_4 , welches durch rasches Ausfällen aus der Lösung anfänglich monoklin kristallisiert ist und erst nach einigen Tagen in die tetragonale Kristallform übergeht, nicht seignette-elektrisch ist, während KD_2PO_4 , welches durch langsames Auskristallisieren aus einer mit einem tetragonalen Keim geimpften Lösung erhalten wird, diese Eigenschaft aufweist. Die Ursache für dieses so verschiedene Verhalten einer chemisch und kristallographisch gleichen Substanz sehen wir in der Tatsache, dass das schnell ausgefällte KD_2PO_4 bei der Umwandlung in mikroskopisch kleine Teilchen (Grössenordnung 10^{-3} cm) zerfällt, wodurch die Weiss'schen Bezirke wahrscheinlich zu stark unterteilt werden. Die Feinheit der Substanz ist auf den Pulveraufnahmen eindeutig festzustellen, da die Interferenzlinien nach der Umwandlung kontinuierlich erscheinen, während sie vorher aus einzelnen Punkten zusammengesetzt sind.

Um genügend KD_2PO_4 -Pulver ($9,116\text{ g}$) zur Messung der spezifischen Wärme zu erhalten, wurden die $130\text{ g D}_2\text{O}$ nochmals bei 40° mit KD_2PO_4 gesättigt, mit einem kleinen KH_2PO_4 -Keim geimpft und dann während 30 Tagen stetig auf 23°C abgekühlt. Von den so erhaltenen Kristallen wurden 5 Stück, und zwar durchwegs solche ohne KH_2PO_4 -Keim, im Mörser zerkleinert.

III. Methode und Apparatur zur Messung der spezifischen Wärme.

1. *Seignettesalz.* Da das Resultat unserer Messungen an Seignettesalz zwar die Resultate von KOBeko und NELIDow⁶⁾ und RUSTERHOLZ⁷⁾ nicht bestätigte, dafür aber in Übereinstimmung ist mit dem theoretisch erwarteten Resultat und den Messresultaten^{9) 10) 11) 12)}, soll die verwendete Messanordnung hier nur kurz skizziert werden.

Die Messungen wurden in einem Vakuum-Differentialkalorimeter ausgeführt. Da jedoch der Verdacht bestand, dass das innere Feld des Kristalls und dadurch natürlich auch die Anomalie der spezifischen Wärme durch Zermahlen der Substanz verändert werden könnte, wurden ganze Kristallplatten verwendet. Diese wickelten wir in ein Silkoband, d. h. ein Gewebe aus Seide und Widerstandsdraht, ein. Als Vergleichssubstanz diente Steinsalz, wovon ebenfalls 5 Kristallplatten geschnitten und in Silkoband eingewickelt wurden. Beide Salze verschlossen wir in zwei allseitig eng anschliessende Kupferbecher. Der gleiche Strom wurde nun während einer mit einer automatischen Stoppuhr gemessenen Zeit durch beide Silkobänder geschickt. Beide Salze erhielten dadurch eine bekannte Wärmemenge zugeführt und erwärmten sich mit ihren Kupferbehältern. Der Verlauf der Temperaturdifferenz zwischen den beiden sich im Hochvakuum befindenden Behältern mit der Zeit konnte durch eine Thermosäule, bestehend aus 8 Kupfer-Konstantan-Thermoelementen, gemessen werden und wurde in gleicher Weise wie bei RUSTERHOLZ⁷⁾ ausgewertet.

2. KH_2AsO_4 ; KH_2PO_4 ; KD_2PO_4 . Bei den Messungen an Seignettesalz sind zwei Umstände unangenehm aufgefallen.

Erstens dauerte es viele Stunden, bis die spezifische Wärme bei einer bestimmten Temperatur gemessen war, da zuerst in einem äusserst genau arbeitenden Thermostaten sowohl die Seignettesalz- als auch die Steinsalzplatten auf die bestimmte Temperatur gebracht werden mussten. Dann wurde während kurzer Zeit geheizt und anschliessend daran musste der Temperaturverlauf während ca. 40 Min. verfolgt werden. Eine solche Messreihe lieferte dann einen Punkt der Kurve $C(T)$, die wir aufzunehmen hatten.

Zweitens bestand nach den Ergebnissen von RUSTERHOLZ⁷⁾ die Möglichkeit, dass die ganze Anomalie in einem viel kleineren Temperaturgebiet auftrat, als nach der Theorie und dem Verlauf der spontanen Polarisation mit der Temperatur zu erwarten war. Wir waren deshalb gezwungen, die spezifische Wärme bei sehr vielen, nahe beieinanderliegenden Temperaturen zu bestimmen, da sonst die Möglichkeit bestand, dass die Anomalie unbemerkt zwischen zwei Messpunkten blieb.

Für unsere Messungen an den Salzen der Gruppe II verwendeten wir aus diesen Gründen eine Methode, die diese beiden Unannehmlichkeiten nicht besitzt. Die neue Methode liefert in erster Linie die gesamte anomal zugeführte Wärmemenge und

erst indirekt die spezifische Wärme in Funktion der Temperatur. Da wir jedoch entsprechend den in der Einleitung gemachten Ausführungen den uns interessierenden Lorentzfaktor aus dieser anomalen Wärmemenge berechnen, ist diese Methode für unsere Zwecke besser geeignet.

Das Prinzip dieses Messverfahrens ist sehr einfach: Man führt dem zu messenden Salz dauernd in irgend einer gut messbaren Form Wärme zu und misst dauernd seine Temperatur. Dadurch erhält man den Wärmehalt Q in Funktion der Temperatur T . Solange die spezifische Wärme $C = \frac{dQ}{dT} = \text{const} = C_0$ ist, bildet $Q(T)$ eine Gerade. Die am oberen Curiepunkt erwartete Vergrößerung von C würde dann einfach eine Vergrößerung der Neigung der Funktion $Q(T)$ bewirken und oberhalb der Curietemperatur wäre wieder ein geradliniger Verlauf zu erwarten. Diese zweite Gerade könnte dargestellt werden durch $Q(T) = C_0 T + Q_0$, wobei Q_0 die anomal zugeführte Wärmemenge bedeutet. Im Prinzip erhält man also Q_0 aus der Differenz der Achsenabschnitte der beiden geradlinigen Kurvenäste und die spezifische Wärme für jede Temperatur als Ableitung der $Q(T)$ -Kurve.

Das verwendete Kalorimeter ist in Fig. 2 dargestellt. Es besteht im wesentlichen aus 3 einander umschliessenden zylindrischen Gefässen. Der innere Kupferbecher ist an dünnen Seidenfäden aufgehängt und enthält die pulverförmige Messsubstanz. Einige Kupferdrähte quer durch das Salz sorgen für möglichst gleichmässige Temperaturverteilung. Auf dem mittleren Kupferbecher ist, durch eine dünne Glimmerschicht isoliert, ein Widerstandsdraht von 150 Ohm aufgewickelt. Der äussere Becher schliesst die ganze Anordnung luftdicht gegen die flüssige Luft ab, in die das Kalorimeter eingetaucht wird.

Die Wärme wird dem Salzbehälter durch Strahlung vom Heizungsbecher zugeführt. Für die zeitliche Erwärmung des Salzbehälters gilt dann:

$$\frac{dQ}{dt} = (c \cdot m + c_{Cu} \cdot m'_{Cu}) \frac{dT}{dt} \quad (3)$$

wobei c = spezifische Wärme des Salzes

m = Masse des Salzes

c_{Cu} = spezifische Wärme des Kupfers

m'_{Cu} = Masse des Kupferbechers.

Die pro Sekunde eingestrahelte Wärmemenge $\frac{dQ}{dt}$ ist bei gleicher geometrischer Anordnung nur eine Funktion des Gasdrucks und der Temperaturdifferenz zwischen Salzbehälter und Heizungs-

becher. Sie kann somit gemessen werden, indem der Salzbehälter durch einen genau gleichen Behälter mit Kupfer ersetzt wird. Bei gleichem Druck und gleicher Temperaturdifferenz liefert dann eine

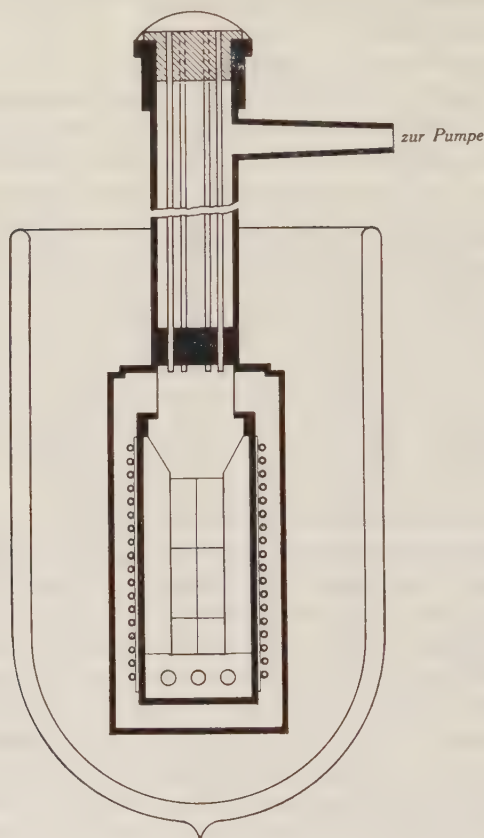


Fig. 2.

Bestimmung des Temperaturganges mit der Zeit die eingestrahlte Wärmemenge:

$$\frac{dQ}{dt} = c_{Cu} \cdot m_{Cu} \cdot \frac{dT_{Cu}}{dt} \quad (4)$$

wobei m_{Cu} = Masse des Kupferbechers + Elektrolytkupfer. Aus Gleichung (3) und (4) erhält man die spezifische Wärme c in cal/g, Grad:

$$c = \frac{c_{Cu} m_{Cu} \frac{dT_{Cu}}{dt}}{m \frac{dT}{dt}} - \frac{c_{Cu} m'_{Cu}}{m} \quad (5)$$

Da somit die spezifische Wärme aus einem Vergleich des Temperaturganges der zu messenden Substanz und des Temperaturganges von Kupfer bestimmt wird, ist es nötig, in beiden Fällen gleiche Temperaturdifferenz zwischen Heizbecher und Versuchskörper und gleiches Vakuum zu haben.

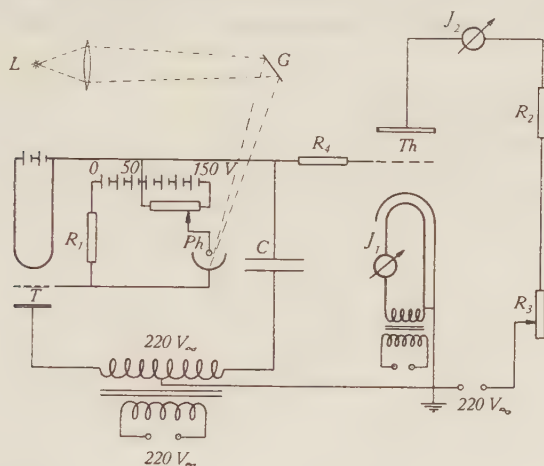


Fig. 3.

L: Galvanometerbeleuchtung; *G*: Galvanometerspiegel; *Ph*: Photozelle (AEG, gasgefüllt); *T*: Triode (Telefunken A 415); *Th*: Thyatron (AEG 1430); *J*₁: 6 Amp.; *J*₂: 4 Amp. maximal; *C*: 1000 pF; *R*₁: 1 MΩ; *R*₂: Heizspirale (150 Ω); *R*₃: 1000 Ω; *R*₄: 50000 Ω.

Die Temperaturdifferenz ΔT wird durch eine sehr genaue automatisch arbeitende Phasenverschiebungsschaltung konstant gehalten. Das Schaltschema ist in Fig. 3 aufgezeichnet. Die Temperaturdifferenz ΔT wird durch Vergleich der Thermospannung eines Kupfer-Konstantan-Thermoelements mit einem Kompensationsapparat dauernd gemessen. Als Nullinstrument dient ein Galvanometer ($3,2 \cdot 10^{-9}$ Amp./mm, m) dessen 4 m langer Lichtzeiger auf die Photozelle *Ph* fällt. Dieser Lichtzeiger reguliert den Strom durch die Heizwicklung so, dass die Thermospannung zwischen dieser und dem Messgefäß dauernd konstant bleibt. Sinkt nämlich diese Thermospannung, so verschiebt sich der Lichtzeiger auf einer keilförmigen Öffnung vor der Photozelle so, dass mehr Licht auf die Photozelle fällt. Dadurch ändert sich die Gitterspannung der Triode A 415 und damit deren Innenwiderstand, wodurch die Phase der Gitterspannung am Thyatron gegenüber der Anodenspannung so verschoben wird, dass der Strom durch den Heizwiderstand etwas steigt und dadurch die Temperaturdifferenz ΔT

wieder den ursprünglichen Wert erreicht. Durch richtige Einstellung der Gittervorspannung an der Triode und des Regulierwiderstandes R_3 kann durch das Thyatron ein Dauerstrom so einreguliert werden, dass er die Wärmeverluste des ganzen Kalorimeters ungefähr kompensiert. Die Photozelle hat auf diese Weise nur noch kleine Korrekturen auszuführen. Die maximalen Schwankungen des Lichtzeigers betragen dann nur 2 mm, was einer Tem-

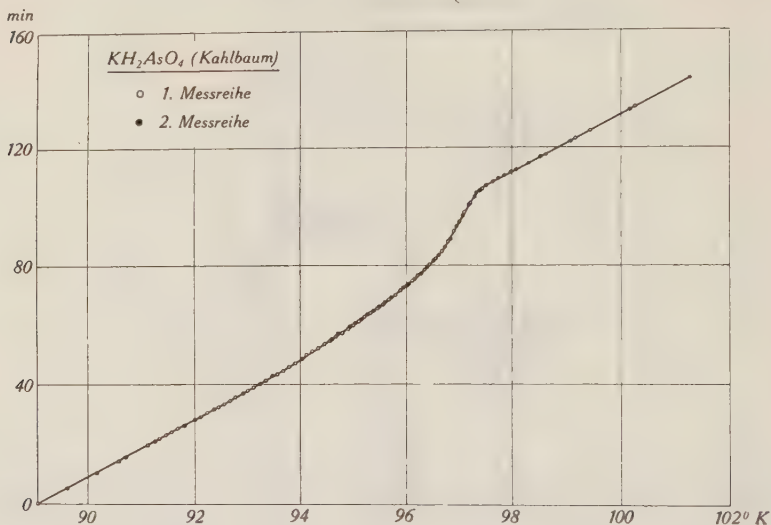


Fig. 4.

Erwärmungszeit in Funktion der Temperatur.

peraturschwankung von $1/100^\circ$ entspricht. Da die Temperaturdifferenz bei den meisten Messungen auf 40° eingestellt wurde, war damit eine Temperaturkonstanz auf 0,025% gewährleistet.

Das Vakuum im Kalorimeter (ca. 10^{-4} mm Hg) wurde hergestellt durch eine rotierende Ölpumpe und eine Quecksilber-Diffusionspumpe. Die Kontrolle des Vakuums geschah mit einem Pirani-Manometer.

Die Temperatur der Messsubstanz wurde mit einem Kupfer-Konstantan-Thermoelement, dessen eine Lötstelle in Eiswasser taucht, gemessen. Die Thermospannung konnte an einem Kompensationsapparat abgelesen werden, wobei als Nullinstrument ein empfindliches Galvanometer (Hartmann und Braun $5,3 \cdot 10^{-10}$ Amp/mm, m) Verwendung fand. Die damit erreichte relative Genauigkeit der Temperaturablesung betrug $0,002^\circ$. Die absolute Genauigkeit ist durch das Eisbad und die Eichkurve des Thermoelements wesentlich kleiner, nämlich noch $0,2^\circ$.

Der Gang einer Messung war folgender: Das Kalorimeter (Fig. 2) wurde in flüssige Luft getaucht. Wenn sich das Salz abgekühlt hatte, wurde das Innere des Kalorimeters evakuiert und der Heizungsbecher so lange geheizt, bis zwischen ihm und dem Salzbehälter die gewünschte Temperaturdifferenz erreicht war. Durch Photozelle und Verstärker wurde diese konstant gehalten. Nun erwärmte sich das Salz dauernd, und zwar im allgemeinen

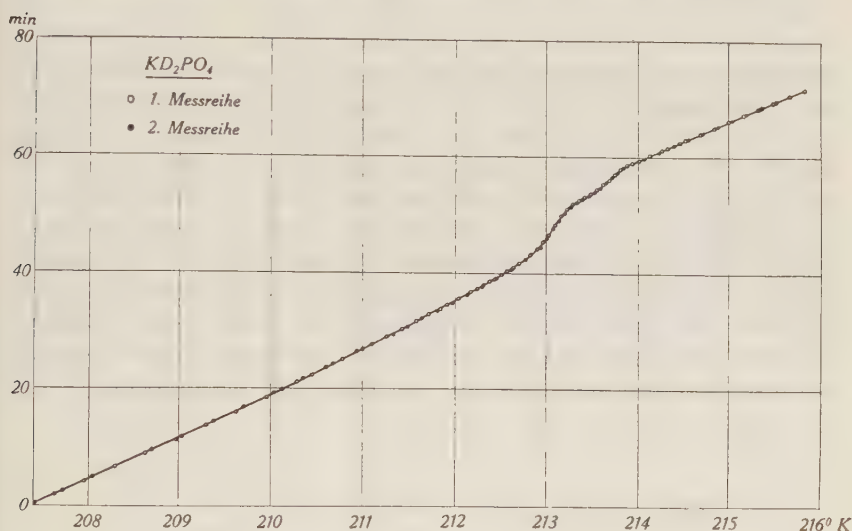


Fig. 5.

Erwärmungszeit in Funktion der Temperatur.

um $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{50}$ Grad pro Minute. Der Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur wurde aufgenommen, indem an einer Stoppuhr die Zeit abgelesen wurde, die das Salz brauchte, um sich um $0,1^\circ$ zu erwärmen. Diese Funktion $T(t)$ wurde graphisch dargestellt. Für KH_2AsO_4 (Kahlbaum) und KD_2PO_4 (Kristalle) sind je 2 Messreihen in Fig. 4 und 5 wiedergegeben. Die Übereinstimmung der Messungen an der gleichen Substanz ist ausgezeichnet, wenn man bedenkt, dass die Messdauer bei KH_2AsO_4 2,5 Stunden und bei KD_2PO_4 1,5 Stunden betrug. Nachdem in dem interessanten Temperaturgebiet einige übereinstimmende Kurven gemessen waren, wurde das Salz ersetzt durch Kupfer und daran ebenfalls $T_{Cu}(t)$ bestimmt. Die Auswertung beider Kurven ergab nach Gleichung (5) die spezifische Wärme bei jeder Temperatur. Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme von Kupfer wurde dabei nach den Angaben von Landolt-Börnstein berücksichtigt.

IV. Ergebnisse der thermischen Messungen.

Die gemessenen spezifischen Wärmen werden in cal/Mol, Grad angegeben und die Temperatur in absoluten Einheiten.

1. *Seignettesalz*. Bei diesem Salz wurde die spezifische Wärme nur in der Gegend der oberen Curietemperatur gemessen. Es ergab sich im wesentlichen der geradlinige Verlauf.

$$C = 83,8 + 0,15(T - 273)$$

Die maximalen Abweichungen von dieser Geraden erreichten 0,6%. Der theoretisch erwartete Sprung von 0,3% am Curiepunkt war nicht festzustellen. Dies ist in Übereinstimmung mit allen Autoren, ausgenommen KOBeko und NELIDow⁶⁾ sowie RUSTERHOLZ⁷⁾. Diese Forscher scheinen ein Salz gemessen zu haben, bei welchem die Anomalie erst sehr nahe am Curiepunkt auftritt, dafür dann aber grössere Werte annimmt. Da die Curietemperatur in der Nähe der Zimmertemperatur liegt, hat vielleicht sehr langes Lagern einen solchen Temperungseinfluss. Möglicherweise spielt auch der Reinheitsgrad der Substanz eine Rolle, jedoch besteht offenbar kein prinzipieller Unterschied zwischen amerikanischem und europäischem Seignettesalz wie WILSON¹²⁾ vermutet.

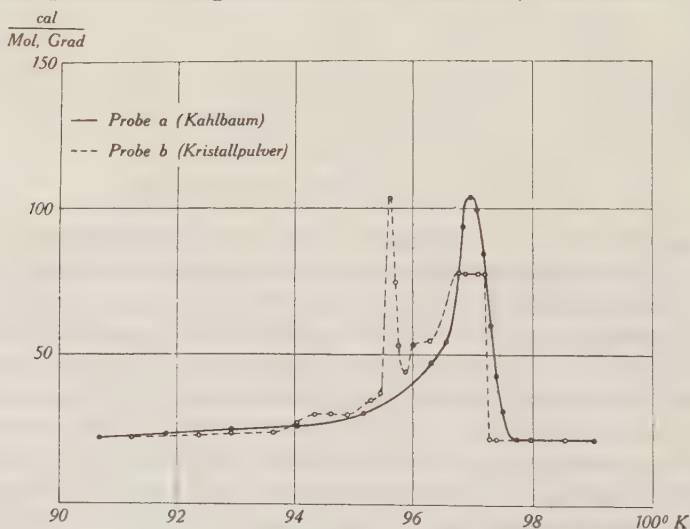


Fig. 6.

Spezifische Wärme von KH_2AsO_4 .

2. KH_2AsO_4 . Unsere Messungen an dieser Substanz haben wir in einer kurzen Notiz schon früher veröffentlicht¹⁶⁾. Es wurden zwei Proben gemessen (Fig. 6), nämlich KH_2AsO_4 von Kahlbaum (Kurve a) und KH_2AsO_4 , bestehend aus einigen von uns gezüch-

teten Kristallen, die dann im Mörser verrieben wurden (Kurve *b*). Der unregelmässige Verlauf der Kurve *b* war beliebig reproduzierbar und wurde weder durch längeres Abkühlen noch durch öfteres Abkühlen und Erwärmen verändert. Beide Salze hatten denselben anomalen Wärmeverbrauch, nämlich 84,1 resp. 84,7 cal/Mol. Mit der von BUSCH¹⁾ gemessenen Sättigungspolarisation von $5 \cdot 10^{-6}$ Clb/cm² berechnet sich daraus nach Gleichung (2) der Lorentz-faktor zu 0,50 für beide Proben. Wieso die beiden Proben einen so verschiedenen Verlauf der spezifischen Wärme zeigen, ist noch nicht geklärt. Wir vermuten jedoch, dass Kurve *b* aufzufassen ist als eine Überlagerung einiger Kurven *a* mit unter sich verschiedenen Curietemperaturen. Die dadurch postulierte Curiepunktsverschiebung könnte durch innere Spannung, herrührend vom Zerkleinerungsprozess, bedingt sein. Leider ist der Zusammenhang zwischen Curietemperatur und allseitigem Druck erst für Seignettesalz bekannt¹⁷⁾. Da Seignettesalz weicher ist als KH_2AsO_4 können die an Seignettesalz gemessenen Werte nur eine ganz rohe Abschätzung liefern. Einzelne Teile der Probe *b* müssten danach innere Spannungen bis 125 kg/cm² aufweisen.

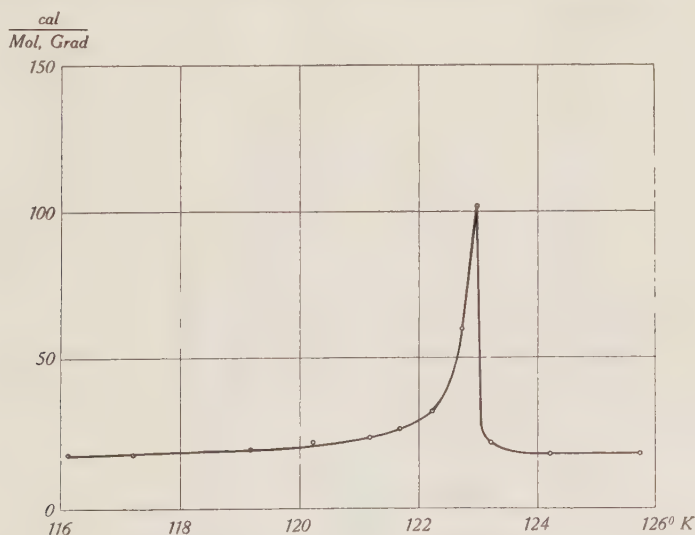


Fig. 7.

Spezifische Wärme von KH_2PO_4 .

3. KH_2PO_4 . Eine provisorisch geeichte Messung an dieser Substanz veröffentlichten wir schon im Jahre 1939¹⁸⁾. Das gemessene Salz bestand aus einigen zerkleinerten Einkristallen. Man könnte somit einen Verlauf der spezifischen Wärme entsprechend

der Kurve *b* bei KH_2AsO_4 erwarten. Wie Fig. 7 zeigt, ist dies jedoch nicht der Fall. Der maximale Wert von ΔC ist für KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 ungefähr derselbe. Der anomale Wärmeverbrauch beträgt jedoch für KH_2PO_4 nur 57,3 cal/Mol. Busch¹⁾ gibt für dieses Salz die Sättigungspolarisation mit $4,3 \cdot 10^{-6}$ Clb/cm² an, während wir 4,95 Clb/cm² gemessen haben. Wir verwenden unseren Wert, da er mit derselben Apparatur bestimmt wurde, wie derjenige von KD_2PO_4 und deshalb relativ genauer sein dürfte. Wir berechnen daraus einen Lorentzfaktor 0,37. Dieser Wert stimmt gut mit dem von Busch¹⁾ aus einer wahrscheinlichen Dipolzahl von $2 \cdot 10^{22}$ pro cm³ und einem angenommenen Dipolmoment von $1,6 \cdot 10^{-18}$ ESE berechneten Lorentzfaktor f_D von 0,42 überein, jedoch nicht mit dem kürzlich von Stephenson und Hooley¹⁹⁾ gemessenen Wert von 0,7.

4. KD_2PO_4 . Dieses Salz ist speziell interessant, weil sein oberer Curiepunkt gegenüber demjenigen von KH_2PO_4 um 90° nach höheren Temperaturen verschoben ist, wodurch auch der sogenannte untere Curiepunkt in ein Temperaturgebiet gerückt

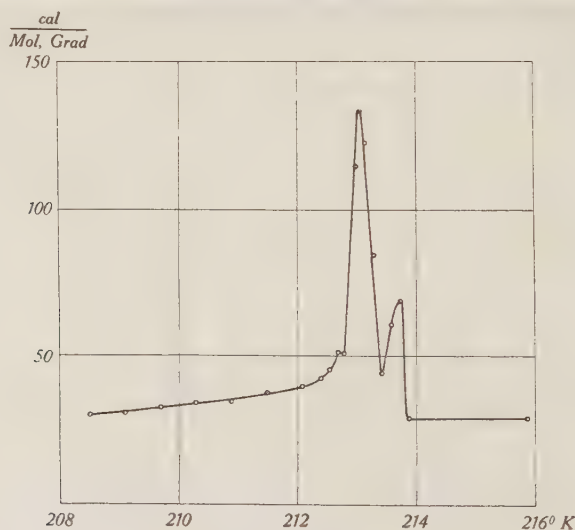


Fig. 8.
Spezifische Wärme von KD_2PO_4 .

wird, das mit flüssiger Luft bequem vermessen werden kann. Das Messresultat an pulverisierten Einkristallen in der Nähe der oberen Curietemperatur ist in Fig. 5 dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass die spezifische Wärme wieder einen unregelmässigen, aber gut reproduzierbaren Verlauf zeigt. Die Auswertung der Fig. 5

ergibt Fig. 8. Ein Teil des Salzes scheint seinen Curiepunkt bei $213,1^{\circ}\text{K}$, der andere, kleinere Teil bei $213,8^{\circ}\text{K}$ zu haben. Der anomale Wärmeverbrauch bei der oberen Curietemperatur beträgt $100,3\text{ cal/Mol}$. Da die maximale spontane Polarisation von uns in Abschnitt V zu $4,83 \cdot 10^{-6}\text{ Clb/cm}^2$ gemessen wird, bedeutet dies einen Lorentzfaktor von 0,68.

Unsere Messungen an dieser Substanz wurden ausgeführt bis unterhalb des sogenannten unteren Curiepunkts, d. h. bis zu jenen Temperaturen, bei denen die Hysteresiskurve praktisch wieder in eine Gerade übergegangen ist und die Dielektrizitätskonstante wieder klein und konstant wird. Wir fanden jedoch nirgends eine Andeutung einer negativen Anomalie der spezifischen Wärme (Fig. 9). Dies ist in Übereinstimmung mit den Messungen von J. MENDELSSOHN und K. MENDELSSOHN²⁰) an KH_2PO_4 , wobei auch am oberen Curiepunkt eine deutliche Anomalie festgestellt wurde, jedoch am unteren Curiepunkt nichts Analoges gefunden

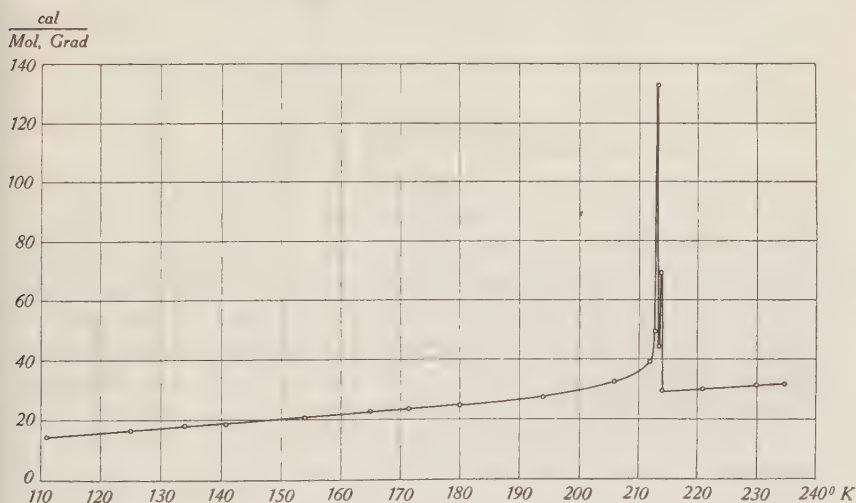


Fig. 9.
Spezifische Wärme von KD_2PO_4 .

werden konnte. Man muss folglich entweder annehmen, dass bei abnehmender Temperatur die Polarisation nur sehr langsam verschwindet, so dass die Anomalie der spezifischen Wärme sich über ein sehr grosses Temperaturgebiet erstreckt und dadurch unmessbar wird, oder dass die Polarisation bei tiefen Temperaturen gar nicht verschwindet. Dieses Problem soll in Abschnitt VI diskutiert werden.

4. $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ und $\text{NH}_4\text{H}_2\text{AsO}_4$. Diese beiden Substanzen bilden zu KH_2PO_4 isomorphe Kristalle und zeigen wie dieses temperaturabhängige Dielektrizitätskonstanten¹⁾. Die Kristalle zerfallen jedoch bei Abkühlung unter 155 resp. 220° K in eine bröckelige Masse. Es ist deshalb mit dielektrischen Methoden nicht möglich festzustellen, ob unterhalb der Umwandlungstemperatur ein Curiepunkt auftritt. Wir haben nun in qualitativer Weise festgestellt,

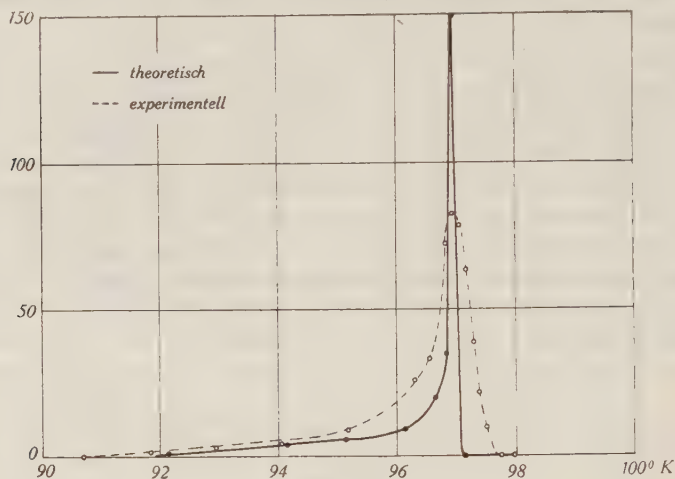


Fig. 10.

• • ΔC von KH_2AsO_4 .

dass zwar bei den Umwandlungstemperaturen eine grosse Anomalie der spezifischen Wärme auftritt, dass aber bis zur Temperatur der flüssigen Luft keine weitere Anomalie vorhanden ist, die auf die Existenz eines Curiepunkts hinweisen würde. Es ist somit anzunehmen, dass die Umwandlung das Auftreten einer spontanen Polarisation vereitelt.

5. *Zusammenstellung und Vergleich mit der Theorie.* In Tab. 1 sind unsere bisherigen Resultate mit den zur Auswertung verwendeten Daten zusammengestellt.

Tabelle 1.

	KH_2AsO_4	KH_2PO_4	KD_2PO_4
Dichte	2,86	2,338	(2,338)
Molekulargewicht	180,05	136,14	138,14
Curietemperatur Θ_2 ; °K	97	123	213,1
Max. spont. Polarisation; Clb/cm ² . .	$5 \cdot 10^{-6}$	4,95	4,83
$Q_0 = \int \Delta C \cdot dT$; cal/Mol	84,1	57,3	100,3
Lorentzfaktor f	0,50	0,37	0,68

Die spontane Polarisation von KH_2AsO_4 ist dabei der Arbeit von Busch¹⁾ entnommen, während die Dichte von KD_2PO_4 derjenigen von KH_2PO_4 gleichgesetzt wurde.

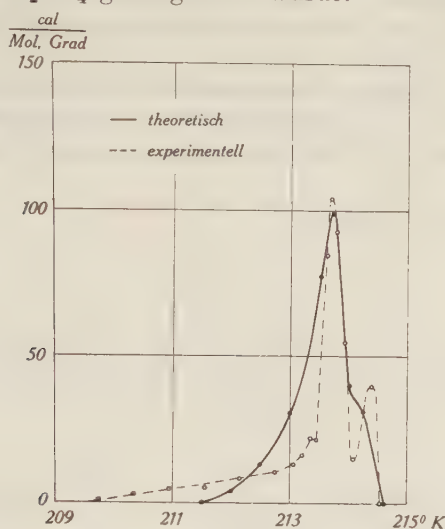


Fig. 11.
 ΔC von KD_2PO_4 .

Da der Verlauf der spontanen Polarisation mit der Temperatur für KH_2AsO_4 und KH_2PO_4 von Busch¹⁾ und derjenige von KD_2PO_4 von uns (Abschnitt V) gemessen wurde, kann bei bekanntem Lorentzfaktor der Verlauf der anomalen spezifischen Wärme nach Gleichung (1) berechnet werden. Fig. 10 und 11 stellen den Vergleich der gemessenen und berechneten Werte für KH_2AsO_4 und KD_2PO_4 dar. Die Übereinstimmung muss als befriedigend bezeichnet werden, wenn man bedenkt, dass kleinste Ungenauigkeiten in der Funktion $P_s(T)$ (siehe Fig. 20) schon einen grossen Einfluss auf $\frac{dP_s^2}{dT}$ und damit auf die berechnete spezifische Wärme haben. Für KH_2PO_4 ist denn auch die Übereinstimmung noch sehr mangelhaft, was wir jedoch nicht auf ein Versagen der Theorie, sondern auf zu ungenaue Temperaturmessung bei der Bestimmung der spontanen Polarisation zurückführen.

V. Dielektrische Messungen an KD_2PO_4 .

1. *Dielektrizitätskonstante (DK).* Die Verschiebung der oberen Curietemperatur von KD_2PO_4 gegenüber derjenigen von KH_2PO_4 wurde zuerst aus dem Verlauf der DK mit der Temperatur bestimmt. Dazu diente ein Thermostat und eine Kapazitätsmess-

brücke wie sie von BUSCH¹⁾ ausführlich beschrieben worden ist. Die verwendete Spannung der Frequenz 1000 Hertz lieferte ein moderner Tonsummer, dessen Ausgangsleistung 1 Watt beträgt, wodurch wir auf einen Verstärker am Eingang der Brücke verzichten konnten.

Die DK bei kleiner Feldstärke (40 Volt/cm) in Richtung der c -Achse wurde an einer Kristallplatte von $0,9 \cdot 4,5 \cdot 6,2$ mm Kantenlänge gemessen. Die Elektroden bestanden aus einer im Vakuum

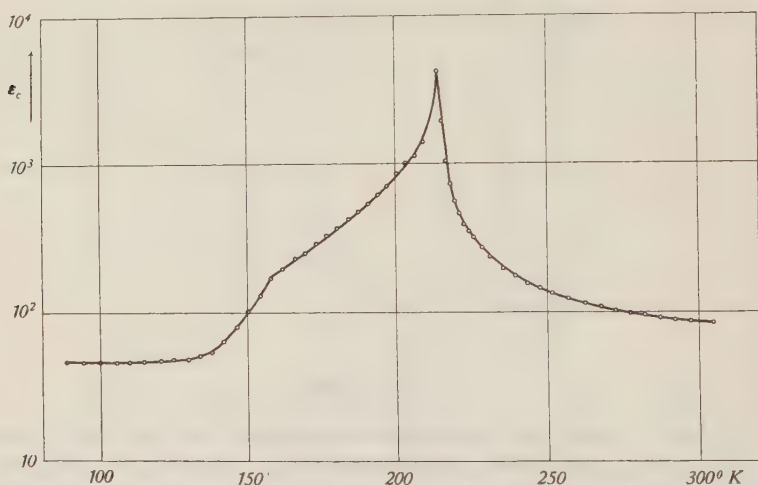


Fig. 12.

Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante ϵ_c .

aufgedampften Goldschicht, da die aufgeklebten Elektroden unreproduzierbare Resultate ergaben. Das Resultat ist in Fig. 12 mit logarithmischer Ordinate aufgetragen. Der Verlauf ist derselbe wie bei KH_2PO_4 , nur ist der obere Curiepunkt um 90° und der untere Curiepunkt um 63° nach höheren Temperaturen verschoben, sofern man den Knick bei 158° K als unteren Curiepunkt bezeichnet.

Fig. 13 zeigt die DK in Richtung der a -Achse. Der Abfall beim oberen Curiepunkt ist analog zu demjenigen von KH_2PO_4 . Es war jedoch interessant, den Verlauf der DK für diese Achse auch am unteren Curiepunkt, wo er bisher unbekannt war, zu messen. Da man den Abfall der DK beim oberen Curiepunkt am einfachsten durch ein dort stattfindendes Einschnappen aller Dipole in die Richtung der c -Achse interpretiert, deutet die Konstanz am unteren Curiepunkt erneut darauf hin, dass dort die spontane Polarisation in Richtung der c -Achse ausgerichtet bleibt.

2. *Hysteresisaufnahmen.* Da im seignette-elektrischen Temperaturgebiet der Zusammenhang zwischen Feldstärke und Polarisation nur für kleine Feldstärken linear ist, kann die DK nur bei kleinen Feldstärken mit einer Brücke bestimmt werden. Die dielektrischen Eigenschaften bei höheren Feldstärken zeigen Hysteresis-Erscheinungen. Ihre Untersuchung geschah mit Hilfe einer Braun'schen Röhre.

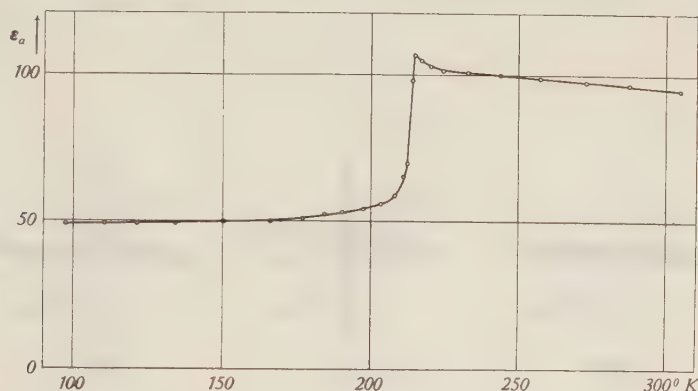


Fig. 13.

Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante ϵ_a .

Die Schaltung wurde aus einer von SAWYER und TOWER²¹⁾ angegebenen Anordnung entwickelt. Die Spannung für die y -Achse war jedoch zu klein, um direkt eine genügend grosse Ablenkung zu bewirken. Wir verwendeten deshalb einen Philips Kathodenstrahloszillographen, der mit einem 2stufigen Verstärker mit linearem Frequenzbereich von 10 — 10^6 Hertz ausgestattet ist.

Die mit 50 Hertz bei verschiedenen Temperaturen erhaltenen Hysteresiskurven sind in Tafel I und II wiedergegeben. Am auffallendsten ist das aussergewöhnliche Verhalten bei tiefen Temperaturen. KD_2PO_4 verhält sich zwar ähnlich wie KH_2PO_4 *, jedoch ganz anders als Seignettesalz am unteren Curiepunkt. Während nämlich bei Seignettesalz im ganzen seignette-elektrischen Gebiet die Hysteresiskurven die typischen Merkmale: Sättigung, Remanenz und Koerzitivfeld behalten, verlieren diese Begriffe bei KD_2PO_4 bei tiefen Temperaturen ihren ursprünglichen Sinn. Zur Veranschaulichung dieser Tatsache haben wir in Fig. 14 einige Hysteresisaufnahmen an Seignettesalz mit verschiedenen Feldstärken aufgenommen. Es ist dabei deutlich zu sehen, wie

*) Die Messungen an KH_2PO_4 wurden von E. Ganz ausgeführt und uns freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

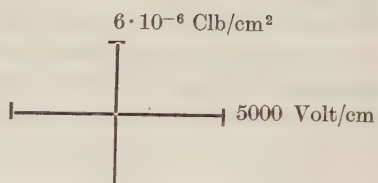
Tafel I.

 KD_2PO_4

Hysteresiskurven bei verschiedenen Temperaturen.

 c -Achse = 0,6 mm; Fläche = 0,123 cm²

50 Hertz



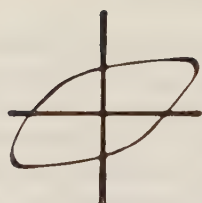
105°



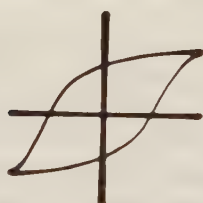
120,5°



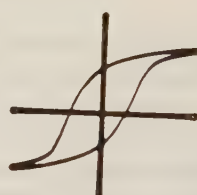
129,8°



132,9°



137°



150,4°



162°



180,3°

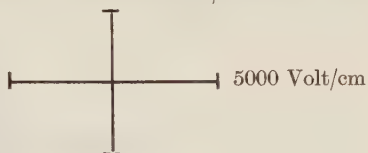


193,6°

Tafel II.

 KD_2PO_4 Hysteresiskurven bei verschiedenen
Temperaturen. c -Achse = 0,6 mm; Fläche = 0,123 cm²

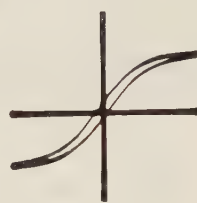
50 Hertz

 $6 \cdot 10^{-6}$ Clb/cm²

202,5°



206°



211,5°



212,8°



213,4°



214°



214,3°



214,6°



215° K

die Hysteresiskurve eine ellipsenähnliche Form annimmt, sobald die angelegte Feldstärke kleiner wird als das Koerzitivfeld. Dieselbe Erscheinung haben wir auch bei KD_2PO_4 , wo bei abnehmender Temperatur die Koerzitivfeldstärke dermassen ansteigt,

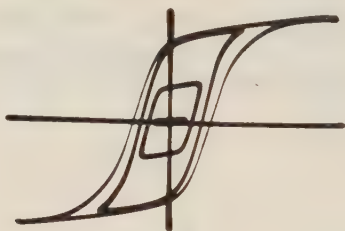


Fig. 14.

Hysteresiskurven von Seignettesalz mit verschiedenen Feldstärken.

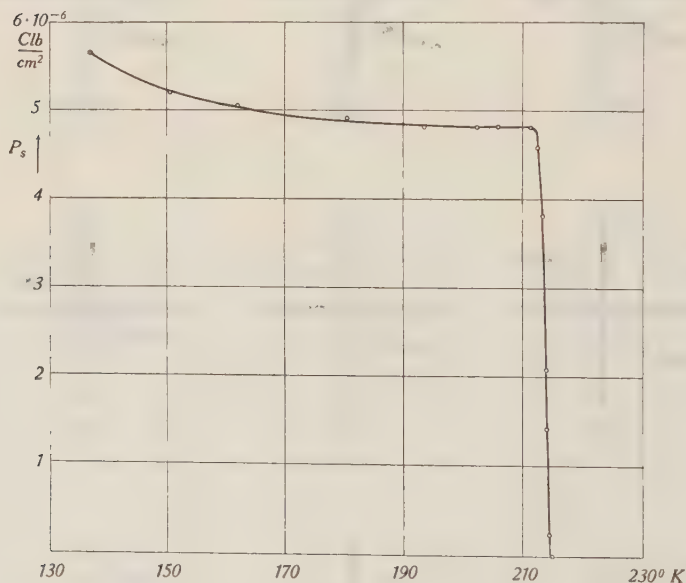


Fig. 15.

Temperaturabhängigkeit der spontanen Polarisation.

dass sie gleich gross wird wie das angelegte Feld. Dadurch werden Sättigungspolarisation, Remanenz und Verlust abhängig von der Feldstärke und verlieren damit ihre ursprüngliche Bedeutung. Wir müssen deshalb auf eine Auswertung der unter 130° K erhaltenen Kurven verzichten. Eine grössere Feldstärke konnten wir leider nicht an den Kristall legen, da er sonst zersprang. Schon bei

kleinen Feldstärken war nämlich bei der Abkühlung äusserste Vorsicht geboten, da die meisten Kristalle dabei in einzelne Stücke zersplitterten mit deutlichen Spaltflächen parallel der c -Achse. Dies ist umso auffallender, als der Kristall sich normalerweise nicht spalten lässt. An KH_2PO_4 wurde dieselbe Erscheinung von BUSCH¹⁾ beobachtet.

3. *Die spontane Polarisation P_s .* Diese ist definiert als die Polarisation beim Feld $E = 0$. Man erhält sie also aus den Hysteresiskurven, indem der Sättigungsast verlängert und mit der Ordinate zum Schnitt gebracht wird. Um Unsymmetrien, die durch mechanische Spannungen verursacht sein können²²⁾, zu eliminieren, wurde in Fig. 15 der Mittelwert zwischen der negativen und positiven Polarisation eingetragen. Leider ist es aus dem oben angeführten Grunde nicht möglich, den Verlauf von P_s bei tiefen Temperaturen zu bestimmen. Soweit jedoch P_s gemessen werden kann,

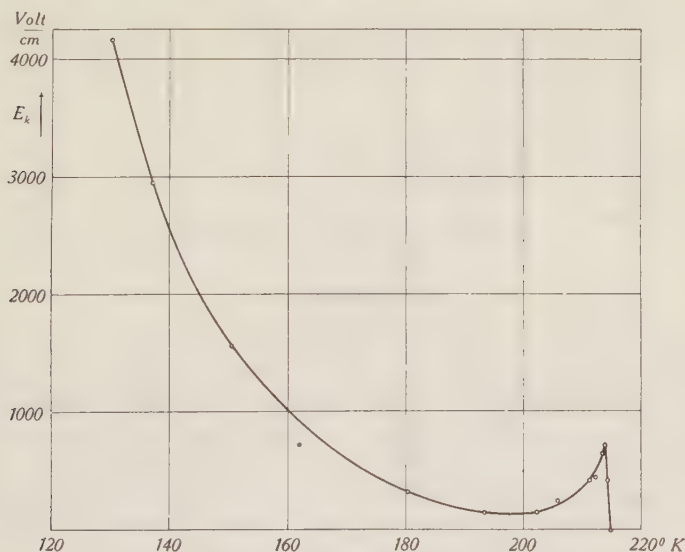


Fig. 16.
Temperaturabhängigkeit der Koerzitivfeldstärke.

deutet nichts darauf, dass sie wieder abfällt; sie wächst im Gegenteil sogar noch über den bei 200°K erreichten Sättigungswert hinaus.

Dieser Sättigungswert beträgt $4,82 \cdot 10^{-6} \text{ Clb/cm}^2$. Zum Vergleich haben wir auch die spontane Polarisation von KH_2PO_4 im Sättigungsgebiet bestimmt. Wir fanden $4,96 \cdot 10^{-6} \text{ Clb/cm}^2$, also

für beide Salze ungefähr denselben Wert. Busch¹⁾ gibt für KH_2PO_4 einen etwas kleineren Wert an, nämlich $4,3 \cdot 10^{-6}$ Clb/cm².

4. *Die Koerzitivfeldstärke.* Das gewaltige Anwachsen des Koerzitivfeldes E_K bei tiefen Temperaturen (Fig. 16) bedeutet anschaulich, dass man ein immer grösseres Feld braucht, um die Polarisation aus der einen Vorzugsrichtung in die entgegengesetzte Richtung umzuklappen. Da bei 133° K das Koerzitivfeld schon fast so gross wird wie das maximal anlegbare äussere Feld, ist der Schluss, dass bei noch tieferen Temperaturen das Feld überhaupt nicht mehr genügt zum Umklappen, sehr naheliegend. Die Bedeutung des Maximums am oberen Curiepunkt soll in der Diskussion erwähnt werden.

5. *Die Remanenz.* Diese zeigt ein sehr ähnliches Verhalten (Fig. 17) wie das Koerzitivfeld.

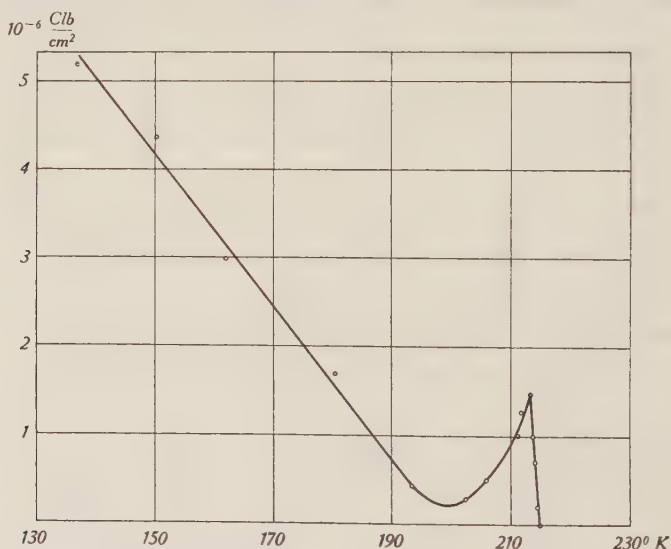


Fig. 17.

Temperaturabhängigkeit der Remanenz.

6. *Die Verluste.* Die von der Hysteresiskurve umschlossene Fläche ist bekanntlich ein Mass für die Energie, die der Kristall aufnimmt. Durch Planimetrierung der vergrösserten Kurven der Tafel I und II fanden wir die in Fig. 18 eingetragenen Werte für die Energieaufnahme pro cm³ Kristall und pro Periode des Wechselfeldes. Der Maximalwert beträgt $7,1 \cdot 10^{-2}$ Joule/cm³, Periode, was bei den verwendeten 50 Perioden einer Leistungsaufnahme von 3,55 Watt pro cm³ Kristall entspricht. Dies ist ausserordent-

lich viel für einen Kristall, erwärmt er sich doch dadurch (ohne Wärmeleitung und Strahlung) um $0,64^\circ/\text{sec}$. Es ist deshalb verständlich, dass bei diesen Versuchen die Mehrzahl der Kristalle zersplittert.

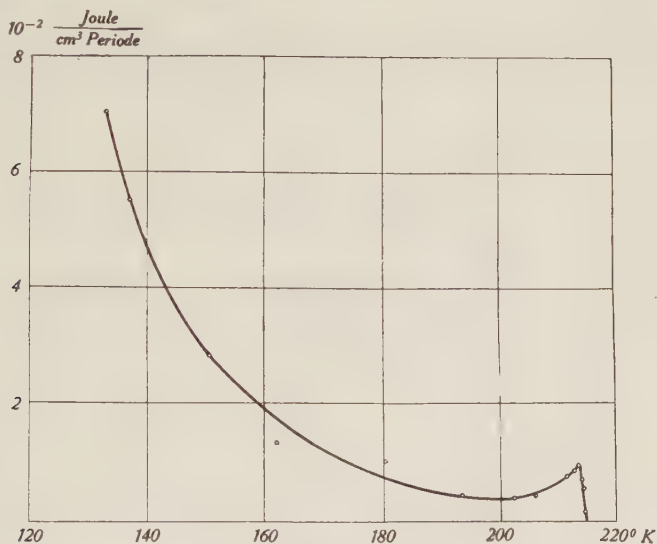


Fig. 18.
Temperaturabhängigkeit der Verluste.

VI. Diskussion.

1. *Vergleich von KD_2PO_4 mit Seignettesalz.* Durch die von uns über das ganze seignette-elektrische Gebiet von KD_2PO_4 ausgeführten dielektrischen Messungen sind wir nun in der Lage, einen Vergleich zwischen den Salzen der Gruppe I (Seignettesalz-Typus) und denjenigen der Gruppe II (Kaliummetaphosphat-Typus) anzustellen. Abgesehen davon, dass die maximale Polarisierung von KD_2PO_4 rund 20mal grösser ist als diejenige von Seignettesalz, ist das Verhalten beider Salze am oberen Curiepunkt weitgehend analog. Während aber bei Seignettesalz aus den Hysteresisaufnahmen von Hablützel¹⁸⁾ eindeutig hervorgeht, dass die spontane Polarisierung am unteren Curiepunkt verschwindet, ist dies nach unseren Aufnahmen bei KD_2PO_4 keineswegs der Fall. Aus der Tatsache, dass die DK schon wieder auf normale Werte gesunken ist bei Temperaturen, wo die spontane Polarisierung immer noch ansteigt, schliessen wir, dass die spontane Polarisierung bei tieferen Temperaturen immer noch vorhanden ist, jedoch ihre Bewegungsmöglichkeit verloren hat.

Es wäre somit richtiger von einer Einfriertemperatur als von einer unteren Curietemperatur von KD_2PO_4 zu sprechen, wofür übrigens auch das Verhalten der spezifischen Wärme und die Konstanz der DK in der a-Achse sprechen.

Man könnte daraus den Schluss ziehen, dass das Verhalten von Seignettesalz, welches zwei Curietemperaturen hat, gar nicht durch denselben Mechanismus bedingt ist wie dasjenige von

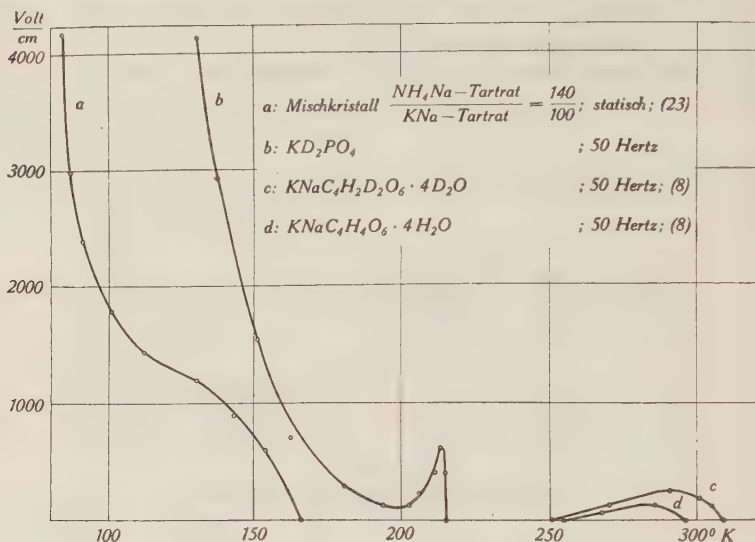


Fig. 19.

Temperaturabhängigkeit von Koerzitivfeldstärken.

KD_2PO_4 , welches nur eine Curietemperatur besitzt. Jedoch zeigen Messungen von KURTSCHATOW und EREMEJEV^{23) 24)} an Mischkristallen von Seignettesalz mit NH_4Na -Tartrat, dass auch dieses Salz bei gewissen Mischungsverhältnissen keinen unteren Curiepunkt mehr hat. Bei tiefen Temperaturen tritt nur ein ausserordentliches Anwachsen des Koerzitivfeldes auf. Da dieser Mischkristall jedoch seinen oberen Curiepunkt viel tiefer hat (166° K) als gewöhnliches Seignettesalz (297° K), ist das Auftreten eines unteren Curiepunktes wahrscheinlich nur davon abhängig, ob das seignette-elektrische Gebiet bei hohen oder tiefen Temperaturen liegt. In Fig. 19 sind die Koerzitivfelder der bisher in dieser Richtung untersuchten Substanzen zusammengestellt. Es fällt dabei sofort auf, dass die Salze mit zwei Curietemperaturen ihr seignette-elektrisches Gebiet bei höheren Temperaturen haben als die Substanzen mit nur einer Curietemperatur, und dass ihre Koerzitiv-

felder grössenordnungsmässig kleiner sind. Überdies ist das Minimum des Koerzitivfeldes unterhalb des oberen Curiepunktes von KD_2PO_4 auffallend. Man kann dies vielleicht erklären durch die Annahme, dass das seignette-elektrische Gebiet von KD_2PO_4 gerade im kritischen Temperaturgebiet zwischen den Salzen mit nur einem und denjenigen mit zwei Curiepunkten liegt. Es wäre somit zu erwarten, dass sich dieses Minimum in eine Curietemperatur verwandelt, wenn es gelingen würde, das seignette-elektrische Gebiet dieser Substanz nach höheren Temperaturen zu verschieben.

2. *Vergleich der Isotopeneffekte an KH_2PO_4 und Seignettesalz.* Die dielektrischen Eigenschaften von Seignettesalz, in welchem der austauschbare Wasserstoff durch Deuterium ersetzt wurde, sind von HABLÜTZEL⁸⁾ und HOLDEN und MASON²⁵⁾ untersucht worden. Das hauptsächlichliche Resultat ist eine Verschiebung der oberen Curietemperatur von 296°K auf 308°K und der unteren Curietemperatur von 255°K auf 251°K sowie eine Erhöhung der maximalen spontanen Polarisisation von $2,5 \cdot 10^{-7}$ auf $3,7 \cdot 10^{-7}$ Clb/cm². Trotzdem schon diese Curiepunktsverschiebung von 4° respektiv 12° verglichen mit anderen Isotopeneffekten als recht gross zu bezeichnen sind, werden sie durch die Curiepunktsverschiebung an KH_2PO_4 noch bei weitem übertroffen. Da die Curietemperatur von KD_2PO_4 bei 213°K ist gegenüber 123°K bei KH_2PO_4 , beträgt nämlich die Verschiebung bei diesem Salz 90° , d. h. 73% gegenüber nur 3,9% respektiv 1,6% bei Seignettesalz. Es ist dies ein Isotopeneffekt von bisher unbekannter Grössenordnung.

Andererseits fanden wir an KD_2PO_4 ungefähr dieselbe spontane Polarisisation wie bei KH_2PO_4 , während bei Seignettesalz diese um fast 50% stieg. Diese Tatsache kann jedoch leicht dadurch erklärt werden, dass Seignettesalz in seinem relativ kleinen seignette-elektrischen Temperaturgebiet die maximal mögliche Polarisisation gar nie erreicht, da sich der zerstörende Einfluss der Temperaturbewegung schon bemerkbar macht, bevor alle Dipole die freie Drehbarkeit erreicht haben.

3. *Vergleich mit der Theorie.* Aus der Strukturanalyse von KH_2PO_4 ²⁶⁾ weiss man, dass der Wasserstoff in diesem Kristall in sogenannten Hydrogenbindungen, d. h. kurzen O—H—O-Brücken²⁷⁾ gebunden ist. Andererseits beweist der ausserordentlich grosse Isotopeneffekt, dass der Wasserstoff an der ganzen Seignette-Elektrizität wesentlich beteiligt ist. Als Dipol kommt deshalb mit grosser Sicherheit eine O—H—O-Kombination in Frage. Es sind somit pro Molekül 2 Dipole vorhanden, also pro cm³ $2 \cdot 10^{22}$.

Nimmt man an, dass im seignette-elektrischen Gebiet die Dipole vollständig orientiert sind, so kann aus der Beziehung $P_{s, \max} = n \cdot \mu$ das Dipolmoment μ zu $0,74 \cdot 10^{-18}$ ESE berechnet werden. Dieser Wert ist von vernünftiger Grössenordnung.

Die einzige bis jetzt gemachte Voraussetzung ist $P_s = \varphi\left(\frac{F}{T}\right)$ und diese scheint durch die relativ gute Übereinstimmung zwischen der gemessenen und der berechneten Anomalie der spezifischen Wärme berechtigt zu sein. Nimmt man nun für $\varphi\left(\frac{F}{T}\right)$ die bei den Ferromagnetika mit Erfolg verwendete Langevin-Funktion an, so kommt man zu quantitativ unbefriedigenden Resultaten.

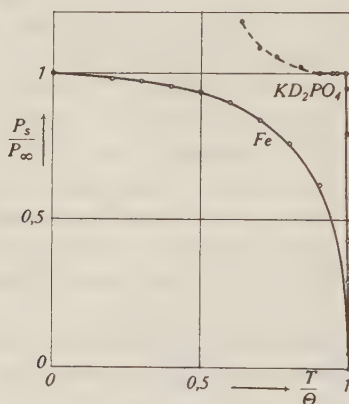


Fig. 20.

Zum Beispiel stimmt der Temperaturgang der spontanen Polarisation nicht mit dem durch die Langevin-Funktion geforderten überein. Dies wird ersichtlich aus Fig. 20, wo die spontane Polarisation von KD_2PO_4 mit derjenigen von Eisen verglichen wird. (Der Anstieg über den Wert $\frac{P_s}{P} = 1$ ist wahrscheinlich physikalisch ohne Bedeutung, da er erst bei Temperaturen auftritt, wo der Sättigungsast der Hysteresiskurven keinen geradlinigen Teil mehr aufweist, wodurch die Bestimmung der spontanen Polarisation unsicher wird.)

Da die spontane Polarisation bei der Curietemperatur fast sprunghaft abfällt, hat die kürzlich von SLATER²⁸⁾ veröffentlichte Theorie für KH_2PO_4 mehr Aussicht auf Erfolg. Danach ist der Übergang vom polarisierten in den unpolarisierten Zustand eine sogenannte Umwandlung erster Ordnung, d. h. die Polarisation müsste sprunghaft abfallen. Der sich tatsächlich über wenige Grade

erstreckende Abfall und die auch nicht plötzlich auftretende Anomalie der spezifischen Wärme müssen danach als eine Unschärfe dieser Umwandlung, hervorgerufen durch innere Spannungen, betrachtet werden. Dies ist in Übereinstimmung mit unserer Erklärung für den unregelmässigen Verlauf der spezifischen Wärme bei einigen Proben.

Die interessanteste Forderung der Theorie von SLATER²⁸⁾ ist ein Sprung der Entropie am Curiepunkt um $\Delta S = R \cdot \frac{\ln 2}{2} = 0,69$ cal/Mol, Grad, also ganz unabhängig von irgendwelchen Kristall-daten. Aus unseren Messungen ergibt sich

	KH_2AsO_4	KH_2PO_4	KD_2PO_4
ΔS in cal/Mol, Grad	0,87	0,47	0,47

Abgesehen davon, dass alle drei Werte in der Nähe des geforderten Werts von 0,69 liegen, fällt hauptsächlich auf, dass für beide Phosphorsalze derselbe Sprung gefunden wurde, obwohl ihre Curietemperaturen 90° voneinander entfernt sind. Eine noch bessere Übereinstimmung von Theorie und Experiment kann hier erst durch die Mitberücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den Dipolen und dem Untergrund erreicht werden, wobei dann gewiss auch in der Theorie Unterschiede zwischen den Arsen- und den Phosphorsalzen auftreten werden.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, bin ich für sein Interesse an dieser Arbeit zu grossem Dank verpflichtet. Ebenso danke ich dem Aluminiumfonds Neuhausen für die Mittel, die er für die Ausführung der Untersuchungen zur Verfügung stellte.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Literaturverzeichnis.

- 1) G. BUSCH, *Helv. Phys. Acta*, XI, 269, 1938.
- 2) R. BECKER und W. DÖRING, *Ferromagnetismus*. Berlin 1939.
- 3) H. MÜLLER, *Phys. Rev.* **43**, 500, 1933.
- 4) H. MÜLLER, *Phys. Rev.* **44**, 854, 1933.
- 5) H. MÜLLER, *Phys. Rev.* **47**, 947, 1935.
- 6) P. P. KOBEKO und J. G. NELIDOW, *Phys. Z. d. Sowjetunion* 1, 382, 1932.
- 7) A. A. RUSTERHOLZ, *Helv. Phys. Acta* VIII, 39, 1934.

- ⁸⁾ J. HABLÜTZEL, *Helv. Phys. Acta* **XII**, 489, 1939.
 - ⁹⁾ W. WEHRLE, Diplomarbeit E. T. H. Zürich 1937.
 - ¹⁰⁾ A. WILDBERGER, Diplomarbeit E. T. H. Zürich 1938.
 - ¹¹⁾ J. F. G. HICKS und HOOLEY, *J. Am. Chem. Soc.* **60**, 2994, 1938.
 - ¹²⁾ A. J. C. WILSON, *Phys. Rev.* **54**, 1103, 1938.
 - ¹³⁾ A. R. UBBELOHDE und J. WOODWARD, *Nature* **114**, 632, 1939.
 - ¹⁴⁾ J. M. ROBERTSON und A. R. UBBELOHDE, *Proc. Roy. Soc.* **170**, 222, 1939.
 - ¹⁵⁾ A. R. UBBELOHDE, *Proc. Roy. Soc.* **173**, 417, 1939.
 - ¹⁶⁾ W. BANTLE und P. SCHERRER, *Helv. Phys. Acta* **XIII**, 214, 1940.
 - ¹⁷⁾ D. BANCROFT, *Phys. Rev.* **53**, 587, 1938.
 - ¹⁸⁾ W. BANTLE und P. SCHERRER, *Nature* **143**, 980, 1939.
 - ¹⁹⁾ C. C. STEPHENSON und J. G. HOOLEY, *Phys. Rev.* **65**, 121, 1939.
 - ²⁰⁾ J. MENDELSSOHN und K. MENDELSSOHN, *Nature* **144**, 595, 1939.
 - ²¹⁾ C. B. SAWYER und C. H. TOWER, *Phys. Rev.* **35**, 269, 1930.
 - ²²⁾ R. DAVID, *Helv. Phys. Acta* **VIII**, 431, 1935.
 - ²³⁾ B. KUTSCHATOW und M. EREMEJEW, *Phys. Z. d. Sowjetunion* **1**, 141, 1932.
 - ²⁴⁾ M. EREMEJEW und B. KURTSCHATOW, *Phys. Z. d. Sowjetunion* **3**, 304, 1933.
 - ²⁵⁾ A. N. HOLDEN und W. P. MASON, *Phys. Rev.* **57**, 54, 1940.
 - ²⁶⁾ J. WEST, *Zeitschr. Krist.* **74**, 306, 1930.
 - ²⁷⁾ J. D. BERNAL und H. D. MEGAM, *Proc. Roy. Soc.* **151**, 384, 1930.
 - ²⁸⁾ J. C. SLATER, *Journ. Chem. Physics* **9**, 16, 1941.
-

Der Aufbau der Sonnenatmosphäre

von M. Waldmeier, Zürich.

(13. III. 1942.)

1. Einleitung.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat der Verfasser¹⁾ einige Probleme des Aufbaus der Atmosphäre eines Sonnenflecks und der ungestörten Photosphäre untersucht. Prinzipiell kann man das ganze Verhalten einer Sternatmosphäre berechnen, wenn die effektive Temperatur T_e dieser Atmosphäre, die Schwerebeschleunigung g an der Sternoberfläche und die relative Häufigkeit der chemischen Elemente bekannt sind. Im Falle der Sonne vereinfacht sich dieses Problem stark, indem T_e und g feste und bekannte Werte haben, so dass als einziger Parameter die relative Häufigkeit der chemischen Elemente übrig bleibt, der so variiert wird, dass die aus der Theorie abgeleiteten und der beobachtungsmässigen Prüfung zugänglichen Ergebnisse, deren es eine grosse Zahl gibt, mit der Beobachtung am besten übereinstimmen. Die erwähnte Arbeit über den Aufbau der Sonnenflecken basiert auf der hauptsächlich auf A. UNSÖLD²⁾ zurückgehenden Vorstellung, die Sonnenatmosphäre bestehe gewichtsmässig zu $\frac{1}{3}$ aus Wasserstoff, während die restlichen $\frac{2}{3}$ eine ähnliche chemische Zusammensetzung aufweisen sollen wie die Erdkruste. Diese Vorstellung führte aber in quantitativer Hinsicht zu so starken Unstimmigkeiten, dass sie nicht mehr länger haltbar ist. Bei diesem Mischungsverhältnis ergibt sich nämlich aus der Theorie, dass die kontinuierliche Absorption in der Sonnenatmosphäre fast ganz durch die Absorption der Metallatome zustande kommt und dass der Wasserstoff, trotz seiner überragenden Häufigkeit nur einen unbedeutenden Beitrag zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten liefert. Dieser Umstand führt nun aber sofort zu grossen Schwierigkeiten, wenn wir versuchen, auf Grund jener Vorstellung die Intensität der Fraunhoferschen Linien im Sonnenspektrum zu berechnen: die beobachteten Linienintensitäten sind viel kleiner als die berechneten. Für eine bestimmte Linie kann dieser Widerspruch immer besei-

¹⁾ M. WALDMEIER, Zur Theorie der Sonnenflecken. Astron. Mitt. Zürich, Nr. 140, 532, 1941.

²⁾ A. UNSÖLD, ZS. f. Astrophys. 8, 225, 1934.

tigt werden, indem man für das betreffende Element eine kleinere relative Häufigkeit annimmt, wodurch natürlich die relative Häufigkeit anderer Elemente ansteigt; dieser Ausweg versagt aber, wenn es sich darum handelt, den Widerspruch für alle Linien gleichzeitig zu beseitigen. Zu einer analogen Schwierigkeit führt jene Vorstellung auch bei der quantitativen Berechnung der metallischen Absorptionskanten: nach der Theorie sollten diese Kanten ausgeprägt in Erscheinung treten, während sie im Sonnenspektrum überhaupt nicht nachgewiesen werden konnten¹⁾. Eine Verminderung der Atomzahlen der Metalle würde wohl die bei der Intensität der Fraunhoferschen Linien und der Absorptionskanten auftretenden Schwierigkeiten beheben, gleichzeitig aber auch den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten, der ja nach jener Vorstellung im wesentlichen von der Absorption der Metalle herrührt, vermindern, wodurch neue Schwierigkeiten anderer Art entstehen würden.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma eröffnete die Entdeckung von R. WILDT²⁾, wonach in der Sonnenatmosphäre die negativen Wasserstoffionen, H^- , einen bedeutenden Beitrag zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten liefern. Das an das neutrale Wasserstoffatom angelagerte Elektron hat eine ausserordentlich hohe Übergangswahrscheinlichkeit vom Grundzustand in das Kontinuum. Das bewirkt, dass der von den H^- -Ionen stammende Anteil des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten pro Gramm Materie trotz der grossen Seltenheit der H^- -Ionen im Vergleich zu den neutralen H -Atomen, sehr beträchtlich wird. Bei grosser Häufigkeit des Wasserstoffs bildet er überhaupt den ausschlaggebenden Anteil. Man sieht also, dass man die Diskrepanzen zwischen Theorie und Beobachtung sowohl bei der kontinuierlichen wie auch bei der Linienabsorption gleichzeitig beheben kann, wenn man unsere Vorstellung von der chemischen Zusammensetzung der Sonnenatmosphäre in folgender Hinsicht abändert: Die Sonnenatmosphäre soll praktisch aus reinem Wasserstoff bestehen, und die Metallatome sollen nur die Rolle von geringen Beimischungen haben. Mit dieser neuen Annahme liefert die Theorie viel kleinere Linienintensitäten als mit der alten und kommt in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Nach der neuen Vorstellung kommen nun aber die Metallatome wegen ihrer zahlenmässigen Unterlegenheit für die kontinuierliche Absorption

¹⁾ M. MINNAERT und J. K. VAN DEN BRIEL, *ZS. f. Astrophys.* **15**, 173, 1938.
 — A. UNSÖLD, *ZS. f. Astrophys.* **17**, 1, 1939.

²⁾ R. WILDT, *Ap. J.* **89**, 295; **90**, 611, 1939.

kaum mehr in Frage. Diese Funktion wird nun nach der neuen Vorstellung von den dem hohen H-Gehalt entsprechend zahlreichen H-Ionen übernommen.

Wir bezeichnen mit A das Verhältnis der Zahl der H-Atome (neutral oder ionisiert) zur Zahl der Metallatome (neutral oder ionisiert). In quantitativer Weise wurde die neue Vorstellung von B. STRÖMGREN¹⁾ sowie P.TEN BRUGGENCATE und J. HOUTGAST²⁾ zur Deutung der Fraunhoferschen Linien herangezogen. Beide Arbeiten führen zu demselben Ergebnis, dass das Häufigkeitsverhältnis von Wasserstoff zu Metallen, A , in der Sonnenatmosphäre von der Größenordnung 6000 : 1 bis 8000 : 1 ist, also $\log A \sim 3,8$.

In der vorliegenden Untersuchung wird auf der Grundlage dieser neuen Vorstellung über die chemische Konstitution der Sonne der Aufbau sowohl der ungestörten Photosphäre wie auch der Atmosphäre eines Sonnenflecks berechnet; ferner werden die eingangs erwähnte Theorie der Sonnenflecken des Verfassers und einige weitere mit dem Bau der Sonnenatmosphäre zusammenhängende Probleme auf die neuen Grundlagen umgearbeitet.

2. Die Schichtung einer Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht.

Wir gehen aus von der Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichtes:

$$\frac{dp}{dh} = -g \cdot \varrho, \quad (1)$$

wobei p den Gasdruck, g die Schwerebeschleunigung an der Sonnenoberfläche ($2,74 \cdot 10^4 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$), ϱ die Dichte und h die von einem willkürlich festgesetzten Nullniveau nach aussen (oben) positiv gerechnete geometrische Höhe bedeutet. (Der Strahlungsdruck ist in der Sonnenatmosphäre neben dem Gasdruck zu vernachlässigen.) Nun führen wir an Stelle der geometrischen Tiefe h die optische Tiefe τ ein durch folgende Definition:

$$d\tau = -\bar{\kappa} \cdot \varrho \cdot dh, \quad (2)$$

wobei $\bar{\kappa}$ den Absorptionskoeffizienten pro g/cm^2 bedeutet (es handelt sich um einen Mittelwert über alle Frequenzen). Damit nimmt (1) die Form an:

$$\frac{dp}{d\tau} = g/\bar{\kappa}. \quad (3)$$

¹⁾ B. STRÖMGREN, Festschrift für E. Strömgren, S. 218. Kopenhagen 1940.

²⁾ P.TEN BRUGGENCATE und J. HOUTGAST, ZS. f. Astrophys. **20**, 149, 1940.

In der alten Theorie wurde $\bar{\kappa}$ durch die verschiedenen Beiträge aller Metalle gebildet und konnte wohl tabellarisch oder graphisch in Abhängigkeit vom Druck und von der Temperatur dargestellt, aber nicht analytisch ausgedrückt werden. Deshalb konnte p nur in sukzessiver Näherung durch numerische Integration bestimmt werden. In der neuen Theorie ist $\bar{\kappa}$ der über alle Frequenzen gemittelte Absorptionskoeffizient des H-Ions und dieser kann analytisch ausgedrückt werden, wodurch es auch ermöglicht wird, p in geschlossener Form darzustellen. Für eine Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht besteht zwischen der Temperatur T und der optischen Tiefe τ die Beziehung¹⁾:

$$T^4 = \frac{T_e^4}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right), \quad (4)$$

wobei T_e die aus der Gesamtstrahlung abgeleitete effektive Temperatur der Photosphäre bedeutet.

Nun machen wir die für die Sonnenatmosphäre gut erfüllte Annahme, die Zahl der freien Elektronen sei gleich der Zahl der Metallatome; dies bedeutet, dass alle Metalle im Mittel einfach ionisiert sind, während der Wasserstoff praktisch nicht ionisiert ist. In diesem Falle ist der Gasdruck p gleich dem Partialdruck der H-Atome und der Elektronendruck p_e gleich dem Partialdruck der Metalle; somit ist

$$\frac{p}{p_e} = A. \quad (5)$$

Zur Berechnung von $\bar{\kappa}$ brauchen wir die Kenntnis des Absorptionskoeffizienten für ein einzelnes H-Ion und ferner die relative Häufigkeit der H-Ionen im Vergleich zu den H-Atomen. Diese, d. h. der „negative Ionisationsgrad“ ergibt sich aus der Saha-Formel:

$$\log \frac{n_{\text{H}}}{n_{\text{H}^-}} p_e = -\chi_{\text{H}^-} \frac{5040}{T} + \frac{5}{2} T - 0,48 + \log \frac{2 \cdot u_{\text{H}}}{u_{\text{H}^-}} \quad (6)$$

Dabei bedeuten n_{H} und n_{H^-} die Anzahl der H-Atome bzw. der H-Ionen pro Volumeinheit und u_{H} und u_{H^-} die statistischen Gewichte der Grundzustände von H und H⁻; χ_{H^-} ist das Ionisa-

¹⁾ Vgl. M. WALDMEIER, Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung, S. 64. Leipzig 1941.

tionspotential des H^- -Ions. Nun führen wir die Abkürzungen ein:

$$\Theta = \frac{5040}{T} \quad (7)$$

und

$$\Phi(T) = \frac{n_{H^-}}{p_e \cdot n_H} \quad (8)$$

$\Phi(T)$ ist eine reine Temperaturfunktion, da auf der rechten Seite von (6) nur die Variable T vorkommt. Setzen wir die numerischen Werte

$$u_H = 2 \quad u_{H^-} = 1 \quad \chi_{H^-} = 0,70 \text{ Volt} \quad (9)$$

in (6) ein, so erhalten wir:

$$\log \Phi(T) = 0,70 \cdot \Theta - \frac{5}{2} \log T - 0,12 \quad (10)$$

In der optischen Tiefe $\tau = 1$ ist beispielsweise $\log \Phi(T) = -8,97$ und wie wir noch sehen werden $\log p = 5,06$ und $\log p_e = 1,55$. Daraus ergibt sich:

$$\frac{n_{H^-}}{n_H} = 10^{-7,42} = 3,8 \cdot 10^{-8}.$$

Die Konzentration der H^- -Ionen ist demnach klein, verglichen mit derjenigen der H -Atome. Die Grösse

$$\varepsilon = \frac{n_{H^-}}{n_H}$$

ist also sehr klein, und auch bei den grössten Elektronendrucken, die in der Sonnenatmosphäre vorkommen, bleibt ε stets kleiner als 10^{-6} . Aus (5) folgt für die Zahl n_e der freien Elektronen pro Volumeinheit

$$n_e = \frac{n_H}{A} = \frac{n_{H^-}}{\varepsilon \cdot A}. \quad (11)$$

Wegen $\varepsilon \leq 10^{-6}$ und $A < 10^4$, ist $\varepsilon \cdot A \leq 10^{-2}$ und $n_e \geq 10^2 \cdot n_{H^-}$. Man sieht also, dass die Zahl der freien Elektronen viel grösser ist als die der H -Atome, welche ein Elektron angelagert haben. Deshalb braucht man bei der Berechnung der Ionisationsgrade der Metalle nur die freien Elektronen zu berücksichtigen und kann die durch die H^- -Ionen gebundenen Elektronen ganz vernachlässigen.

Die Zahl der H-Atome pro Gramm Sonnenmaterie ist $1/m_H$, wobei m_H die Masse des H-Atoms bedeutet. Daraus folgt nach (8):

$$n_H = \frac{1}{m_H} \cdot p_e \cdot \Phi(T). \quad (12)$$

Bezeichnen wir den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten des H⁻-Ions mit κ_H , so ergibt sich für die Opazität pro Gramm Sonnenmaterie:

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa_H}{m_H} p_e \Phi(T) = C \cdot p_e \Phi(T) = \frac{C \cdot p}{A} \Phi(T). \quad (13)$$

Der Absorptionskoeffizient des H⁻-Ions ist von H. S. W. MASSEY und D. R. BATES¹⁾ berechnet worden; darnach kann man den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten als nahezu von λ unabhängigen, konstanten Wert ansetzen. Der numerische Wert von C ergibt sich zu $1,5 \cdot 10^7$.

Nunmehr setzen wir in (3) für $\bar{\kappa}$ den Wert aus (13) ein und erhalten:

$$p \cdot dp = \frac{g \cdot A}{C} \cdot \frac{d\tau}{\Phi(T)}. \quad (14)$$

Da aber nach (4) T eine eindeutige Funktion von τ ist, können wir anstatt $\Phi(T)$ auch $\Phi(\tau)$ schreiben. Berücksichtigen wir ferner noch, dass für $\tau = 0$ $p = 0$ sein muss, so liefert die Integration von (14):

$$p(\tau) = \left(\frac{g \cdot A}{C} \right)^{1/2} \cdot \left(2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Aus (5) ergibt sich weiter für den Elektronendruck:

$$p_e(\tau) = \left(\frac{g}{A \cdot C} \right)^{1/2} \cdot \left(2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Und aus (13) schliesslich der Opazitätskoeffizient:

$$\bar{\kappa}(\tau) = \left(\frac{g \cdot C}{A} \right)^{1/2} \cdot \Phi(\tau) \cdot \left(2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Bei der Berechnung des in (15) bis (17) auftretenden Integrals bestimmt man zuerst aus (4) die zu τ gehörende Temperatur und

¹⁾ H. S. W. MASSEY und D. R. BATES, Ap. J. **91**, 202, 1940.

hernach aus (10) $\Phi(\tau)$ und schliesslich durch aufsummieren der Beiträge $\frac{\Delta\tau}{\Phi(\tau)}$ den Wert des Integrals.

Bevor wir an die numerische Bestimmung der Abhängigkeit der Zustandsgrössen von der optischen Tiefe herantreten, wollen wir uns überlegen, welchen Einfluss die neue Vorstellung (A gross) gegenüber der alten (A klein) auf die Zustandsgrössen in der optischen Tiefe τ hat. Der Zunahme von A entspricht nach (15) eine Zunahme des Gasdrucks, nach (16) eine Abnahme des Elektronendrucks und nach (17) eine Abnahme des Absorptionskoeffizienten. Nach der neuen Theorie wird deshalb der Gasdruck wesentlich grösser, der Elektronendruck und der Absorptionskoeffizient wesentlich kleiner als nach der bisherigen Theorie. Die Variationen dieser drei Grössen erfolgen natürlich nicht unabhängig voneinander; eine Verkleinerung des Absorptionskoeffizienten bewirkt bei gleicher optischer Tiefe τ eine Vergrösserung der geometrischen Tiefe, also der Schichtdicke und damit des Druckes in der Tiefe τ .

Wir werden nun nebeneinander nach den Gl. (15) bis (17) den Aufbau der ungestörten Photosphäre und der Atmosphäre eines Sonnenfleckes berechnen. Diese beiden Atmosphären befinden sich im Strahlungsgleichgewicht¹⁾, besitzen gleiches A und gleiches g und bei beiden ist die Temperaturverteilung durch (4) gegeben. Beide Atmosphären unterscheiden sich lediglich durch ihre effektive Temperatur; diese beträgt für die Photosphäre:

$$T_e^\circ = 5740^\circ \quad (18)$$

und für den Sonnenfleck¹⁾:

$$T_e^* = 4620^\circ. \quad (19)$$

Für die äussere Grenze der Atmosphäre, $\tau = 0$, ergibt sich aus (4) die Grenztemperatur T_0 :

$$T_0 = \frac{T_e}{\sqrt[4]{2}} = \frac{T_e}{1,19}. \quad (20)$$

Diese beträgt für die Photosphäre

$$T_0^\circ = 4820^\circ \quad (21)$$

und für den Sonnenfleck

$$T_0^* = 3880^\circ \quad (22)$$

¹⁾ E. PETTIT und S. B. NICHOLSON, Ap. J. **71**, 153, 1930; R. S. RICHARDSON, Ap. J. **78**, 359, 1933; **90**, 230, 1939; A. J. M. WANDERS, ZS. f. Astrophys. **10**, 15, 1935.

²⁾ T. W. WORMELL, M. N. **96**, 736, 1936.

In Tabelle 1 geben wir zunächst die nach Formel (4) und (10) berechnete Funktion $\Phi(\tau)$ für $\tau = 0,01$ bis 64 sowohl für die un-

Tabelle 1.

Die Funktion $\Phi(\tau)$ in der Photosphäre und im Sonnenfleck.

τ°	τ^*	T	Θ	$\Phi(\tau) \cdot 10^{11}$
64,00		15110	0,334	4,6
32,00		12770	0,395	7,8
	64,00	12172	0,414	9,1
16,00		10782	0,467	13,5
	32,00	10275	0,490	15,5
8,00		9165	0,551	23,4
	16,00	8679	0,580	27,5
4,00		7844	0,644	38,9
	8,00	7375	0,683	49,0
2,00		6823	0,740	66,1
	4,00	6312	0,798	87,1
1,00		5930	0,833	107
0,50		5545	0,909	145
	2,00	5490	0,918	148
0,10		4995	1,011	219
	1,00	4876	1,033	240
0,01		4830	1,043	251
	0,50	4462	1,128	355
	0,10	4019	1,256	575
	0,01	3892	1,295	646

gestörte Photosphäre als auch für den Sonnenfleck. Nun berechnen wir $p(\tau)$ nach (15). Der vor dem Integral stehende Ausdruck hat für den Fleck und die Photosphäre denselben Wert:

$$\left(\frac{g \cdot A}{C} \right)^{1/2} = 3,39. \quad (23)$$

Die Berechnung des Integrals hat in der oben angegebenen Weise nach Tab. 1 zu erfolgen, wobei selbstverständlich das Integral für Fleck und Photosphäre nicht dieselbe Funktion von τ ist. Das Ergebnis der Integration ist in Tab. 2 enthalten. Vergleichen wir damit die früher abgeleiteten Werte des Gasdruckes in denselben optischen Tiefen¹⁾, so sehen wir, dass die Gasdrucke sowohl in der Photosphäre als auch im Sonnenfleck nach der neuen Theorie um mehr als einen Faktor 10 grösser sind als nach der alten.

¹⁾ M. WALDMEIER, Astron. Mitt. Zürich, Nr. 140, 539, 1941.

In der letzten Spalte der Tab. 2 sind unter $\log p$ die von B. STRÖMGREN¹⁾ bei Benutzung einer verbesserten Theorie berechneten Gasdrucke mitgeteilt. Es ist bemerkenswert, wie gut unsere approximativen Berechnungen mit der verbesserten Theorie übereinstimmen. Nur in den tieferen Schichten, für welche die Strömgrenschen Tafeln leider keine Angaben enthalten, zeigen sich Abweichungen zwischen der verbesserten und der approximativen Theorie. Dies rührt daher, dass bereits in Tiefen $\tau > 2$ die Ionisation des neutralen Wasserstoffs merkbar wird, und dadurch der Wasserstoff in den tieferen Schichten einen merkbaren Beitrag zur Konzentration der freien Elektronen liefert.

Tabelle 2.

Der Gasdruck in der Photosphäre und im Sonnenfleck als Funktion der optischen Tiefe.

τ	$\rho^{\odot} \cdot 10^{-4}$	$\rho^* \cdot 10^{-4}$	$\log \rho^{\odot}$	$\log \rho^*$	$\log p$
0,01	0,98	0,58	3,99	3,76	4,02
0,10	3,21	1,95	4,51	4,29	4,52
0,50	7,95	5,03	4,90	4,70	4,91
1,00	12,5	8,1	5,10	4,91	5,06
2,00	21,0	13,9	5,32	5,14	5,14
4,00	37,0	24,8	5,57	5,39	
8,00	67,5	45,8	5,83	5,66	
16,00	124,1	85,8	6,09	5,93	
32,00	230,0	161,8	6,36	6,21	
64,00	425,9	302,1	6,63	6,48	

Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass in jeder optischen Tiefe der Gasdruck im Fleck kleiner ist als in der Photosphäre, während nach der alten Theorie²⁾ im Fleck ein höherer Druck herrscht als in der Photosphäre. Dieser Unterschied ist nicht von so grundsätzlicher Bedeutung, wie es auf den ersten Blick scheinen mag, sondern durch den Absorptionskoeffizienten bedingt, der in der neuen Theorie eben einen ganz andern funktionalen Zusammenhang mit Druck und Temperatur besitzt als nach der alten. Für eine bestimmte optische Tiefe ist der Gasdruck nach (3) umgekehrt proportional $\bar{\kappa}$. Beim Übergang von der Photosphäre zum Fleck nimmt aber in (17) Φ stärker zu als das Integral ab, wodurch im Fleck ein kleinerer Druck resultiert als in der Photosphäre.

¹⁾ B. STRÖMGREN, Festschrift f. E. Strömgren, S. 253. Kopenhagen 1940.

²⁾ M. WALDMEIER, Astron. Mitt. Zürich, Nr. 140, 539, 1941.

Auf den Elektronendruck sind wir nicht näher eingegangen, da wir diesen in der vorliegenden Untersuchung nicht gebrauchen werden. Aus (16) geht hervor, dass der Elektronendruck dem Gasdruck proportional ist; dies gilt solange, als der Wasserstoff keine merkliche Ionisation aufweist.

3. Der geometrische Aufbau von Sonnenfleck und Photosphäre.

Nunmehr vollziehen wir den Übergang von den optischen Tiefen τ zu den geometrischen Höhen h . Die Verbindung der hydrostatischen Grundgleichung (1) mit der Gasgleichung

$$p = \frac{R \cdot \varrho \cdot T}{\mu} . \quad (24)$$

(R = Gaskonstante, μ = Molekulargewicht) liefert die bekannte Barometerformel:

$$\frac{dp}{p} = d \log p = - \frac{g \cdot \mu}{R \cdot T} \cdot dh . \quad (25)$$

Wegen der geringen vertikalen Ausdehnung der Sonnenatmosphäre (im Vergleich zum Sonnenradius) ist g als konstant zu betrachten; ferner ist $\mu = 1$, so dass sich (25) vereinfacht zu:

$$dh = - 3,50 \cdot 10^7 \frac{d \log p}{\Theta} . \quad (26)$$

Gleichung (26) wird graphisch integriert, wobei wir die Werte von $\log p$ der Tab. 2 und diejenigen von Θ der Tab. 1 entnehmen. Wir führen die Berechnung für Fleck und Photosphäre vollständig getrennt durch und lassen in beiden Fällen das Nullniveau von h mit $\tau = 1$ zusammenfallen. Die erhaltenen geometrischen Höhen h° in der Photosphäre und h^* im Sonnenfleck sind in Tab. 3 mitgeteilt. Nahezu die gesamte Strahlung entstammt den optischen Tiefen $0,1 < \tau < 8$; diesem Bereich entspricht eine Schicht, deren vertikale Ausdehnung in der Photosphäre 596 km beträgt, im Fleck 497 km. Nach der alten Theorie betrugen die entsprechenden Dicken von Photosphäre und Fleck nur 139 bzw. 86 km. Die starke Zunahme der geometrischen Schichtdicken ist fast ausschliesslich durch die Abnahme des Molekulargewichts um nahezu einen Faktor drei bedingt, während die Zunahme von p nur von untergeordneter Bedeutung ist; man erkennt nämlich, wenn man Tab. 2 mit den entsprechenden Werten der alten Theorie¹⁾ ver-

¹⁾ M. WALDMEIER, Astron. Mitt. Zürich, Nr. 140, Tab. 2, S. 541, 1941.

gleich, dass die $\Delta \log p$, auf welche es bei der Berechnung der geometrischen Höhen nach (26) allein ankommt, sowohl im Fleck als auch in der Photosphäre, nach beiden Theorien nahezu gleich herauskommen. Wenn auch die absoluten Werte des Gasdruckes nach der neuen Theorie viel höher sind als nach der alten, so ist doch die relative Druckverteilung $p(\tau)/p(\tau = 1)$ und damit $\Delta \log p$ sehr unempfindlich auf die Art der kontinuierlichen Absorption (ob Metalle oder H-Ionen).

Tabelle 3.

Der geometrische Aufbau von Fleck und Photosphäre.

τ	$\log \tau$	$h^{\circ} = H^{\circ}$	h^{*}	H^{*}
0,01	- 2,00	397,8 km	330,5 km	399,3 km
0,10	- 1,00	222,8	186,6	255,4
0,50	- 0,30	82,1	67,3	136,1
1	0,00	0,0	0,0	68,8
2	0,30	- 96,4	- 82,2	- 13,4
4	0,60	- 221,7	- 182,9	- 114,1
8	0,90	- 373,3	- 310,4	- 241,6
16	1,20	- 551,7	- 459,6	- 390,8
32	1,51	- 782,5	- 647,3	- 578,5
64	1,81	- 1053,1	- 857,7	- 788,9

Wir haben in Tab. 3 die Berechnungen bis zu grossen optischen Tiefen fortgeführt, obschon hier unsere approximative Theorie nicht mehr zuverlässig ist. Nach Tab. 2 erkennt man, dass nach der exakten Theorie die $d \log p$ mit zunehmender optischer Tiefe kleiner werden als nach der approximativen; andererseits bewirkt die mit der Tiefe zunehmende Ionisation des Wasserstoffs eine Verminderung des Molekulargewichtes. Beide Wirkungen kompensieren sich in (26) mehr oder weniger, so dass die approximative Theorie bis in die Wasserstoffionisationszone hinein brauchbar bleibt.

Nun haben wir noch die geometrischen Höhen h° und h^{*} auf dasselbe Nullniveau zu beziehen. Von diesem aus gemessen bezeichnen wir die geometrischen Höhen in Photosphäre und Sonnenfleck mit H° bzw. H^{*} . Da es ganz gleichgültig ist, ob wir h° auf h^{*} beziehen oder h^{*} auf h° oder beide auf ein unabhängiges Nullniveau, setzen wir die H -Skala so fest, dass $H^{\circ} \equiv h^{\circ}$. Diese Koordinierung führen wir wieder unter der Annahme durch, die wir schon in der eingangs erwähnten Arbeit gemacht und begründet haben, dass Druckgleichheit in der optischen Tiefe $\tau = 1,25$ herr-

schen soll: Dies lässt noch die beiden Möglichkeiten offen: a) Druckgleichheit bei $\tau^{\circ} = 1,25$, b) Druckgleichheit bei $\tau^* = 1,25$. Die erste Möglichkeit führt im Niveau der Druckgleichheit auf $\log p^* = \log p^{\circ} = 5,17$; diesem Niveau entsprechen die Höhen $h^{\circ} = -31,7$ km, $h^* = -95,0$ km, woraus sich ergibt:

$$H^* = h^* + 63,3. \quad (27)$$

Die andere Möglichkeit ergibt für das Niveau der Druckgleichheit: $h^{\circ} = 48,0$ km, $h^* = -26,3$ km, und daraus:

$$H^* = h^* + 74,3. \quad (28)$$

Für die Koordinierung benützen wir den Mittelwert aus (27) und (28):

$$H^* = h^* + 68,8. \quad (29)$$

Diese Werte sind in Tab. 3 mitaufgenommen.

4. Das Niveau der Sonnenflecken.

Im folgenden werden einige Konsequenzen aus der soeben abgeleiteten Schichtung in Fleck und Photosphäre gezogen. Zunächst geben wir in Tab. 4 als Ergänzung zu Tab. 3 eine Übersicht über die Drucke p° und p^* in gleichen Niveaus H und ihre Differenzen.

Wie in der ersten Mitteilung gezeigt worden ist, liegt der „Strahlungsschwerpunkt“ bei Beobachtung im Zentrum der Sonnenscheibe bei $\bar{\tau} = 1,25$. Dieser Tiefe entsprechen die Drucke $\log p^{\circ} = 5,17$, $\log p^* = 4,98$ und die Niveaus $H^{\circ} = -30,0$ km, $H^* = 40,7$ km. Im Zentrum der Sonnenscheibe liegen also die sichtbaren Teile des Sonnenflecks um 71 km höher als die entsprechenden der Photosphäre. Im Abstand $\sin \vartheta = 0,745$ vom Sonnenzentrum, $\bar{\tau} = 0,77$, erhält man in entsprechender Weise $H^{\circ} = 30,7$ km, $H^* = 95,0$ km, also $\Delta H = 64$ km und bei $\sin \vartheta = 0,943$, $\bar{\tau} = 0,33$, $H^{\circ} = 120,0$, $H^* = 166,7$, also $\Delta H = 47$ km. Gehen wir schliesslich so nahe an den Sonnenrand, dass $\bar{\tau} = 0,10$ wird, so wird $H^{\circ} = 223,3$, $H^* = 255,0$, also $\Delta H = 32$ km. Die Niveaudifferenz zeigt also eine Abnahme gegen den Rand. Am Sonnenrand beträgt sie nur $0,04''$ geozentrisch, ist also viel zu klein, um gemessen werden zu können, und im Zentrum der Sonnenscheibe, wo sie etwa 70 km beträgt, kann sie ohnehin nicht zur Beobachtung gelangen. Es ist deshalb klar, dass die sich hier ergebende Niveaudifferenz nichts mit dem sog. Wilson-Effekt zu tun haben kann. Bei diesem handelt es sich, wenn er eine reelle Erscheinung ist und als Niveaudifferenz gedeutet wird, um Diffe-

renzen von der Grössenordnung 1000 km, wobei der Fleck tiefer liegen soll als die Photosphäre. Während nach der alten Theorie die Flecken tiefer liegen als die Photosphäre, liegen sie nach der neuen höher als diese. Dieser Unterschied ist dadurch bedingt, dass nach der alten Theorie der Absorptionskoeffizient im Fleck kleiner, nach der neuen (Abschnitt 2) dagegen grösser ist als in der Photosphäre (in derselben optischen Tiefe).

Tabelle 4.

Die Schichtung in Sonnenfleck und Photosphäre.

H km	$\log p^\circ$	$\log p^*$	$\Delta \log p$	$p^\circ \cdot 10^{-4}$	$p^* \cdot 10^{-4}$	T°	T^*	$\varrho^\circ \cdot 10^6$	$\varrho^* \cdot 10^6$	$\Delta p \cdot 10^{-4}$	v_m
350	4,13	3,94	+0,19	1,35	0,87	4880	4000	0,03	0,03	0,48	5,7
300	4,28	4,12	+0,19	1,91	1,32	4900	4100	0,05	0,04	0,59	5,1
250	4,43	4,31	+0,12	2,69	2,04	4960	4180	0,07	0,06	0,65	4,5
200	4,57	4,48	+0,09	3,72	3,02	5090	4310	0,09	0,08	0,70	4,1
150	4,71	4,65	+0,06	5,13	4,47	5290	4450	0,12	0,12	0,66	3,3
100	4,87	4,81	+0,04	7,08	6,46	5490	4680	0,16	0,17	0,62	2,7
50	4,98	4,96	+0,02	9,55	9,12	5720	5010	0,20	0,22	0,43	2,0
0	5,10	5,10	0,00	12,59	12,59	5940	5370	0,26	0,28	0,00	0,0
-50	5,21	5,23	-0,02	16,22	16,98	6410	5800	0,30	0,35	-0,76	2,2
-100	5,33	5,35	-0,02	21,38	22,39	6870	6220	0,37	0,43	-1,01	2,2
-150	5,43	5,46	-0,03	26,92	28,84	7280	6630	0,44	0,52	-1,92	2,8
-200	5,53	5,57	-0,04	33,88	37,15	7690	7020	0,53	0,64	-3,27	3,3
-250	5,62	5,67	-0,05	41,69	46,77	8100	7430	0,62	0,75	-5,08	3,9
-300	5,71	5,77	-0,06	51,29	58,88	8540	7890	0,72	0,90	-7,59	4,3
-400	5,87	5,94	-0,07	74,13	87,10	9410	8760	0,95	1,20	-12,97	4,9
-500	6,02	6,09	-0,07	104,71	123,03	10310	9600	1,22	1,54	-18,32	5,1
-600	6,15	6,24	-0,09	141,26	173,78	11190	10470	1,52	2,00	-32,52	6,1

einwärts

auswärts

5. Der Evershedeffekt.

besteht in horizontalen Strömungen, die radial vom Fleckzentrum weg-, oder auf dieses zu gerichtet sind. In den tiefen Schichten strömt die Materie aus dem Fleck heraus, in den hohen in den Fleck hinein, während die mittleren Schichten ohne Strömung sind. Diese Strömungen lassen sich spektrographisch durch Linienverschiebungen beobachten; sie wurden schon 1909 von EVERSHED¹⁾ entdeckt, aber erst kürzlich hat der Verfasser²⁾ die Theorie dieser Strömungen gegeben. Dabei wurden noch die nach der alten Vorstellung über die chemische Konstitution der Sonnenatmosphäre

¹⁾ J. EVERSHED, M. N. 69, 454, 1909.²⁾ M. WALDMEIER, Astron. Mitt. Zürich, Nr. 140, 545, 1941.

berechneten Gasdrucke verwendet. Da nach der neuen Theorie die Gasdrucke um mehr als eine Grössenordnung höher herauskommen als nach der alten, ist eine Neuberechnung des Evershedeffectes notwendig.

Die Ursache dieser horizontalen Strömungen besteht in Druckdifferenzen zwischen Fleck und Photosphäre in gleichen Niveaus. Die Drucke und Druckdifferenzen als Funktion der geometrischen Höhe sind bereits in Tab. 4 mitgeteilt. Man erkennt daraus, dass in hohen Niveaus $p^{\circ} > p^*$, was Einströmung bewirkt, in tiefen Niveaus dagegen $p^{\circ} < p^*$, was Ausströmung zur Folge hat, während in den mittleren Schichten Druckgleichheit besteht und demnach keine Strömungen auftreten. Diese Folgerungen sind qualitativ mit den Beobachtungen in Übereinstimmung.

Wenn Δp die Druckdifferenz zwischen Fleckenzentrum und dem äusseren Penumbrarand, also der Photosphäre bedeutet, s die vom Fleckenzentrum längs eines Radius nach aussen positiv gerechnete Wegstrecke, ϱ die Materiedichte und r den Penumbra-radius, so lautet die Bewegungsgleichung

$$\varrho \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{p \cdot \mu}{R \cdot T} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{\Delta p}{r} . \quad (30)$$

Durch Integration ergibt sich:

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{\Delta p}{r \cdot \varrho} \cdot t , \quad (31)$$

wobei die Geschwindigkeit des Massenelementes (wir betrachten den Fall der Ausströmung) zur Zeit $t = 0$, zu welcher dieses im Zentrum des Flecks startet, den Betrag $v = 0$ hat; deshalb ist ferner $s = 0$ für $t = 0$, woraus weiter folgt:

$$s = \frac{v^2 \cdot \varrho \cdot r}{2 \cdot \Delta p} . \quad (32)$$

Die Geschwindigkeit nimmt, in Übereinstimmung mit der Beobachtung mit s zu und erreicht für $s = r$ am äusseren Penumbrarand den Maximalwert

$$v_m = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\varrho}} . \quad (33)$$

Die Werte von Δp , ϱ (berechnet aus der Gasgleichung) und v_m sind in Tab. 4 enthalten. Für Tiefniveaulinien ($2 < \tau < 4$) ergibt sich Ausströmung mit $v_m = 2,0$ bis $2,8$ km/sec, für Linien mittleren

Niveaus ($\tau \sim 1$) ist $v_m = 0$ und für Hochniveaulinien ($0,1 < \tau < 0,5$) ergibt sich Einströmung mit $v_m = 2,7$ bis $4,5$ km/sec. Dieses Ergebnis ist in quantitativer Übereinstimmung mit der Beobachtung¹⁾, wonach die Tiefniveaulinien Ausströmungen von 2 km/sec ergeben, die Hochniveaulinien dagegen Einströmung von 3 km/sec, während Linien mittleren Niveaus keine Strömungen anzeigen.

6. Der Helligkeitsabfall am äussersten Sonnenrand.

In der äussersten Sonnenatmosphäre ist die Temperatur praktisch konstant, nämlich gleich der Grenztemperatur $T_0 = 4820^\circ$. Deshalb nimmt in der äussersten Atmosphäre der Druck nach der Barometerformel mit der Höhe h ab:

$$p = p_0 \cdot e^{-\alpha \cdot h}. \quad (34)$$

Durch Kombination von (15) und (17) ergibt sich:

$$\kappa = \frac{C}{A} \cdot \Phi \cdot p = \kappa_0 \cdot p. \quad (35)$$

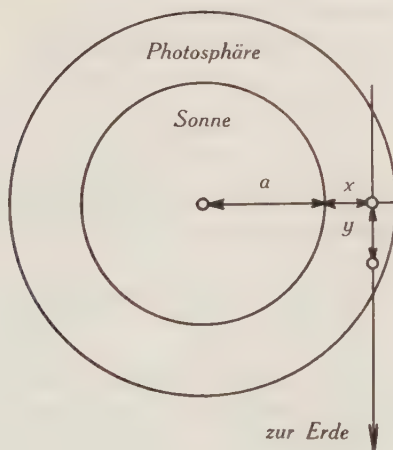


Fig. 1.

Zur Berechnung des Helligkeitsabfalls am Sonnenrand.

Die letzte Umformung ist möglich, weil in der äussersten Atmosphäre die Temperatur konstant und Φ eine reine Temperaturfunktion ist. Nun berechnen wir für einen Punkt in der Höhe $h = x$ die optische Tiefe, und zwar einmal bei senkrechtem Ein-

¹⁾ M. WALDMEIER, Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung, S. 154. Leipzig 1941.

blick in die Sonnenatmosphäre (τ) und das andere Mal bei um 90° gedrehter Einblicksrichtung (τ') (Abb. 1):

$$\tau = \int_x^\infty \kappa \cdot \varrho \cdot dx, \quad (36)$$

$$\tau' = 2 \int_0^\infty \kappa \cdot \varrho \cdot dy, \quad (37)$$

Setzt man hier die Ausdrücke (34) und (35) ein und für ϱ den sich aus der Gasgleichung ergebenden Wert, so liefern die Integrationen¹⁾

$$\tau = \frac{C \cdot \Phi}{A \cdot g} \cdot \frac{p_0^2}{2} \cdot e^{-2\alpha x} \quad (38)$$

$$\tau' = \frac{C \cdot \Phi}{A \cdot g} p_0^2 \sqrt{\pi \cdot a \cdot \alpha} \cdot e^{-2\alpha x} \quad (39)$$

wobei g die Schwerebeschleunigung und a der Sonnenradius ist. Zwischen τ und τ' besteht also die Beziehung:

$$\frac{\tau'}{\tau} = 2 \sqrt{\pi \cdot a \cdot \alpha}. \quad (40)$$

Der Gradient α ergibt sich, wenn wir noch berücksichtigen, dass $\mu = 1$, aus der Gasgleichung zu

$$\alpha = \frac{g}{R \cdot T} = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}. \quad (41)$$

Die Turbulenz, wie sie von C. W. ALLEN²⁾ und P. TEN BRUGGENCATE³⁾ gefunden wurde, vermag den Gradienten nur unwesentlich zu verkleinern, nämlich auf $6,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$.

Die Strahlungsintensität I ist mit der optischen Tiefe durch die Gleichung verbunden:

$$I = I_0(1 - e^{-\tau'}), \quad (42)$$

wobei I_0 die Kirchhoff-Planck-Funktion für den Sonnenrand be-

¹⁾ Vgl. A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, S. 395. Berlin 1938.

²⁾ C. W. ALLEN, Ap. J. **85**, 165, 1937.

³⁾ P. TEN BRUGGENCATE, ZS. f. Astrophys. **18**, 316, 1939.

deutet. Der Zusammenhang zwischen τ und τ' ist durch (40) gegeben, wobei sich mit (41) ergibt:

$$\tau' = 238 \cdot \tau \quad \log \tau' = \log \tau + 2,377. \quad (43)$$

Schliesslich folgt aus (39) der Zusammenhang der geometrischen Höhe x mit der optischen Tiefe τ' :

$$d \log \tau' = -2 \cdot \alpha \cdot \log e \cdot dx. \quad (44)$$

Da die geometrische Höhe linear von $\log \tau'$ abhängt, können wir in Fig. 2 die x -Skala beliebig verschieben; wir haben sie so gewählt, dass für $\tau' = 1$, $x = 0$. Man erkennt, dass der Helligkeitsverlauf am Sonnenrand derselbe ist wie er schon in der alten Theorie von A. UNSÖLD berechnet worden ist; lediglich die Höhenskala ist verändert. Nach der neuen Theorie erfolgt der Helligkeitsabfall auf einer Strecke von etwa 340 km, nach der alten auf einer solchen von nur 150 km. Am Sonnenrand vollzieht sich daher der Übergang von praktisch vollständiger Durchsichtigkeit zu vollständiger Undurchsichtigkeit in einem Winkelbereich von weniger als $\frac{1}{2}''$. Man vergegenwärtige sich, dass im Massstab der

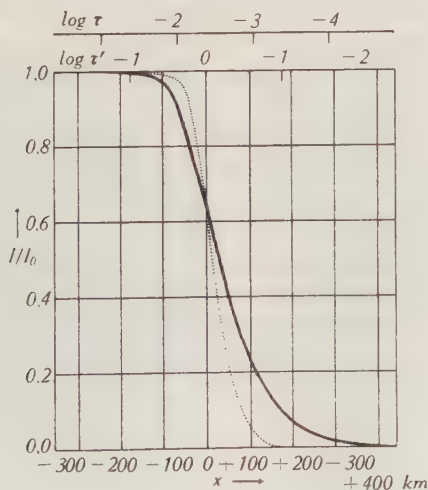


Fig. 2.

Der Helligkeitsabfall am äussersten Sonnenrand.

Fig. 2 der Mittelpunkt der Sonnenscheibe 39 m links von $x = 0$ liegt! Es ist klar, dass dadurch ein völlig scharfer Sonnenrand vorgetäuscht wird. Obschon der Helligkeitsabfall nach der neuen Theorie weniger steil ist als nach der alten (punktirte Linie in Fig. 2), dürfte es äusserst schwierig sein, diesen Abfall zu messen.

7. Zusammenfassung.

Unter der durch neuere Untersuchungen nahegelegten Annahme, dass die Sonnenatmosphäre praktisch vollständig aus Wasserstoff besteht, wird deren Aufbau für den Fall von Strahlungsgleichgewicht berechnet. Durch die Vorherrschaft des Wasserstoffs wird die theoretische Behandlung der Sonnenatmosphäre sehr stark vereinfacht. Nach der neuen Theorie sind die Elektronendrucke bedeutend kleiner, die Gasdrucke um mehr als einen Faktor 10 grösser als nach der alten. Die Schichtungsrechnungen werden gleichzeitig für die ungestörte Photosphäre und für die Atmosphäre eines Sonnenfleckes durchgeführt. Die vertikale Ausdehnung dieser Atmosphären, aus denen praktisch die gesamte Ausstrahlung stammt, ergibt sich zu nur 500 km. Von dieser Grössenordnung ist auch die Breite, auf welcher am Sonnenrand der Abfall der Helligkeit der Sonnenscheibe erfolgt. Da dieser Helligkeitsabfall von der Erde aus gesehen in einem Winkelbereich von nur $\frac{1}{2}''$ erfolgt, der nicht aufgelöst werden kann, scheint die Sonnenscheibe einen scharfen Rand zu besitzen. Die Vergleichung der Schichtung in Fleck und Photosphäre zeigt, dass die „Strahlungsschwerpunkte“ der beiden Atmosphären praktisch in demselben Niveau liegen (die kleine Differenz, die sich ergibt, ist bedeutungslos, da sie weit unterhalb der Beobachtungsgenauigkeit liegt). Dagegen zeigen sich in denselben Niveaus in Fleck und Photosphäre beträchtliche Druckunterschiede. In höheren Niveaus ist der Druck in der Photosphäre grösser als im Sonnenfleck, in mittleren herrscht Druckgleichheit und in tieferen ist der Druck im Fleck grösser als in der ungestörten Photosphäre. Diese Druckunterschiede bedingen horizontale Strömungen, die in den hohen Schichten auf den Fleck zu, in den tiefen aus dem Fleck heraus gerichtet sind. Die berechneten Geschwindigkeiten dieser Strömungen stehen in quantitativer Übereinstimmung mit den beobachteten.

Un compteur mécanique rapide¹⁾

par P. Kipfer.

(19. V. 1942.)

Résumé: Description d'un compteur mécanique rapide. Détermination expérimentale du temps de séparation τ de l'installation complète dont faisait partie le compteur mécanique.

Résultat obtenu: $\tau = 1,82 \cdot 10^{-3}$ sec. $\approx \frac{1}{550}$ sec.

1. Dans l'appareillage servant à compter des particules par un compteur Geiger-Müller l'élément enregistreur est le plus souvent un compteur mécanique. Il est intéressant que le temps de séparation de ce compteur soit petit²⁾.

Nous avons élaboré et étudié un compteur mécanique rapide (appelé dans la suite CMR) dans le but d'atteindre un temps de séparation ne dépassant pas $\frac{1}{560}$ sec.

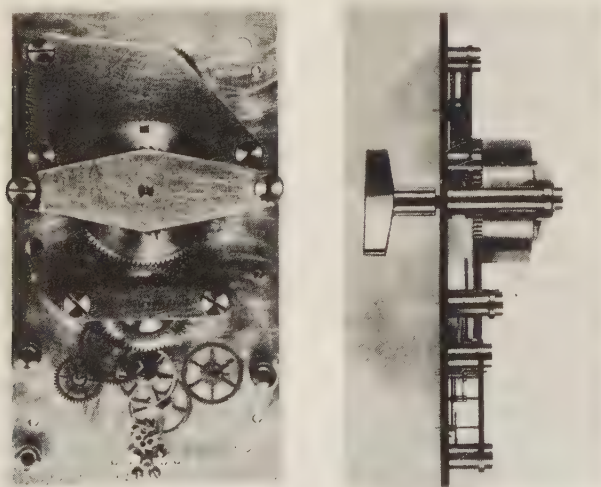


Fig. 1.

¹⁾ Ce compteur a été terminé en 1934. A ce moment l'auteur était aspirant du Fonds National de la Recherche Scientifique. Différentes raisons ont empêché la publication immédiate des résultats obtenus.

²⁾ Voir p. ex. FLAMMERSFELD, A., Natw. 24, 522, 1936, NEHER, H. V., Phys. Rev. 10, 29, 1939.

Ce compteur se base sur un principe utilisé par REGENER¹⁾.

REGENER, après avoir enlevé le balancier d'un réveil ordinaire, fait entraîner l'ancre du réveil par l'armature d'un relais mis en action par les impulsions de courant dues aux particules à compter.

Description du compteur (fig. 1²⁾).

2. L'usine « Oméga Watch Co. » à Bienne s'est aimablement mise à notre disposition pour la construction du CMR, suivant nos indications. Nous tenons à la remercier de sa précieuse collaboration.

Le CMR est caractérisé par les points suivants:

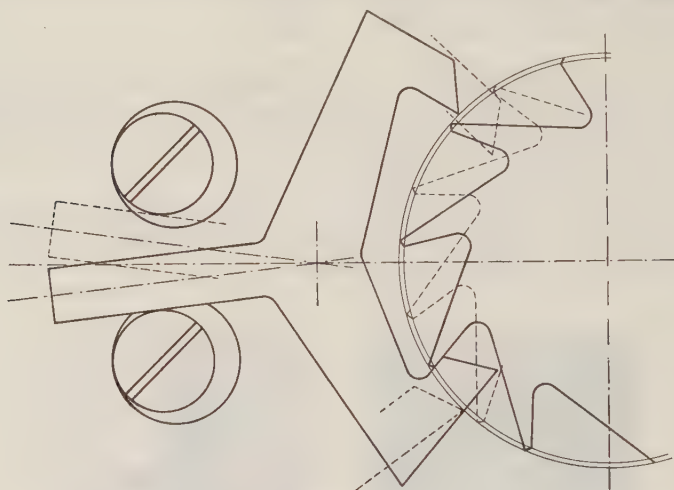


Fig. 2.

Echappement.

a) L'échappement (fig. 2) est tel que la roue d'ancre avance nécessairement d'une dent si l'ancre fait, avec sa course normale, un mouvement aller et retour complet.

Si, aux fréquences élevées, le moment agissant sur la roue et provenant du ressort moteur de l'appareil était insuffisant pour produire l'accélération angulaire nécessaire à l'avance de la roue, l'ancre produirait sur la roue les forces supplémentaires nécessaires à assurer cette avance. Pour que cette intervention de l'ancre puisse avoir lieu, il faut que le relais soit assez puissant pour assurer à l'ancre, à toutes les fréquences, une course complète. Cela est toujours réalisable.

¹⁾ REGENER, E., Natw. 19, 177, 1931.

²⁾ Les photos de la fig. 1 ont été mises à notre disposition par l'usine « Oméga ». Les fig. 2, 3 et 4 ont été établies d'après les plans de la même usine.

Ainsi, l'avance d'une dent est assurée si l'armature du relais fait, avec sa course normale, un mouvement aller et retour complet.

Le temps de séparation de l'ensemble du CMR et de son relais est donc essentiellement déterminé par le relais.

Un échappement élaboré au laboratoire respectait la condition posée d'une façon absolue tandis que l'échappement définitif, proposé par l'usine « Oméga » et adopté pour des raisons de simplicité, ne la respecte que conditionnellement. L'avance automatique de la roue d'ancre n'est assurée qu'à condition qu'au moment où l'ancre commence son mouvement aller, la roue d'ancre n'ait pas de tendance à tourner en sens opposé à sa rotation normale. Si un tel mouvement de recul prenait naissance il se pourrait que l'ancre fasse une oscillation complète sans que la roue d'ancre n'avance d'une dent.

Les seules raisons pour qu'un tel mouvement de recul prenne naissance seraient, soit des forces élastiques dues aux chocs entre les dents de la roue et l'ancre, soit des forces hydrodynamiques (capillarité, viscosité) dues à une goutte d'huile entre les deux pièces. Pratiquement, le moment moteur agissant sur la roue d'ancre est amplement suffisant pour empêcher d'une façon certaine ce mouvement de recul.

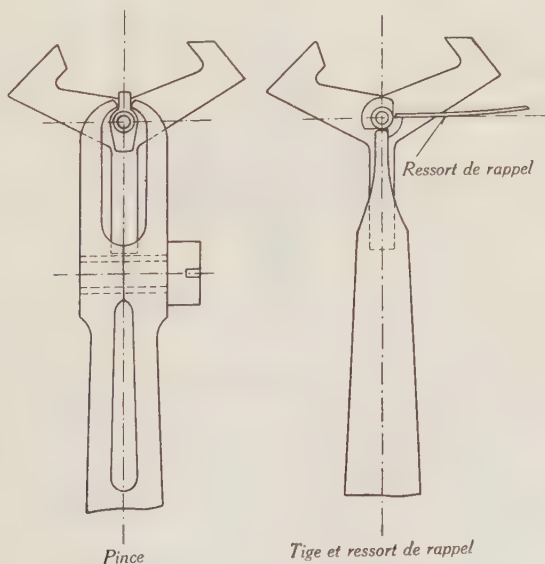


Fig. 3.

b) Deux moyens de liaison entre le relais et le CMR ont été essayés (fig. 3) : Dans le premier dispositif une pince, fixée à l'arma-

ture du relais, agit sur une palette solidaire de l'axe de la roue; dans le second dispositif, une tige, fixée à l'armature du relais, force le mouvement de l'ancre à l'aller, le mouvement de retour étant garanti par un ressort de rappel de fréquence suffisamment élevée.

Le réglage du second mécanisme est plus facile que celui du premier. Pour les deux mécanismes la course de l'armature du relais nécessaire au bon fonctionnement du CMR, mesurée au point de contact de l'armature et de l'ancre, est de $15 \text{ à } 20 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$.

c) Le CMR porte 5 cadrans indiquant respectivement les unités, les dizaines, les centaines, les milliers et les dizaines de mille (fig. 4).

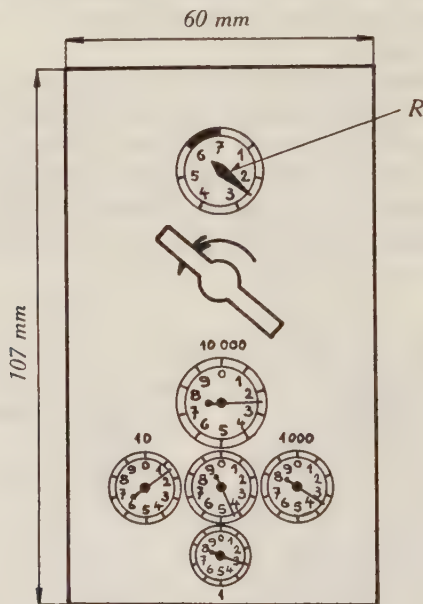


Fig. 4.

d) Le ressort du CMR est complètement remonté après 7 tours de clef. La démultiplication est telle que $1,08 \cdot 10^6$ particules peuvent être enregistrées pendant que le ressort se détend de 6 tours, après quoi l'appareil doit être remonté à nouveau.

Une aiguille (fig. 4, *R*) indique à chaque instant de combien de tours le CMR est remonté.

e) Le barillet du CMR peut être démonté en dévissant 2 vis seulement (fig. 1, *V*). En cas de rupture du ressort, le barillet inutilisable peut être remplacé immédiatement par un barillet de rechange.

Impulsions réparties régulièrement.

3. Une première série d'essais a été faite en lançant dans le relais des impulsions périodiques de forme rectangulaire, produites par la méthode du disque tournant (Flux lumineux périodique produit par un disque tournant ayant des ouvertures; cellule photoélectrique; amplificateur à courant continu).

Nous avons utilisé un relais télégraphique « Creed » dont la course entre les butées a été réglée à $15 \cdot 10^{-2}$ mm.

4. Nous avons contrôlé, par une méthode stroboscopique très simple, le bon fonctionnement du relais (fig. 5).

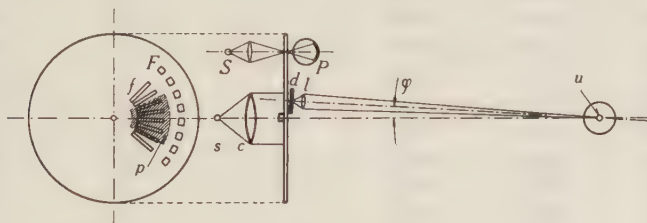


Fig. 5.
Stroboscope.

Le disque tournant porte, vers l'extérieur, les ouvertures F servant à produire les impulsions de courant (source S , cellule photoélectrique P) et vers l'intérieur les fentes f , en même nombre que les ouvertures F . Un grand nombre de fentes (plage p) est éclairé par le système optique $s-c$, placé devant le disque. Sur un support pouvant tourner autour d'un axe u passant par l'objet à éclairer (armature du relais) se trouve, derrière le disque, une fente d ainsi qu'une lentille l formant l'image de d en u .

Eclairée par $s-d-l$ l'armature du relais paraît immobile. A chaque position φ du support $d-l-u$ correspond une phase bien déterminée du mouvement de l'armature. En faisant varier φ d'une façon continue le mouvement de l'armature peut être observé à une fréquence aussi petite que l'on veut.

Notons en passant que l'efficacité de ce dispositif stroboscopique est indépendant des variations de la vitesse angulaire du disque, ce qui était indispensable dans le cas présent. La vitesse du moteur tourne-disque, réglable dans de larges limites, n'était pas rigoureusement constante.

Par la méthode décrite nous avons constaté que l'armature du relais parcourait intégralement la course nécessaire au bon fonctionnement du CMR jusqu'à une fréquence de 570 hertz.

Tableau I
Impulsions réparties régulièrement.

1. Fréquence $f \cdot \text{sec.}$	2. Nombre émis N	3. Nombre enregistré N'	4. Différence absolue $N' - N$	5. Différence en ‰ $\frac{N' - N}{N} \cdot 1000$	6. Erreur de mesure en ‰ $\delta \cdot 1000$
Liaison: pince					
98	3200	3201	+ 1	+ 0,3	$\pm 6,1$
117	3200	3188	- 12	- 3,8	7,3
176	3200	3196	- 4	- 1,25	11,0
192	6400	6395	- 5	- 0,8	6,0
239	3200	3208	+ 8	+ 2,5	14,9
280	3200	3187	- 13	- 4,1	17,5
356	6400	6350	- 50	- 7,8	11,1
400	9600	9606	+ 6	+ 0,6	8,3
400	9600	9603	+ 3	+ 0,3	8,3
461	9600	9569	- 31	- 3,2	9,6
485	9600	9583	- 17	- 1,8	10,1
492	9600	9576	- 24	- 2,6	10,2
492	9600	9654	+ 54	+ 5,6	10,2
505	9600	9697	+ 97	+ 10,1	10,5
510	9600	9603	+ 3	+ 0,3	10,6
521	9600	9576	- 22	- 2,3	10,9
			= - 6		
Liaison: tige et ressort					
94	9600	9600	0	0	2,0
117	9600	9610	+ 10	+ 1,0	2,4
158	9600	9598	- 2	- 0,2	3,3
186	9600	9566	- 34	- 3,5	3,9
258	9600	9581	- 19	- 2,0	5,4
292	9600	9642	+ 42	+ 4,4	6,1
292	9600	9552	- 48	- 5,0	6,1
294	9600	9504	- 96	- 10,0	6,1
328	9600	9558	- 42	- 4,4	6,8
393	9600	9631	+ 31	+ 3,2	8,2
403	9600	9656	+ 56	+ 5,8	8,4
414	9600	9685	+ 85	+ 8,85	8,6
521	9600	9707	+ 107	+ 11,1	10,9
521	9600	9642	+ 42	+ 4,4	10,9
527	9600	9617	+ 17	+ 1,8	11,0
			= + 149		

5. Les essais ont été faits de la façon suivante: Après avoir réglé la vitesse du moteur tourne-disque à la valeur voulue, nous avons déterminé, pendant un intervalle de temps mesuré, le nombre total de tours effectués par le moteur. Nous en déduisons le nombre total des impulsions émises N pendant l'intervalle de mesure (tableau 1, colonne 2) et la fréquence moyenne f de ces impulsions (colonne 1). Nous comparons le nombre d'impulsions émises au nombre d'impulsions enregistrées N' par le CMR pendant le même intervalle de temps (colonne 3).

La détermination du nombre d'impulsions émises est affectée d'une erreur due à l'imprécision des différentes observations et manipulations. Nous estimons que cette erreur (colonne 6) correspond à une erreur faite sur la détermination du temps de $2 \cdot 10^{-1}$ sec.

6. Le tableau 1 résume les mesures faites avec des impulsions régulièrement réparties.

Les graphiques suivants (fig. 6 et 7) représentent les résultats obtenus:

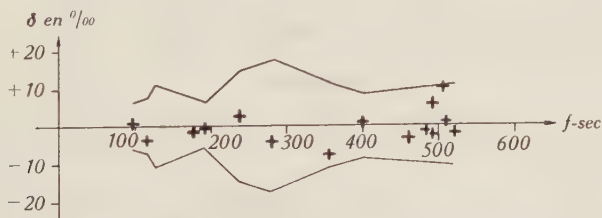


Fig. 6. Liaison: pince.

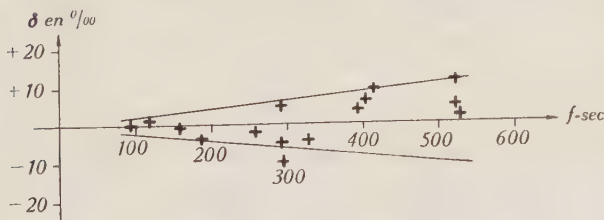


Fig. 7. Liaison: tige et ressort de rappel.

Impulsions réparties régulièrement.

f : fréquence δ : différences relatives (colonne 5)
 +: points mesurés —: limite des erreurs de mesure (colonne 6).

Nous remarquons que les différences relatives constatées $(N' - N)/N$ sont, en général, inférieures aux erreurs de mesure δ et que les excès sont aussi fréquents que les déficits. Nous concluons que le CMR compte toutes les impulsions jusqu'à la fréquence de 527 hertz au moins. Son temps de séparation est donc inférieur à $1/527$ sec.

Impulsions réparties statistiquement.

7. Dans une deuxième série d'essais le système du disque tournant a été remplacé par un compteur Geiger-Müller, soumis à l'action du rayonnement γ de différentes préparations de radium, placées successivement à une même distance du compteur Geiger-Müller.

Nous avons déterminé, pour chaque quantité de radium utilisée (tableau 2, colonne 1), le nombre total d'impulsions enregistrées par le CMR (colonne 3) pendant un intervalle de temps mesuré (colonne 2) et nous en avons déduit le nombre moyen des impulsions enregistrées par unité de temps (colonne 4).

Les nombres moyens sont entachés d'erreurs dues, d'une part, aux fluctuations de la décomposition radioactive et, d'autre part, aux imprécisions des différentes observations et manipulations.

Nous estimons que la première erreur est de \sqrt{N} , si N est le nombre des impulsions émises réparties statistiquement, et que la deuxième correspond à une erreur faite sur le temps de $3 \cdot 10^{-1}$ sec. par manipulation. Nous trouvons ainsi la colonne 7.

8. Le tableau 2 résume les mesures faites.

Tableau 2.
Impulsions réparties statistiquement.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	Quantité de radium	Inter-val de mesure	Nombre des impulsions enregistrées	Nombre moyen des impulsions enregistrées		Diffé-rence	Erreur absolue de mesure	Nombre des impulsions émises
	mgr.	sec.		mesuré	calculé			calculé
				n_m' sec. ⁻¹	n_c' sec. ⁻¹	$n_m' - n_c'$ sec. ⁻¹	sec. ⁻¹	n_c sec. ⁻¹
				Liaison: tige et ressort				
1	20,25	127,2	20 215	158,9	155,2	+ 3,7	±2,6	240,1
2	29,70	120,4	21 809	181,0	185,6	- 4,6	±3,0	352,2
3	40,18	120,4	23 505	195,0	200,3	- 5,3	±3,2	476,5
4	49,87	121,0	25 170	207,8	201,8	+ 6,0	±3,4	591,4

Le calcul des probabilités conduit à l'équation suivante entre
 n : nombre moyen des impulsions émises par unité de temps,
 n' : nombre moyen des impulsions enregistrées par unité de temps,
 τ : temps de séparation du dispositif enregistreur:

$$n' = ne^{-\tau n}.$$

Nous admettons que :

$$n = k \cdot m$$

où m est la quantité de radium utilisée et k une constante de l'installation tenant compte: de la vitesse de décomposition du radium, des différents milieux absorbants, de l'angle sous lequel le compteur Geiger-Müller voit la préparation radioactive et, enfin, du rendement du compteur Geiger-Müller.

Nous avons calculé τ et k (tableau 3) en utilisant d'abord les mesures 1 et 4 et ensuite les mesures 2 et 3¹⁾.

Tableau 3.

	$\tau \cdot 10^3$	k
1—4	1,77	12,1
2—3	1,87	11,6
moyenne	1,82	11,8

Les valeurs n et n' calculées avec les moyennes de τ et de k sont reproduites dans le tableau 2 (colonnes 5 et 8).

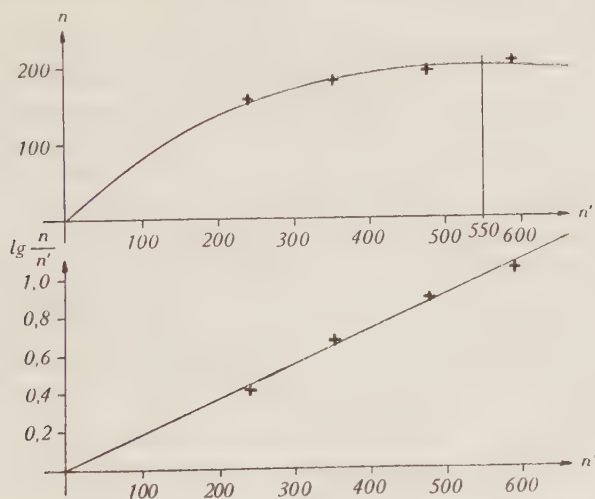


Fig. 8.

Impulsions réparties statistiquement.

+ : points mesurés. — : courbes calculées.

Les graphiques suivants (fig. 8) représentent de deux façons différentes les points mesurés et la courbe calculée avec les moyennes de τ et de k .

¹⁾ Vu le petit nombre de points mesurés, il nous a semblé parfaitement inutile de déterminer la courbe la plus probable par la méthode des moindres carrés.

Nous constatons que les courbes calculées s'écartent peu des valeurs mesurées. Pourtant, en valeur absolue, les erreurs de mesures calculées, quoi qu'étant du même ordre de grandeur, sont systématiquement inférieures aux écarts observés. Ce fait pourrait s'expliquer par une instabilité du fonctionnement du compteur Geiger-Müller.

Après avoir calculé l'erreur moyenne de la moyenne de τ nous trouvons finalement, pour le temps de séparation du CMR accouplé au relais « Creed »:

$$\tau = (1,82 \pm 0,29) \cdot 10^{-3} \text{ sec} \approx 1/550 \text{ sec.}$$

Le déficit relatif $\frac{n-n'}{n}$ d'un système d'enregistrement de temps de séparation τ vaut, en première approximation, $n \cdot \tau$; nous voyons que le CMR permet de compter 5,5 impulsions par seconde avec une précision de 1%. Et, si on se sert du temps de séparation connu ainsi que de ses limites d'erreur pour corriger le nombre compté, la précision sera d'environ 2‰ pour le même nombre d'impulsions par seconde.

8. Si le phénomène à étudier nécessite l'enregistrement d'un plus grand nombre d'impulsions par unité de temps, on pourrait ou bien faire précéder le CMR par un système de démultiplication électrique (scale of 2^n), ou bien inscrire préalablement les impulsions à compter sur une bande en mouvement et reproduire ultérieurement les impulsions ainsi inscrites à une cadence ralentie permettant de les compter par le CMR.

Cet enregistrement préalable pourrait se faire optiquement sur un film ou, ce qui nous semble plus simple encore, magnétiquement sur une bande en acier. On arrivera facilement à un temps de séparation de l'ordre de 10^{-4} sec. donnant lieu à une précision de 6% pour 100 impulsions par seconde, sans correction.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur A. PICCARD, dans les laboratoires duquel ce travail a été fait, ainsi que le Fonds National de la Recherche Scientifique dont l'intervention a permis l'exécution de cette recherche.

Université de Bruxelles, Faculté des Sciences appliquées.

Anschauliche Ableitung einiger Näherungsformeln aus der Theorie der Stromverdrängung

von H. König.

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht.)

(12. V. 1942.)

Zusammenfassung. Elementare Ableitung der Näherungsformeln für Widerstand und Selbstinduktion bei schwachem Skineffekt im Falle a) des geraden kreiszylindrischen Drahtes, b) der einlagigen und c) der mehrlagigen eng gewickelten langen Spule.

Zu den klassischen Problemen der Elektrodynamik, deren Behandlung sachlich und methodisch abgeschlossen erscheint, gehört dasjenige des Skin-Effektes, d. h. der Stromverdrängung von Wechselstrom in einfach geformten massiven Leitern. Im Falle eines geraden, unendlich langen, kreiszylindrischen Drahtes z. B. können wir seit MAXWELL¹⁾ mit Hilfe von Bessel'schen Funktionen genau angeben, wie der bei niedriger Frequenz ($\omega = 2\pi\nu$) gleichmässig über den Leiterquerschnitt verteilte Strom mit zunehmender Frequenz mehr und mehr der Oberfläche entlang fliesst, wo das magnetische Feld am stärksten ist. Der wirksame Querschnitt nimmt ab, der „wirksame“ Widerstand nimmt zu, und die „wirksame“ Selbstinduktion nimmt ab.

In der Messtechnik steht man oft vor der Frage, ob in einem gegebenen Fall Skineffekt schon zu befürchten sei oder nicht. Man entscheidet dies z. B. im Fall des freien Drahtes an Hand der Näherungsformel für den wirksamen Widerstand bei schwachem Skineffekt:

$$R_{\omega} = R_0 \left(1 + \frac{1}{12} (\gamma \omega \mu \pi)^2 a^4 \dots \right)$$

γ = Leitfähigkeit.

μ = Permeabilität des Drahtmaterials.

a = Radius des Drahtquerschnittes.

Wir machen im folgenden auf die Möglichkeit einer elementaren Ableitung dieser und verwandter, zum Teil ebenfalls bereits bekannter Formeln aufmerksam, die so einfach ist, dass man die gewünschten Formeln fast gedankenlos konstruieren kann und die ausserdem die Phänomene, so wie sie sich zeitlich aufgelöst gedacht abspielen, unmittelbar widerspiegelt. Nicht nur dem Praktiker,

der die Formel, die er braucht, gerne *durchschauen* möchte, sondern auch dem Unterrichtenden ist vielleicht damit gedient. Wir hätten diese Frage hier nicht angeschnitten, wenn wir nicht in der Literatur eine Darstellung *in dieser Form* vermisst hätten. Auf die Behandlung dieser Aufgabe durch andere Autoren wird am Schluss kurz eingegangen.

Es sollen besprochen werden:

a) *Der gerade, unendlich lange Draht*, dessen Querschnitt ein Kreis vom Radius a ist; Fig. 1a.

b) *Die unendlich ausgedehnte Platte* von der Dicke a ; Fig. 1b. Denkt man sich die Platte durch dünne Isolierschichten in der y -Richtung in den Abständen b unterteilt und die Platte um die y -Richtung als Achse zu einem Zylinder von relativ grossem Durchmesser zusammengebogen, so erhalten wir eine einlagige, aus Vierkantdraht lückenlos gewickelte Spule. Das Spuleninnere denken wir uns in Fig. 1b rechts von der Wicklung; das magnetische Feld H wählen wir demgemäss für $x < 0$ gleich Null. Feldlinien und Stromlinien drängen sich gegen die Innenseite der Spule.

c) *Die geschichtete Platte*, Fig. 1c. Entsprechend b) ist der Übergang zur mehrlagigen enggewickelten Spule möglich. Hier befinden sich die innern (rechts gelegenen) Windungen auch im Feld der äusseren Windungslagen, weshalb die Widerstandserhöhung und Selbstinduktions-Erniedrigung mit der Zahl der Lagen stark zunehmen.

In allen Beispielen liegen Strom und elektrisches Feld in der z -Richtung, vom Beschauer weggerichtet; das magnetische Feld liegt stets normal zur x - und zur z -Richtung. Der Index x weist auf die Abhängigkeit von x hin.

Gedankengang der Rechnung: Im homogenen Leiter der Fig. 1a, b oder c herrsche in nullter Näherung die vom Ort (x) unabhängige Feldstärke

$$E_x^{(0)} = E^{(0)}.$$

Sie treibt im Material mit der Leitfähigkeit γ die Stromdichte nullter Näherung

$$i_x^{(0)} = i^{(0)} = \gamma E^{(0)}.$$

Die drei Beispiele sind geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass sich das magnetische Feld nullter Näherung $H^{(0)}$ aus dem Satz: Linienintegral des Feldes = $4\pi \cdot$ umschlossener Strom

$$\int H_x^{(0)} ds = 4\pi I_x^{(0)}$$

leicht berechnen lässt. Für den Teilstrom nullter Näherung

$$I_x^{(0)} = \int i^{(0)} df$$

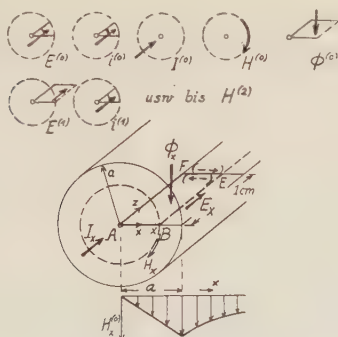


Fig. 1a.

Kreiszyklindrischer Draht vom Radius a . Darüber ist die Reihenfolge der zu berechnenden Näherungsgrößen bildlich dargestellt.

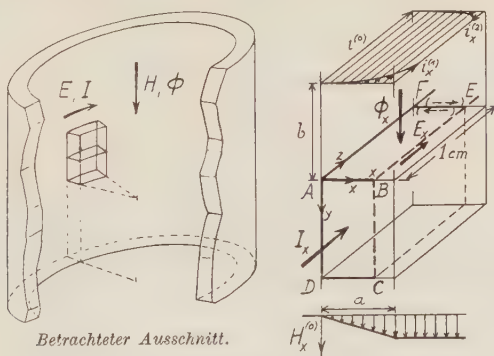


Fig. 1b.

Stromverdrängung in einer Platte (einlagige Spule).

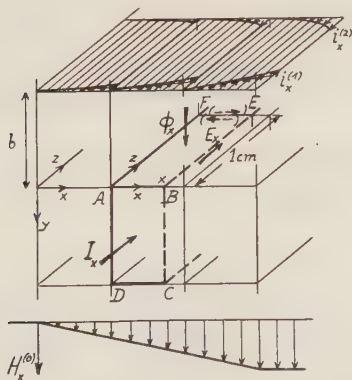


Fig. 1c.

Ausschnitt aus der Wicklung einer 3-lagigen Spule.

ist im Fall der Fig. 1a die Kreisfläche mit dem Radius x , im Fall der Fig. 1b und 1c die Rechteckfläche $ABCD$ Integralfäche. Nun weisen alle Amplitudengrößen G , weil wir ein Wechselstromproblem betrachten, eine zeitliche Abhängigkeit von der Form

$$G = G_{\max} \cdot e^{j\omega t}$$

auf; somit

$$\frac{\partial G}{\partial t} = j\omega G;$$

Für eine passend gewählte Fläche, in allen Figuren die Fläche $ABEF$ mit den Seitenlängen 1 cm und x lässt sich im Innern des Leiters (Permeabilität μ) der Kraftfluss nullter Näherung

$$\Phi_x^{(0)} - \mu \int H_x^{(0)} df = \mu \int_0^x H_x^{(0)} dx$$

und die zugehörige induzierte erste Wirtelspannung

$$\int_{ABEF} E_x^{(1)} ds = \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial t} = j\omega \Phi^{(0)}.$$

berechnen. Vom Linienintegral fallen die Stücke normal zur z -Achse und damit die Ströme quer zum Draht weg, da sich die Felder benachbarter Integrationskurven, wie die gestrichelten Pfeile andeuten, aufheben. Somit

$$\int E_x^{(1)} dx = E_x^{(1)} - E_0^{(1)}.$$

$E_0^{(1)}$, d. h. die induzierte Spannung in der Drahtachse (Fig. 1a) bzw. an der Aussenseite der Windungslage (Fig. 1b und c) dürfen wir als Integrationskonstante $= 0$ setzen. Wir wollen ja nur *einen* möglichen Zustand der Felder im Drahtinnern beschreiben, nämlich denjenigen, für den $E_0^{(0)}$ und $i_0^{(0)}$ die Randwerte des Gesamtfeldes

$$E_x = E_x^{(0)} + E_x^{(1)} + E_x^{(2)} + \dots$$

bzw. der Gesamtstromdichte

$$i_x = i_x^{(0)} + i_x^{(1)} + i_x^{(2)} + \dots$$

für $x = 0$ sind; es verschwinden also definitionsgemäss alle höheren Näherungen für $x = 0$: $i_0^{(1)} = 0$, $i_0^{(2)} = 0 \dots$, $E_0^{(1)} = 0$, $E_0^{(2)} = 0 \dots$, $H_0^{(1)} = 0 \dots$. Auf diesen methodisch sehr wichtigen Punkt kommen wir am Schluss bei der Besprechung der Literatur nochmals zurück.

Das elektrische Wirbelfeld erster Näherung an der Stelle x ist also einfach gleich der Änderung des „links davon“ verlaufenden Flusses pro 1 cm Drahtlänge:

$$E_x^{(1)} = j \omega \Phi_x^{(0)}.$$

Dieses Feld eilt dem Primärfeld $E_x^{(0)}$ um $\pi/2$ in der Phase voraus, trägt also nur *quadratisch* zum Betrag des Gesamtfeldes bei. Aus diesem Grunde müssen wir noch das Wirbelfeld zweiter Näherung $E_x^{(2)}$ berücksichtigen, welches eine Folge von $E_x^{(1)}$ ist, wie dieses eine Folge von $E^{(0)}$ ist. Dieses Feld wird, weil um π gegen $E^{(0)}$ verdreht, mit vollem Gewicht, also auch in 2. Ordnung zum Betrag des Gesamtfeldes beisteuern. Wir berechnen also der Reihe nach:

$$\begin{aligned} i_x^{(1)} &= \gamma E_x^{(1)} \\ I_x^{(1)} &= \int i_x^{(1)} df \\ \int H_x^{(1)} ds &= 4 \pi I_x^{(1)} \\ \Phi^{(1)} &= \mu \int H_x^{(1)} dx \\ E_x^{(2)} &= j \omega \Phi_x^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und so fort bis zum Feld $H_x^{(2)}$.

Die bekannteste und uns auch hier am vorteilhaftesten erscheinende Art der Einführung des wirksamen Widerstandes R_ω und der wirksamen Selbstinduktion L_ω ist die energetische Definition:

R_ω mal Quadrat des Gesamtstromes soll die Wärmeentwicklung (unter Vernachlässigung der Strahlungsverluste) ergeben:

$$\int \frac{|i_x|^2}{\gamma} dv = R_\omega |I_{x=a}|^2,$$

(Leiterinhalt)

und: L_ω mal $\frac{1}{2} \cdot$ Quadrat des Gesamtstromes soll die gespeicherte magnetische Energie ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8 \pi} \int \mu |H_x|^2 dv &= \frac{\mu}{8 \pi} \int |H_x|^2 dv \\ &\quad (\infty) \qquad \qquad \qquad (\text{Leiter}) \\ + \frac{1}{8 \pi} \int |H_x|^2 dv &- \frac{1}{2} L_\omega |I_a|^2 = \frac{1}{2} (L_\omega^i + L_\omega^a) |I_a|^2. \\ &\quad (\text{Aussenraum}) \end{aligned}$$

Die Trennung in innere und äussere Selbstinduktion ist hier besonders gerechtfertigt, da es sich um Stromverteilungen handelt, bei denen das Feld H_x im Aussenraum von der Verteilung des Stromes (als Funktion von ω) nicht abhängt, sondern nur vom Gesamt-

strom $|I_a|$. Von Interesse ist daher hier nur die innere Selbstinduktion

$$L_{\omega}^i = \frac{\mu}{4\pi |I_a|^2} \int |H_x|^2 dv.$$

(Leiter)

Man erkennt, dass wir die Quadrate der Beträge der Gesamtgrößen

$$\begin{aligned} i_x &= i_x^{(0)} + i_x^{(1)} + i_x^{(2)} \\ I_x &= I_x^{(0)} + I_x^{(1)} + I_x^{(2)} \\ H_x &= H_x^{(0)} + H_x^{(1)} + H_x^{(2)} \end{aligned} \quad \text{für } x = a$$

zu bilden haben werden.

Die Ableitungen sind im folgenden zunächst so ausführlich wiedergegeben, dass sich jede weitere Erläuterung erübrigt. Sie erscheinen nur deshalb etwas lang, weil sie vollständig sind.

a) *Gerader Draht; Fig. 1a:*

$$i_x^{(0)} = i^{(0)} = \gamma E^{(0)}$$

$$\dot{i}_x^{(0)} = \int \dot{i}^{(0)} df = \dot{i}^{(0)} \pi x^2$$

$$\int H_x^{(0)} ds = H^{(0)} \cdot 2\pi x = 4\pi I_x^{(0)}$$

$$H_x^{(0)} = \frac{2 I_x^{(0)}}{x} = i^{(0)} \pi \cdot 2x$$

$$\Phi_x^{(0)} = \mu \int H_x^{(0)} df = i^{(0)} \mu \pi \cdot 2 \int_0^x x dx = i^{(0)} \mu \pi \cdot x^2$$

$$E_x^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial t} = \dot{i} i^{(0)} \omega \mu \pi \cdot x^2$$

$$i_x^{(1)} = \gamma E_x^{(1)} = \dot{i} i^{(0)} \gamma \omega \mu \pi \cdot x^2 = \dot{i} i^{(0)} \beta \cdot x^2.$$

Abkürzung: $\beta = \gamma \omega \mu \pi$

$$I_x^{(1)} = \int \dot{i}_x^{(1)} df = \int_0^x \dot{i}_x^{(1)} \cdot 2\pi x dx = \dot{i} i^{(0)} \pi \beta \cdot \frac{x^4}{2}$$

$$H_x^{(1)} = \frac{2 I_x^{(1)}}{x} = \dot{i} i^{(0)} \pi \beta \cdot x^3$$

$$\Phi_x^{(1)} = \mu \int H_x^{(1)} df = \dot{i} i^{(0)} \mu \pi \beta \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$E_x^{(2)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} = -i^{(0)} \omega \mu \pi \beta \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$i_x^{(2)} = \gamma E_x^{(2)} = -i^{(0)} \gamma \omega \mu \pi \beta \cdot \frac{x^4}{4} = -i^{(0)} \beta^2 \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$I_x^{(2)} = \int i_x^{(2)} df = -i^{(0)} \beta^2 \frac{1}{4} \int_0^x x^4 \cdot 2 \pi x dx = -i^{(0)} \pi \beta^2 \frac{x^6}{12}$$

$$H_x^{(2)} = \frac{2 I_x^{(2)}}{x} = -i^{(0)} \pi \beta^2 \frac{x^5}{6}$$

Zusammengefasst bis zur 2. Näherung ist:

$$i_x = i^{(0)} \left(1 + j \beta x^2 - \beta^2 \frac{x^4}{4} \right)$$

$$I_a = i^{(0)} \cdot \pi a^2 \left(1 + j \beta \frac{a^2}{2} - \beta^2 \frac{a^4}{12} \right)$$

$$H_x = i^{(0)} \cdot 2 \pi x \left(1 + j \beta \frac{x^2}{2} - \beta^2 \frac{x^4}{12} \right).$$

Nach der Rechenregel

$$| (1 + \xi) + j \eta |^2 \approx 1 + 2 \xi + \eta^2$$

ist

$$| i_x |^2 = | i^{(0)} |^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 x^4 \right)$$

$$| I_a |^2 = | i^{(0)} |^2 \cdot \pi^2 a^4 \left(1 + \frac{1}{12} \beta^2 a^4 \right)$$

$$| H_x |^2 = | i^{(0)} |^2 \cdot 4 \pi^2 x^4 \left(1 + \frac{1}{12} \beta^2 x^4 \right).$$

Für die Integrale in R_ω und L_ω finden wir unter Einführung der Länge l des Drahtes und mit $dv = l \cdot 2 \pi x dx$:

$$\int | i_x |^2 dv = | i^{(0)} |^2 l \cdot \pi a^2 \left(1 + \frac{1}{6} \beta^2 a^4 \right)$$

$$\int | H_x |^2 dv = | i^{(0)} |^2 l \cdot 2 \pi^3 a^4 \left(1 + \frac{1}{24} \beta^2 a^4 \right).$$

Führen wir in

$$R_\omega = \frac{1}{\gamma | I_a |^2} \int | i_x |^2 dv = \frac{l}{\gamma \pi a^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{6} \beta^2 a^4}{1 + \frac{1}{12} \beta^2 a^4}$$

den Gleichstromwiderstand

$$R_0 = \frac{l}{\gamma \pi a^2}$$

ein, so finden wir als erste der gesuchten Formeln:

$$\underline{R_\omega = R_0 \left(1 + \frac{1}{12} \beta^2 a^4 + \dots \right)}_{\beta = \gamma \omega \mu \pi} \quad (1a)$$

In

$$L_\omega^i = \frac{\mu}{4 \pi | I_a |^2} \int | H_x |^2 dv = \frac{\mu l}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{24} \beta^2 a^4}{1 + \frac{1}{12} \beta^2 a^4}$$

deuten wir

$$L_0^i = \frac{\mu l}{2}$$

als innere Selbstinduktion des Drahtes bei niedriger Frequenz; somit wird

$$\underline{L_{\omega}^i = L_0^i (1 - \frac{1}{24} \beta^2 a^4 + \dots)}. \quad (2a)$$

Damit wäre der Aufbau der 1. Näherung des Skineffektes im Draht durch „Reihenentwicklung der Phänomene bis zur 2. Ordnung“ durchsichtig gemacht. Beachtenswert ist das Entstehen des Faktors

$$\beta = \gamma \omega \mu \pi$$

als Folge von vier Operationen, die den vier Teilerscheinungen:

Erzeugung des Magnetfeldes (Multiplikation mit π)

Erzeugung des induzierenden Flusses (Multiplikation mit μ)

Zeitliche Änderung dieses Flusses (Multiplikation mit $j\omega$)

Erzeugung des Sekundärstromes (Multiplikation mit γ)

entsprechen.

b) *Einlagige Platte*; Fig. 1b. Wir kürzen hier etwas ab. Die Reihe der Näherungsgrößen lautet:

$$i_x^{(0)} = i^{(0)} = \gamma E^{(0)}$$

$$I_x^{(0)} = i^{(0)} b x \quad (b \text{ Breite des Drahtes})$$

$$\int H_x^{(0)} ds = H_x^{(0)} b = 4 \pi I_x^{(0)}$$

denn die Beiträge zum Integral längs AB und CD sind $= 0$, und $H_x^{(0)} = 0$ für $x \leq 0$ nach Voraussetzung.

$$H_x^{(0)} = i^{(0)} \pi \cdot 4 x = i^{(0)} \pi \cdot \frac{2^2}{1!} x$$

$$\Phi_x^{(0)} = i^{(0)} \mu \pi \cdot \frac{2^2}{2!} x^2$$

$$E_x^{(1)} = j i^{(0)} \omega \mu \pi \cdot \frac{2^2}{2!} x^2$$

$$i_x^{(1)} = j i^{(0)} \gamma \omega \mu \pi \cdot \frac{2^2}{2!} x^2 = j i^{(0)} \beta \cdot \frac{2^2}{2!} x^2$$

$$I_x^{(1)} = j i^{(0)} \beta b \cdot \frac{2^2}{3!} x^3$$

$$H_x^{(1)} = j i^{(0)} \pi \beta \cdot \frac{2^4}{3!} x^3$$

$$\Phi_x^{(1)} = j i^{(0)} \mu \pi \beta \cdot \frac{2^4}{4!} x^4$$

$$E_x^{(2)} = - i^{(0)} \omega \mu \pi \beta \cdot \frac{2^4}{4!} x^4$$

$$i_x^{(2)} = - i^{(0)} \gamma \omega \mu \pi \beta \cdot \frac{2^4}{4!} x^4 = - i^{(0)} \beta^2 \frac{2^4}{4!} x^4$$

$$I_x^{(2)} = - i^{(0)} \beta^2 \frac{2^4}{5!} x^5$$

$$H_x^{(2)} = - i^{(0)} \pi \beta^2 \cdot \frac{2^6}{5!} x^5.$$

Ferner

$$\begin{aligned} i_x &= i^{(0)} \left(1 + j \frac{2^2}{2!} \beta x^2 - \frac{2^4}{4!} \beta^2 x^4 \right) \\ I_a &= i^{(0)} \cdot b a \left(1 + j \frac{2^2}{3!} \beta a^2 - \frac{2^4}{5!} \beta^2 a^4 \right) \\ H_x &= i^{(0)} \cdot 4 \pi x \left(1 + j \frac{2^2}{3!} \beta x^2 - \frac{2^4}{5!} \beta^2 x^4 \right). \end{aligned}$$

Man erkennt hier, besser noch als im Beispiel a), das Bildungsgesetz der Zahlenfaktoren. Die Fakultäten in den Nennern lassen vermuten, dass die exakte Theorie auf Hyperbelfunktionen führen würde. Weiter ist

$$\begin{aligned} |i_x|^2 &= |i^{(0)}|^2 \left(1 + \frac{8}{8} \beta^2 x^4 \right) \\ |I_a|^2 &= |i^{(0)}|^2 a^2 b^2 \left(1 + \frac{8}{4 \cdot 5} \beta^2 a^4 \right) \\ |H_x|^2 &= |i^{(0)}|^2 (4 \pi x)^2 \left(1 + \frac{8}{4 \cdot 5} \beta^2 x^4 \right) \\ R_\omega &= \frac{1}{\gamma |I_a|^2} \int |i_x|^2 dv = \frac{l}{ab \gamma} \cdot \frac{1 + \frac{8}{1 \cdot 5} \beta^2 a^4}{1 + \frac{8}{4 \cdot 5} \beta^2 a^4} \end{aligned}$$

oder

$$R_\omega = R_0 \left(1 + \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 5} \beta^2 a^4 + \dots \right) \quad (1b)$$

a = Dicke des Drahtes bzw. der Platte.

$\beta = \gamma \omega \mu \pi$.

Ferner

$$L_\omega^i = \frac{\mu}{4 \pi |I_a|^2} \int |H_x|^2 dv = \frac{4 \pi}{3} \frac{\mu l a}{b} \cdot \frac{1 + \frac{8}{1 \cdot 5} \beta^2 a^4}{1 + \frac{8}{4 \cdot 5} \beta^2 a^4}$$

oder

$$L_\omega = L_0 \left(1 - \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 1 \cdot 5} \beta^2 a^4 + \dots \right) \quad (2b)$$

worin

$$L_0^i = \frac{4 \pi}{3} \frac{\mu l a}{b}$$

die innere Selbstinduktion des l cm langen, zu einer mässig gebogenen Platte, d. h. zu einer Spule lückenlos einlagig zusammengelegten Drahtes der Dicke a und, in der Anlagerungsrichtung gemessen, der Breite b .

c) *Mehrlagige Platte*, Fig. 1c. Hier würde es mehr zu schreiben geben, weil von $H_x^{(0)}$ an alle Ausdrücke zweigliedrig werden wegen des Zusatzfeldes der äusseren Lagen. Wir betrachten, von aussen links an gezählt, die n te Lage:

$$\begin{aligned} E_x^{(0)} &= i^{(0)} - \gamma F^{(0)} \\ I_x^{(0)} &= i^{(0)} \cdot b x \\ H_x^{(0)} &= i^{(0)} \cdot 4 \pi x + i^{(0)} \cdot 4 \pi (n-1) a. \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir geben unter Weglassung der weiteren Grössen der Reihe gleich die Summen:

$$\begin{aligned} i_{x,n} &= i^{(0)} [1 + j\beta (2x^2 + 4(n-1)ax) - \beta^2 (\frac{2}{3}x^4 + \frac{8}{3}(n-1)ax^3)] \\ I_{a,n} &= i^{(0)} \cdot ba [1 + j\beta a^2 (\frac{2}{3} + 2(n-1)) - \beta^2 a^4 (\frac{2}{15} + \frac{2}{3}(n-1))] \\ H_{x,n} &= i^{(0)} \cdot 4\pi [x + (n-1)a + j\beta (\frac{2}{3}x^3 + 2(n-1)ax^2) \\ &\quad - \beta^2 (\frac{2}{15}x^5 + \frac{2}{3}(n-1)ax^4)], \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} |i_{x,n}|^2 &= |i^{(0)}|^2 [1 + \beta^2 (\frac{8}{3}x^4 + \frac{8}{3}(n-1)ax^3 + 16(n-1)^2a^2x^2)] \\ |I_{a,n}|^2 &= |i^{(0)}|^2 \cdot b^2a^2 [1 + \beta^2 a^4 (\frac{8}{45} + \frac{4}{3}(n-1) + 4(n-1)^2)] \\ |H_{x,n}|^2 &= |i^{(0)}|^2 \cdot 16\pi^2 [(x + (n-1)a)^2 + \beta^2 (\frac{8}{45}x^6 + \frac{16}{15}(n-1)ax^5 \\ &\quad + \frac{8}{3}(n-1)^2a^2x^4)]. \end{aligned}$$

Für den Widerstand der n ten Lage mit der Drahtlänge l/m (m = Zahl der Lagen) wird:

$$\begin{aligned} r_{\omega,n} &= \frac{1}{\gamma |I_{a,n}|^2} \int_{\text{(Lagen)}} |i_{x,n}|^2 dv = \frac{l/m}{ab\gamma} (1 + \beta^2 a^4 (\frac{16}{45} + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{4}{3}(n-1)^2)) \\ &= r_0 (1 + \frac{1}{45} \beta^2 a^4 (1 + 60(n - \frac{1}{2})^2)) \end{aligned}$$

Der gesamte wirksame Widerstand ist

$$R_{\omega} = \sum_{n=1}^m r_{\omega,n} = R_0 \left(1 + \frac{1}{45} \beta^2 a^4 \left(1 + 60 \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (n - \frac{1}{2})^2 \right) \right)$$

worin

$$R_0 = mr_0 = \frac{l}{ab\gamma}.$$

Für $m = 1$ geht diese Formel in (1b) über. Für grosses m ist die

Σ durch $\int_0^m n^2 dn = \frac{m^3}{3}$ ersetzbar. Somit

$$\underline{R_{\omega} = R_0 (1 + \frac{1}{45} \beta^2 a^4 (1 + 20m^2)) \text{ für } m \gg 1.} \quad (1c)$$

Für die innere Selbstinduktion der n ten Lage folgt nach längerer elementarer Umformung

$$\begin{aligned} l_{\omega,n}^{\mu} &= \frac{\mu}{4\pi |I_{a,n}|^2} \int_{\text{(Lagen)}} |H_{x,n}|^2 dv = \\ l/m \cdot \frac{4\pi\mu an^3}{3b} &\left[1 + \beta^2 a^4 \left(\frac{8}{5n^3} (\frac{5}{2} + (n - \frac{5}{6})^2) - 4(\frac{1}{6} + (n - \frac{5}{6})^2) \right) \right]. \end{aligned}$$

Die gesamte wirksame innere Induktivität

$$L_{\omega}^i = \sum_{n=1}^m l_{\omega, n}^i$$

führt zu einem recht unübersichtlichen Ausdruck, so dass wir uns auf den Grenzfall einer Spule mit sehr vielen Windungslagen beschränken wollen:

$$L_{\omega}^i = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{\mu a}{b} \left(\int_0^m n^3 dn - 4\beta^2 a^4 \int_0^m n^5 dn \right)$$

woraus

$$L_{\omega}^i = L_0^i \left(1 - \frac{8}{3} \beta^2 a^4 m^2 + \dots \right) \text{ für } m \gg 1 \quad (2c)$$

mit

$$L_0^i = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\mu l a}{b} \cdot m^3$$

$$\beta = \gamma \omega \mu \pi.$$

a = Dicke einer Lage.

m = Zahl der Lagen.

b = Breite des Drahtes.

l = ganze Länge des Drahtes.

Während der Vergleich von (2a) mit (1a) und von 2b) mit (1b) die Vermutung auftauchen lässt, dass die innere Selbstinduktion *allgemein* weniger stark abnehme als der Widerstand zunehme, zeigt (2c) im Vergleich mit (1c), das für die viellagige Spule der relative Einfluss des (schwachen) Skineffektes auf die Selbstinduktion stärker ist als derjenige auf den Widerstand: $\frac{8}{3} > \frac{2.0}{4.5}$. Anschaulich lässt sich das so verstehen: Die durch das Volumintegral über den Wicklungsinhalt definierte „innere“ Selbstinduktion ist gar nicht immer so eine „innere“ Angelegenheit des Drahtes, die von der äusseren Form der Drahtfigur unabhängig ist und wie man sie sich bei der Einführung des Begriffes vorgestellt hat. Denn alle gegen die Spulenachse zu liegenden Windungen liegen im Feld der äusseren Lagen, weshalb $l_{\omega, n}^i$ mit n^3 ansteigt und zu L_{ω}^i fast nur die innersten Lagen, wo der Effekt am stärksten ist, allein beitragen. In R_{ω} dagegen tragen alle Windungslagen mit gleichem Gewicht zum gesamten Skineffekt bei.

Auf die bekannten Schlussfolgerungen für die Praxis, nämlich die Vermeidung viellagiger Spulen und die Verwendung von Litzendraht, braucht hier nicht eingegangen zu werden.

Bemerkungen zur Literatur. In der hier nur unvollständig zitierten Originalliteratur⁹⁾¹⁰⁾¹²⁾ wie in den Lehrbüchern^{1... 8)} wird meist nach einer *vollständigen* Lösung der Maxwell'schen

Gleichungen getrachtet, was im Falle des geraden kreiszylindrischen Drahtes auf Bessel'sche Funktionen, im Falle der Platte auf Hyperbel-Funktionen führt. Dieses Vorgehen ist das natürliche, wenn man nicht gerade, wie er *hier* der Fall ist, *Näherungsformeln* in ihrer *Entstehung* verständlich machen will.

Den Gedanken der näherungsweise Behandlung hat WIEN¹¹⁾ in seiner Theorie der ein- und mehrlagigen Spule durchzuführen versucht; allerdings arbeitet er nur mit dem Wirbelstrom 1. Näherung, was im allgemeinen nicht zulässig erscheint. Das Problem wurde von SOMMERFELD exakt für lückenlose Wicklung¹²⁾ 3) nochmals aufgegriffen; dort finden sich auch unsere Formeln (1b), (2b) und (1c). Formel (2c) für die innere Selbstinduktion der mehrlagigen Spule haben wir in der uns zugänglichen Literatur nicht gefunden.

Unserer Darstellung am nächsten kommt MÖLLER mit seiner Theorie der Stromverdrängung in der einlagigen Spule⁷⁾. Aber MÖLLER wählt die Randbedingungen anders als wir. Für ihn tritt z. B. der Wirbelstrom $i_x^{(1)}$ ausserhalb des untersuchten Drahtes nicht in Erscheinung; also muss ein Rückstrom $i_0^{(1)}$ in der feldärmeren Zone des Drahtes so gewählt werden, dass $\int i_x^{(1)} df$ über den Leiterquerschnitt genommen = 0 ist. Forderungen solcher Art stellen wir nicht, sondern wir lassen $E_x^{(1)}, i_x^{(1)}, I_x^{(1)}, H_x^{(1)}, E_x^{(2)} \dots$ für $x = 0$ zu null werden. Dadurch schliesst sich die obige Darstellung den Reihenentwicklungen der vollständigen Theorie so eng an, dass jedes Korrekturglied $E_x^{(1)}, H_x^{(1)} \dots$ *unmittelbar* ein Glied dieser Reihenentwicklung und damit eine anschauliche Deutung desselben ist.

Literatur.

- 1) BREISIG, Theoretische Telegraphie, 1924, S. 510.
- 2) COHN, Das elektromagnetische Feld, 1900, S. 354 und 457.
- 3) FRANK und MISES, Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik II, 1927, Artikel Sommerfeld S. 499.
- 4) Handbuch der Physik, hrsg. von GEIGER und SCHEEL, Bd. XV, S. 339.
- 5) HORT, Differentialgleichungen des Ingenieurs, 1914, S. 513.
- 6) MESNY, Radio-Electricité Générale I, 1935, S. 274.
- 7) KORSHENEWSKY und RUNGE, Lehrbuch der drahtlosen Nachrichtentechnik I, 1940, Artikel Möller S. 34.
- 8) ORLICH, Kapazität und Induktivität, 1909, S. 134.
- 9) MAXWELL, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, 1883 (engl. Orig. 1873), § 689.
- 10) RAYLEIGH, Phil. Mag. **21**, 381, 1886.
- 11) WIEN, Ann. d. Physik **14**, 1, 1904.
- 12) SOMMERFELD, Ann. d. Physik **15**, 673, 1904.

Théorie de l'influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux

par **Jean Weigle** et **Konrad Bleuler**.

(16. V. 1942.)

1. Introduction.

Nous avons montré dans un article précédent¹⁾ comment le réseau de Fourier d'un cristal était perturbé par la présence d'ondes déplaçant les atomes. Nous avons restreint nos considérations à des ondes de très faibles amplitudes avec le but d'appliquer nos résultats aux ondes thermiques. Celles-ci, en effet, ont des amplitudes extrêmement petites à la température ordinaire; on calcule sans peine que des ondes d'une longueur d'onde aussi grande que 1 cm. donnent des amplitudes, dans un cristal comme NaCl, de l'ordre de grandeur de 10^{-13} cm., c'est-à-dire 10^{-5} fois plus petites que la distance séparant les atomes. Cependant il est possible de produire artificiellement, par exemple par des oscillations piezo-électriques, des ondes dont l'amplitude est beaucoup plus grande que la distance entre les atomes. Il devient alors intéressant de calculer comment la diffraction des rayons X est affectée par des oscillations. En plus, dans la théorie de l'effet thermique, on trouve qu'il est nécessaire, à cause du grand nombre des ondes présentes dans le cristal, de tenir compte de termes d'ordre supérieur dans l'approximation des petites amplitudes. La théorie que nous donnons ici servira donc à ces deux buts. Au lieu de suivre exactement la méthode employée dans l'article précédent, nous procéderons d'une façon un peu plus générale. Dans les fonctions de densité du cristal dont nous désirons obtenir l'image dans l'espace de Fourier (les transformées de Fourier), nous avons cherché à mettre en évidence une partie périodique que nous avons alors exprimée en série de Fourier. Dans le procédé que nous employons ici, nous ne faisons aucune supposition quant à la périodicité des fonctions périodiques modulées; c'est l'analyse de Fourier qui se charge elle-même de montrer si la fonction est périodique ou partiellement périodique. Le procédé consiste à prendre l'intégrale de Fourier de la fonction à analyser. Si elle est purement péri-

¹⁾ WEIGLE, *Helv. Phys. Acta* **15**, 162, 1942.

dique, l'intégrale dégénère en une série de Fourier, si elle est périodique et modulée elle devient une série qui permet de trouver la structure du réseau de Fourier. Nous nous servons constamment d'un théorème simple sur ces transformations, que nous démontrons dans l'appendice et qui s'exprime ainsi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l_1=-N_1}^{+N_1} \sum_{l_2=-N_2}^{+N_2} \sum_{l_3=-N_3}^{+N_3} e^{-2\pi i (\mathbf{b} (l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3))} f(\mathbf{b}) dv_b$$

$$\lim_{N_i \rightarrow \infty} = v_b \sum_{h_1} \sum_{h_2} \sum_{h_3} f(h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3) \quad (1)$$

les vecteurs \mathbf{b}_i étant réciproques des \mathbf{a}_i ($(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = \delta_{ij}$) et les h_i étant des nombres entiers. Les sommes sur les h_i s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$.

2. Ondes de grandes amplitudes dans un cristal.

Le cristal est construit sur la maille $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ à l'intérieur de laquelle se trouvent différents atomes m dont la position est donnée par

$$\mathbf{r}_m = \alpha_{1m} \mathbf{a}_1 + \alpha_{2m} \mathbf{a}_2 + \alpha_{3m} \mathbf{a}_3$$

($m = 1, 2 \dots p$; p , nombre d'atomes dans la maille)

La position de l'atome m de la maille l est alors donnée par

$$\mathbf{a}_{m,l} = (l_1 + \alpha_{1m}) \mathbf{a}_1 + (l_2 + \alpha_{2m}) \mathbf{a}_2 + (l_3 + \alpha_{3m}) \mathbf{a}_3$$

La densité $f_m(\mathbf{a})$ d'un atome est supposée pouvoir être exprimée en intégrale de Fourier

$$f_m(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\mathbf{b}) e^{2\pi i (\mathbf{b} \mathbf{a})} dv_b \quad \varphi_m(\mathbf{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(\mathbf{a}) e^{-2\pi i (\mathbf{b} \mathbf{a})} dv_a$$

avec

$$dv_a = (\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = v_a d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

et l'on a

$$v_a \cdot v_b = 1$$

La densité dans le cristal est alors

$$F(\mathbf{a}) = \sum_l \sum_m f_m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{m,l})$$

Si, maintenant, les atomes sont déplacés de leurs positions $\mathbf{a}_{m,l}$ par une onde¹⁾ plane généralisée

$$\xi_{m,l} = \xi_m \sin 2\pi ((\mathbf{k} \mathbf{a}_{m,l}) - \nu t)$$

la densité $F(\mathbf{a})$ qui était périodique, est alors modulée en phase

$$F(\mathbf{a}) = \sum_m \sum_l f_m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{m,l} - \xi_{m,l})$$

¹⁾ Voir par ex. SEITZ, Modern theory of solids p. 128.

Ecrivons les intégrales de Fourier

$$F(\mathbf{a}) = \int_{\infty} \Phi(\mathbf{b}) e^{2\pi i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} dv_b \quad \text{et} \quad \Phi(\mathbf{b}) = \int_{\infty} F(\mathbf{a}) e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} dv_a$$

On a

$$\Phi(\mathbf{b}) = \int_{\infty} \sum_l \sum_m f_m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{m,l} - \xi_{m,l}) e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} dv_a$$

Posons

$$\mathbf{a} - \mathbf{a}_{m,l} - \xi_{m,l} = \mathbf{a}'$$

Ainsi

$$\Phi(\mathbf{b}) = \sum_m \int_{\infty} \sum_l [f_m(\mathbf{a}') e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}_{m,l} + \xi_{m,l}))}] e^{-2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}'} dv_a$$

et donc

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{b}) &= \sum_l \sum_m e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}_{m,l} + \xi_{m,l}))} \int_{\infty} f_m(\mathbf{a}') e^{-2\pi i \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}'} dv_a \\ &= \sum_l \sum_m \varphi_m(\mathbf{b}) e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}_{m,l} + \xi_{m,l}))} \end{aligned}$$

finalement

$$F(\mathbf{a}) = \sum_m \int_{\infty} \sum_l e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}_{m,l} + \xi_{m,l}))} \varphi_m(\mathbf{b}) e^{2\pi i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} dv_b$$

Mais on a

$$e^{-2\pi i (\mathbf{b} \cdot \xi_m)} \sin 2\pi (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{ml} - vt) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(2\pi \mathbf{b} \cdot \xi_m) e^{-2\pi i n (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{ml} - vt)}$$

J_n étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n . Il vient alors

$$F(\mathbf{a}) = \sum_n \sum_m \int_{\infty} \sum_l J_n(2\pi \mathbf{b} \cdot \xi_m) e^{-2\pi i [(\mathbf{b} + n\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_{ml} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}]} \varphi_m(\mathbf{b}) e^{2\pi i n vt} dv_b \quad (2)$$

ou en posant $\mathbf{b} + n\mathbf{k} = \mathbf{b}'$:

$$F(\mathbf{a}) = \sum_n \sum_m \int_{\infty} \sum_l J_n(2\pi (\mathbf{b}' - n\mathbf{k}) \cdot \xi_m) e^{-2\pi i \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a}_{ml}} e^{2\pi i (\mathbf{b}' - n\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}} \varphi_m(\mathbf{b}' - n\mathbf{k}) e^{2\pi i n vt} dv_b$$

Appliquant alors le théorème (1), on a

$$F(\mathbf{a}) = \sum_h \sum_n \sum_m v_b J_n(2\pi (\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) \cdot \xi_m) e^{-2\pi i \mathbf{b}_h \cdot \mathbf{e}_m} \varphi_m(\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) e^{2\pi i (\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}} e^{2\pi i n vt} \quad (3)$$

Dans le réseau de Fourier correspondant à (3), il y a donc tout d'abord les points \mathbf{b}_h du réseau non perturbé dont les facteurs de structure $F_{h,0}$ sont

$$F_{h,0} = \sum_m v_b J_0(2\pi \mathbf{b}_h \cdot \xi_m) \varphi_m(\mathbf{b}_h) e^{-2\pi i \mathbf{b}_h \cdot \mathbf{e}_m}$$

Si les ondes avaient de petites amplitudes ($(\xi_m \mathbf{b}_h) \ll 1$), on aurait donc

$$F_{h,0} = \sum_m v_b \varphi_m(\mathbf{b}_h) e^{-2\pi i \mathbf{b}_h \mathbf{e}_m}$$

ce qui est bien le résultat que nous avons obtenu dans l'article précédent. De plus, il y a dans le réseau de Fourier des points à distance $n\mathbf{k}$ de chaque point \mathbf{b}_h avec des facteurs de structure $F_{h,n}$ proportionnels à $J_{-n}(2\pi(\mathbf{b}_h + n\mathbf{k})\xi_m)$. Si de nouveau on garde uniquement les termes du premier ordre en $(\mathbf{b}_h \xi_m)$, on trouve que seuls les points $n = \pm 1$ ont des facteurs non négligeables.

Si, par contre, les amplitudes ξ sont grandes par rapport à la dimension de la maille, l'onde donne naissance à un grand nombre de points nouveaux, dont les facteurs de structure sont

$$F_{h,n} = \sum_m v_b J_n(2\pi(\mathbf{b}_h - n\mathbf{k})\xi_m) \varphi_m(\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) e^{-2\pi i \mathbf{b}_h \mathbf{e}_m}$$

L'onde produit donc non seulement des stratifications d'épaisseur $\frac{1}{k}$ mais encore des stratifications d'épaisseur deux fois, trois fois, etc., plus petite. En plus, il y a évidemment des stratifications d'épaisseur $1/|\mathbf{b}_h + n\mathbf{k}|$. On peut donc imaginer que, même si k est très petit par rapport à b (grandes longueurs d'ondes qui permettent d'obtenir de grandes amplitudes), les rayons X pourront se réfléchir sur ces stratifications d'ordre $|\mathbf{b}_h + n\mathbf{k}|$ et donner un étalement de la diffraction. Mais ces ondes de grandes amplitudes, excitées piezoélectriquement par exemple, sont en général des ondes stationnaires. Or, l'effet de deux ondes superposées dans le réseau de Fourier n'est pas donné par la superposition des réseaux de Fourier de chaque onde considérée séparément. Il nous faut donc étudier les ondes stationnaires.

3. Ondes stationnaires.

Supposons qu'on ait deux ondes se propageant en sens inverses et de même fréquence

$$\xi \sin 2\pi((\mathbf{k} \mathbf{a}_{ml}) - \nu t) \quad \text{et} \quad \xi \sin 2\pi((\mathbf{k} \mathbf{a}_{ml}) + \nu t)$$

qui déplacent tous les atomes de la même manière, ce qui est toujours vrai pour des ondes de grandes longueurs d'ondes. On obtient alors

$$\begin{aligned} & e^{-2\pi i (\mathbf{b} \xi)} [\sin 2\pi(\mathbf{k} \mathbf{a}_{ml} - \nu t) + \sin 2\pi(\mathbf{k} \mathbf{a}_{ml} + \nu t)] \\ &= \sum_q \sum_p J_q(2\pi \mathbf{b} \xi) J_p(2\pi \mathbf{b} \xi) e^{-2\pi i [(q+p) \mathbf{k} \mathbf{a}_{ml} + (p-q) \nu t]} \end{aligned}$$

et, au lieu de (2), on a

$$F(\mathbf{a}) = \sum_q \sum_p \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \sum_l J_q J_p e^{-2\pi i ((q+p)\mathbf{k} + \mathbf{b}) \mathbf{a}_{ml}} e^{2\pi i \mathbf{b} \mathbf{a}} \varphi_m(\mathbf{b}) e^{-2\pi i (p-q) \nu t} d\nu_b$$

En posant $(q-p)\mathbf{k} + \mathbf{b} = \mathbf{b}'$ et en appliquant le théorème (1) on trouve

$$F(\mathbf{a}) = \sum_h \sum_n \sum_p \sum_m v_b J_p(x) J_{n-p}(x) e^{-2\pi i (2p-n) \nu t} \varphi_m(\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) e^{-2\pi i \mathbf{b}_h \mathbf{a}_m} e^{2\pi i (\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) \mathbf{x}} \quad (4)$$

avec

$$x = 2\pi((\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) \cdot \xi)$$

ou, pour le facteur de structure du point $\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}$

$$F_{h,-n} = \sum_p J_p(x) J_{n-p}(x) \sum_m \varphi_m(\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) e^{-2\pi i \mathbf{b}_h \mathbf{a}_m} v_b$$

La présence, dans (4), du terme contenant le temps, montre l'effet Doppler et l'on voit que les rayons X diffractés au point $(h, -n)$ seront formés d'ondes de différentes fréquences. Car, en effet, toute la théorie est basée sur le fait qu'une onde de rayons X incidente de vecteur \mathbf{s}_0 est diffractée par le point $(h, -n)$ donnant une onde de vecteur $\mathbf{s}_0 + \mathbf{b}_h - n\mathbf{k}$. Et cette règle d'addition joue aussi pour les fréquences, l'onde diffractée ayant une fréquence $\omega + \nu$ si ω est la fréquence de l'onde incidente et ν la fréquence associée au point $(h, -n)$ du réseau de Fourier. Cela a été démontré expérimentalement dans la diffraction de la lumière par les ultrasons¹⁾ et l'on a introduit²⁾ à cette occasion la notion du réseau de Fourier dynamique. Dans le cas qui nous occupe ici, il faudra tenir compte du fait que les différentes ondes diffractées en un même point $(h, -n)$ ne peuvent donc pas interférer et, pour calculer l'intensité totale diffractée, il faudra prendre la somme des carrés des termes formant le facteur de structure du point et non pas le carré de la somme. En supposant que les fréquences $(2p-n)\nu$ sont toujours négligeables par rapport à la fréquence ω des rayons X et en posant

$$\varphi_m(\mathbf{b}_h - n\mathbf{k}) \cong \varphi_m(\mathbf{b}_h)$$

on trouve donc

$$F_{h,-n}^2 = F_h^2 \sum_p J_p^2(x) J_{n-p}^2(x)$$

où

$$F_h^2 = \sum_m v_b \varphi_m(\mathbf{b}_h) e^{-2\pi i \mathbf{b}_h \mathbf{a}_m}$$

¹⁾ R. BÄR, Helv. Phys. Acta **8**, 592, 1935.

²⁾ R. EXTERMAN, Helv. Phys. Acta., **10**, 185, 1937.

est le facteur de structure du point h dans le réseau non perturbé. Remarquons qu'en faisant la somme des intensités des ondes associées au point h , on trouve

$$F_h^2 \sum_n \sum_p J_p^2(x) J_{n-p}^2(x) = F_h^2$$

ce qui montre que l'intensité totale diffractée n'est pas influencée par la présence des ondes.

Nous avons représenté schématiquement, dans la figure (1), le réseau de Fourier correspondant à (4) et, dans la table 1, nous avons donné les valeurs de $F_{h,n}^2/F_h^2$ en fonction de x .

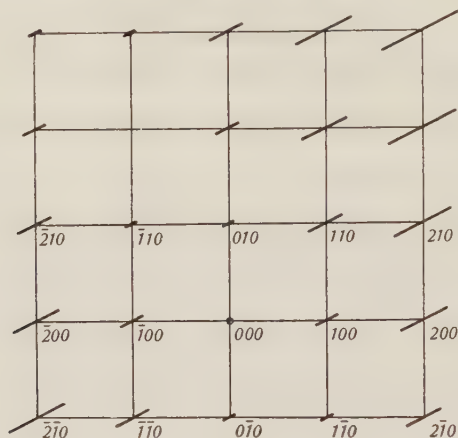


Fig. 1.

Réseau de Fourier d'un cristal cubique parcouru par une onde stationnaire longitudinale ayant la direction (210). Les points du réseau non perturbé se sont étalés et forment des droites sur lesquelles le facteur de structure est à peu près constant. (On remarquera que l'étalement est constant dans un plan perpendiculaire à la direction de vibration pour lequel $(b\xi)$ est constant.) L'étalement représenté dans la figure est fortement exagéré. En effet, si le cristal avait une constante réticulaire de $3,33 \cdot 10^{-8}$ cm., et était parcouru par des ondes élastiques de 0,1 mm. de longueur d'onde, il faudrait que celles-ci aient une amplitude de $2,57 \cdot 10^{-4}$ cm. pour obtenir l'étalement donné. Aucun cristal ne pourrait mécaniquement supporter les tensions qui résulteraient d'ondes d'amplitude aussi grande.

Table 1.

Valeurs de $F_{h,n}^2/F_h^2$ en fonction de $x = 2\pi(b_h\xi)$

$x \backslash h$	0	1	2	3
0,1	0,990	0,005	—	—
0,2	0,960	0,020	—	—
0,5	0,779	0,104	0,006	—
1	0,380	0,236	0,054	—
5	0,059	0,143	0,128	0,094

h	$x = 5$	h	$x = 5$
4	0,107	9	0,051
5	0,082	10	0,021
6	0,069	11	0,006
7	0,090	12	0,001
8	0,084	13	—

Pour des valeurs de x supérieures à l'unité, on trouve en première approximation que, pour $n > 2x$, les valeurs de $F_{h,n}^2/F_2^h$ sont négligeables et que, pour $-2x < n < +2x$

$$\frac{F_{h,n}^2}{F_h^2} \approx \frac{1}{8\pi(\mathbf{b}_h\xi)}$$

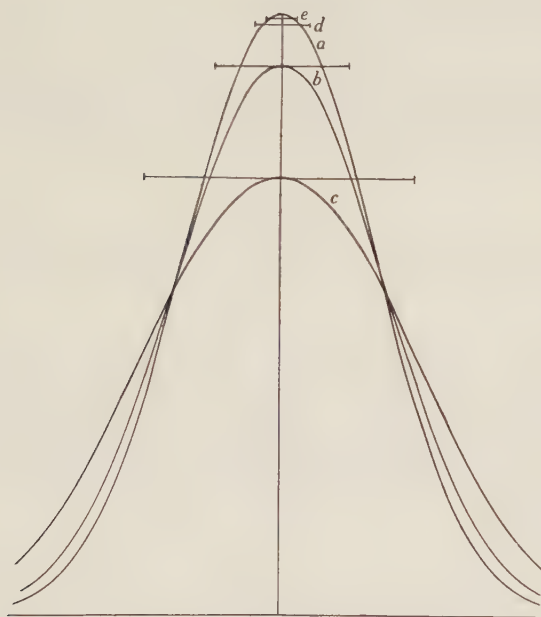


Fig. 2.

Influence de l'étalement des points du réseau de Fourier sur la largeur d'une raie spectrale.

La courbe a représente la raie dans le réseau non perturbé. Nous lui avons donné arbitrairement une forme e^{-x^2} . La raie b serait celle due à l'étalement marqué par la ligne horizontale tracée au sommet de la courbe. De même pour la raie c . Nous avons marqué en plus l'intensité maximum pour deux étalements plus petits e et d . On remarquera que l'effet n'est pas proportionnel à l'étalement, mais qu'il augmente plus rapidement que celui-ci. Si la raie représentée avait une longueur d'onde de $1 \cdot 10^{-8}$ cm. et une largeur de $5 \cdot 10^{-11}$ cm. et qu'elle soit réfléchiée sur un plan dont la distance réticulaire soit de $2 \cdot 10^{-8}$ cm., la courbe b serait due à des ondes dont $\xi k = 4 \cdot 10^{-5}$. C'est-à-dire que, pour des ondes élastiques de 0,1 mm. de longueur d'onde, il faudrait que l'amplitude ξ soit de $4 \cdot 10^{-7}$ cm.

Par conséquent, les points du réseau de Fourier s'étendent autour du point non perturbé sur une longueur comprise entre

$$-4\pi(\mathbf{b}_h\xi)k \quad \text{et} \quad +4\pi(\mathbf{b}_h\xi)k$$

et, dans cette région, ils ont une amplitude à peu près constante, égale à F_h^2 divisé par le nombre des points supplémentaires. On voit que si deux ondes de même direction mais de différentes longueurs d'onde k_1 et k_2 ont des amplitudes ξ_1 et ξ_2 telles que

$$\xi_1 k_1 = \xi_2 k_2 \quad (5)$$

leur effet sur le réseau de Fourier sera approximativement le même : l'étalement du point non perturbé aura la même valeur, bien qu'il soit réalisé dans les deux cas par un nombre de points supplémentaires différent. Ainsi deux ondes ayant la même énergie, c'est-à-dire vérifiant la relation (5), donnent le même effet dans le réseau de Fourier.

APPENDICE

Nous nous proposons de montrer tout d'abord que

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ \lim N \rightarrow \infty}}^{+N} e^{-2\pi i n x} f(x) dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) \quad (m \text{ et } n \text{ entiers})$$

pour toute fonction $f(x)$ développable en intégrale de Fourier et dont la somme $f(m)$ existe. Pour cela, nous utiliserons la relation fondamentale²⁾

$$(2) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\sin \lambda x}{x} f(x) dx = f(0) \quad (\text{pour } a > 0)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty}$$

Prouvons tout d'abord que

$$(3) \quad \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \sum_{\substack{n=-N \\ \lim N \rightarrow \infty}}^{+N} e^{-2\pi i n x} f(x) dx = f(m)$$

car, si cela est vrai, (1) est évidemment vérifiée.

Or, on a

$$(4) \quad \sum_{n=-N}^{N-1} e^{-2\pi i n x} = 2 \frac{\sin 2\pi N x}{2\pi x} h(x)$$

$$\text{avec} \quad h(x) = \frac{2\pi i x}{1 - e^{-2\pi i x}} \quad \text{et donc } h(0) = 1.$$

²⁾ par ex. TITCHMARSH, Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1937, p. 25.

En introduisant (4) dans (3), on a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{-N}^{+N} e^{-2\pi i n x} f(x+m) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2\pi i N x} f(x+m) dx \\ + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 2 \frac{\sin 2\pi N x}{2\pi x} h(x) f(x+m) dx$$

La première intégrale est nulle pour $N \rightarrow \infty$ (elle a en effet la forme d'un coefficient de Fourier); la seconde intégrale donne, avec la substitution $x' = 2\pi x$ et en employant (2)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\pi} \frac{\sin N x'}{x'} h\left(\frac{x'}{2\pi}\right) f\left(\frac{x'}{2\pi} + m\right) dx = h(0) f(0+m) = f(m)$$

C'est bien là ce que nous désirions montrer.

Généralisons maintenant ce résultat pour trois dimensions avec des axes non orthogonaux. Les trois vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ définissent les axes en direction et les unités de longueurs sur ceux-ci.

Les vecteurs

$$\mathbf{a}_i = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3 \quad (l_1, l_2, l_3 \text{ entiers})$$

définissent un réseau de points. A ces vecteurs on peut faire correspondre des vecteurs réciproques $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ choisis de façon à satisfaire

$$(\mathbf{b}_i \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$$

Sur les vecteurs \mathbf{b}_i on peut aussi construire un réseau (le réseau de Fourier) avec

$$\mathbf{b}_h = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3 \quad (h_1, h_2, h_3 \text{ entiers}).$$

Nous désirons calculer l'intégrale triple prise sur tout l'espace b

$$I = \int \int \int_{\substack{l_1=-N_1 \\ \lim N_i \rightarrow \infty}}^{N_1} \sum_{l=-N_2}^{N_2} \sum_{l_3=-N_3}^{N_3} e^{-2\pi i (\mathbf{b} \mathbf{a}_l)} f(\mathbf{b}) dv_b \quad (5)$$

En posant

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3$$

on a

$$dv_b = (\mathbf{b}_1 [\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]) d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 = v_b d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3$$

et l'on peut écrire

$$I = v_b \int \int \int \sum_{l_1} \sum_{l_2} \sum_{l_3} e^{-2\pi i (l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 + l_3 \beta_3)} f(\mathbf{b}) d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3$$

En intégrant tout d'abord sur β_1 , en laissant les paramètres β_2 et β_3 constants, on peut appliquer (1) et l'on trouve

$$\sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} v_b \int \int \sum_{l_2} \sum_{l_3} e^{-2\pi i (l_2 \beta_2 + l_3 \beta_3)} f(h_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3) d\beta_2 d\beta_3$$

et, procédant de même pour β_1 , puis pour β_3 , la valeur de (5) devient

$$I = v_b \sum_{h_1} \sum_{h_2} \sum_{h_3} f(h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3) \quad (6)$$

Cette formule est la généralisation de (1).

Institut de Physique, Université de Genève.

Anomalie de la chaleur spécifique du chlorure d'ammonium

par Richard Extermann et Jean Weigle.

(9. VI. 1942.)

On sait que plusieurs propriétés physiques du NH_4Cl présentent une variation rapide dans un intervalle étroit de température autour de $-30,5^\circ \text{C}$. L'anomalie de la chaleur spécifique en particulier a donné lieu à plusieurs travaux. Les mesures publiées jusqu'ici ont été faites sur du sel pulvérisé; ayant mis au point une méthode permettant de produire des cristaux de NH_4Cl , nous avons entrepris l'étude de la chaleur spécifique sur ces spécimens.

Le calorimètre que nous avons utilisé est représenté schématiquement par la fig. 1.

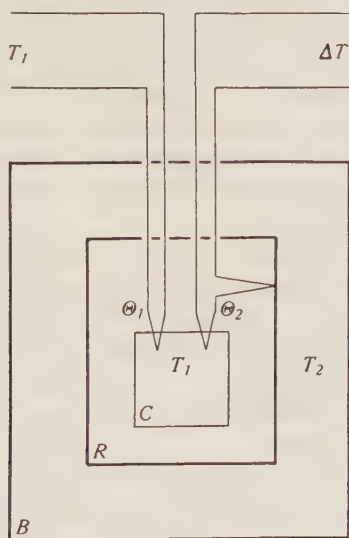


Fig. 1.

Principe du calorimètre.

C = cristal étudié, température T_1 . R = récipient de cuivre. B - bain d'alcool dont la température T_2 peut être variée à volonté. Θ_1 - couple thermo-électrique mesurant la température T_1 . Θ_2 = couple thermo-électrique mesurant la différence $\Delta T = T_2 - T_1$.

Le principe de la mesure est le suivant: on maintient entre le cristal et l'enceinte de cuivre une différence de température ΔT

constante, en faisant varier la température T_2 du bain. Si le bain est plus froid que le cristal ($\Delta T < 0$), le cristal cède de la chaleur et on doit refroidir constamment le bain pour maintenir ΔT constant. Dans le cas contraire ($\Delta T > 0$), le cristal absorbe de la chaleur et on doit chauffer le bain. ΔT étant constant, la quantité d'énergie échangée par seconde entre le cristal et le calorimètre est constante. Si le calorimètre est bien isolé, le cristal ne peut recevoir de chaleur provenant d'ailleurs que du bain (on s'en assure en vérifiant que la température du cristal reste stationnaire quand $\Delta T = 0$) et l'énergie reçue par le cristal croît linéairement avec le temps: en notant le temps mis par le cristal pour passer d'une température initiale T_0 à une température T , on a donc une mesure de la différence d'énergie du cristal à ces deux températures: $|A(T) - A(T_0)|$. La dérivée de $A(T)$ est la chaleur spécifique à pression constante.

La construction du calorimètre présente encore quelques particularités qui n'apparaissent pas sur la figure. Une pompe réduit la pression dans le récipient R à quelques dixièmes de mm Hg pour éviter la condensation d'eau aux basses températures; le bain B est refroidi par une circulation continue d'acétone provenant d'un réservoir contenant du CO_2 solide, il est réchauffé d'autre part par un courant électrique traversant une résistance immergée: le courant est commandé (manuellement ou automatiquement) de façon à maintenir constante la différence de température ΔT indiquée par le couple Θ_2 .

L'appareil ainsi décrit ne permet que des mesures relatives; pour obtenir la valeur absolue de la chaleur spécifique, nous avons étudié successivement deux cristaux de même taille, l'un de NaCl (dont la chaleur spécifique est connue et ne présente pas d'anomalie), l'autre de NH_4Cl . Les résultats ainsi obtenus concordent avec ceux de SIMON, von SIMSON et RUHEMANN¹⁾, dans la limite de la précision des mesures.

Celle-ci dépend théoriquement de la mesure du temps, de la mesure de la température, et de la constance de l'apport d'énergie au cristal. Pratiquement ce n'est que cette dernière condition qui détermine la précision des résultats. Comme nous l'avons dit plus haut, si le calorimètre est bien isolé, l'apport de chaleur est nul lorsque le cristal et le bain ont la même température; dans ces conditions la précision des mesures est celle à laquelle on maintient ΔT constant. Dans les expériences dont nous rendons compte ici, ΔT a

¹⁾ F. SIMON, CL. v. SIMSON, M. RUHEMANN, Zeits. f. phys. Chemie **A** 129, 339, (1927).

été maintenu à $\pm 0,5\%$ de la valeur moyenne et effectivement, lors des mesures de contrôle effectuées sur un cristal de NaCl, les écarts des mesures de la chaleur spécifique ne dépassent pas $\pm 0,5\%$. L'erreur sur la moyenne des mesures faites dans un intervalle d'un degré (5 à 10 mesures) est au plus de 2% .

A. Résultats.

Nous publions ici les résultats de mesures effectuées sur six cristaux de NH_4Cl . Les dimensions de ces cristaux étaient à peu près identiques (parallélépipèdes de $1,5 \times 1,5 \times 0,5$ cm). Les valeurs absolues des chaleurs spécifiques mesurées varient légèrement d'un cristal à l'autre (l'étalonnage du calorimètre n'ayant pas été répété pour tous les échantillons étudiés). En outre tous les cristaux ont montré une chaleur spécifique plus petite lors du premier refroidissement qu'au cours des traitements ultérieurs. Ce comportement peut s'expliquer si on admet que le cristal, initialement par-

Table 1.

Chaleur spécifique du NH_4Cl entre -25 et -45 °C.

Température (°C)	Chaleur spécifique c_p (cal/gr)
-25	0,35
-26	0,35
-27	0,35
-28	0,35
-29	0,35
-29,5	0,35
—	—
-31,5	0,75
-32	0,66
-33	0,57
-34	0,52
-35	0,50
-36	0,47
-37	0,45
-38	0,44
-39	0,42
-40	0,41
-41	0,40
-42	0,39
-43	0,39
-44	0,38
-45	0,38

fait, prend par suite de la transformation une structure mosaïque, il ne cède donc pas toute la chaleur de transformation normale, mais en garde une partie pour le travail de « démolition ». Les différences constatées sont cependant trop petites pour qu'on puisse évaluer exactement la grandeur de ce travail.

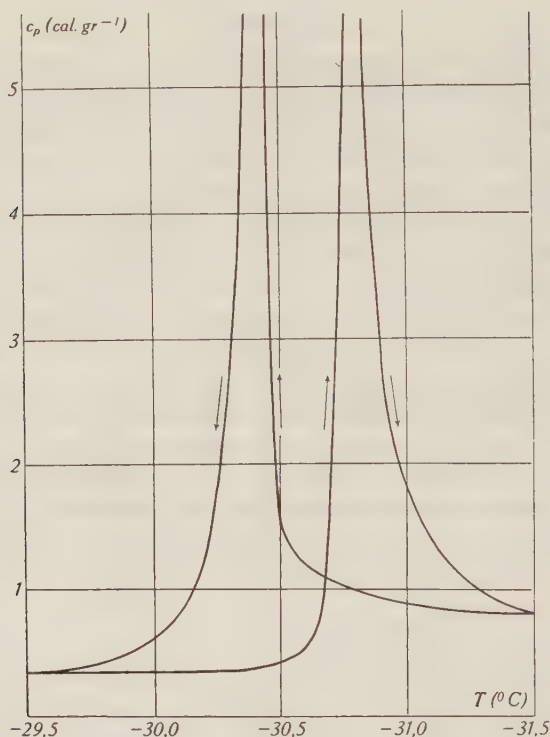


Fig. 2.

Chaleur spécifique c_p au voisinage de la température de transformation.

La table 1 et la figure 2 indiquent les valeurs moyennes des chaleurs spécifiques pour les différents cristaux étudiés. Comme notre but n'était pas de déterminer exactement la valeur absolue de c_p , ces résultats ne sont donnés qu'avec une précision inférieure à la précision relative des mesures. Il faut noter aussi que le couple thermo-électrique mesure les différences de température avec plus de précision que les valeurs absolues, qui ne sont déterminées qu'à quelques dixièmes de degré près. Ces deux facteurs n'affectent cependant pas la forme des courbes publiées.

La figure 3 montre l'allure de l'énergie du cristal (plus rigoureusement l'enthalpie) en fonction de la température. Cette courbe

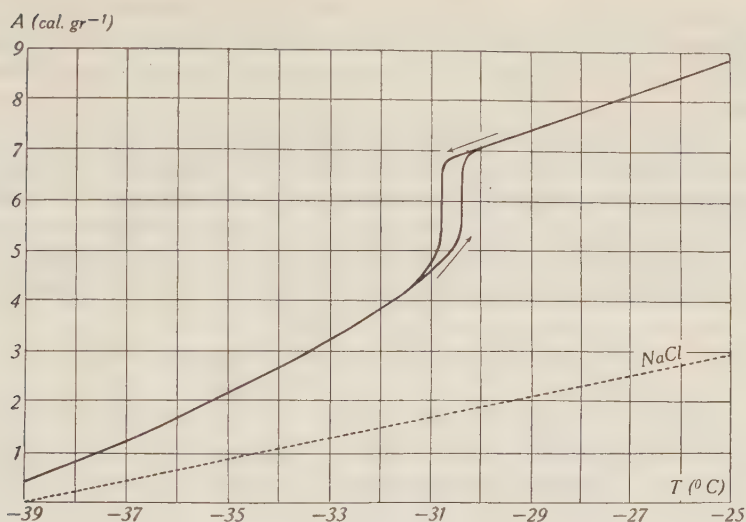


Fig. 3.

Energie interne du NH_4Cl entre -39 et -25°C .

La courbe correspondante pour le NaCl est indiquée en pointillé.

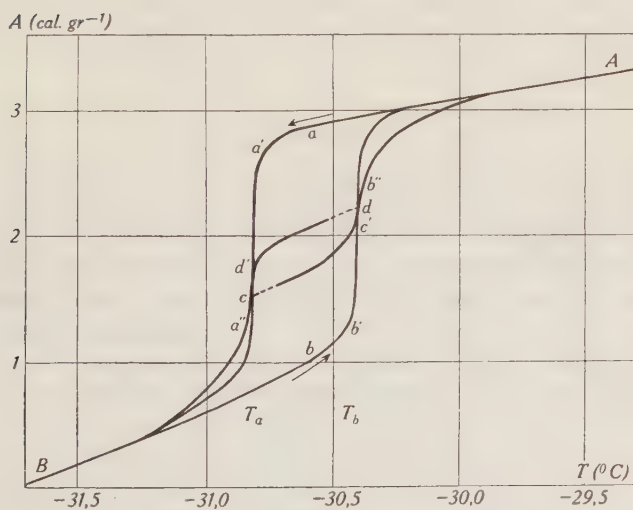


Fig. 4.

Hystérèse de l'énergie interne du NH_4Cl .

présente une hystérèse analogue à celle de la dilatation étudiée par SMITS et MAC GILLAVRY¹⁾; la figure 4 rend compte de quelques mesures entreprises pour préciser certains aspects de ce phénomène.

Partant du point *A*, situé en dessus de la transformation, on peut parcourir la courbe de refroidissement jusqu'en *a*, puis, en changeant brusquement le signe de ΔT , parcourir la même courbe en sens inverse. On retrouve encore la même courbe lorsque le cristal a été maintenu plus d'une heure au point *a*. Aucune transformation ne se produit donc avant le point *a*. Le passage *a'a''*

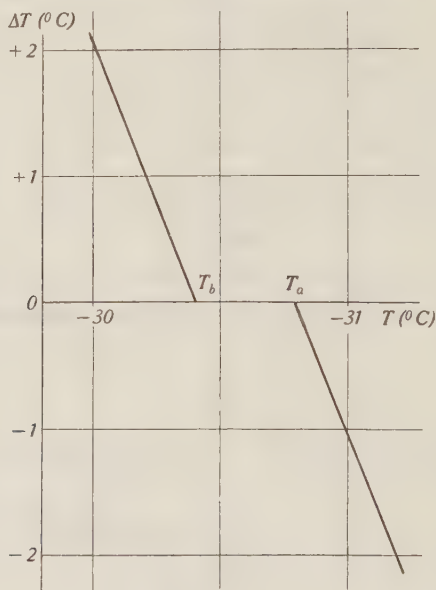


Fig. 5.

Variation de la température de transformation avec la vitesse de transformation.

s'effectue à la température T_b' . T_a' et T_b' varient légèrement avec la vitesse de transformation, on obtient toutefois par extrapolation pour une vitesse de transformation nulle deux limites T_a et T_b non confondues (fig. 5), l'hystérèse n'est donc pas une illusion créée par une vitesse de transformation spontanée très petite. Cette conclusion est confirmée par l'absence déjà relevée de transformation aux points *a* et *b*. Comme cela a été noté plus haut, les températures T_1 et T_2 ne sont pas connues en valeur absolue avec la même précision que la différence $T_b - T_a$, ici encore c'est cette dernière valeur qui est importante pour caractériser le phénomène.

¹⁾ A. SMITS et C. H. MACGILLAVRY, Zeits. f. phys. Chemie, **A 166**, 97, 1933.

On pourrait en principe effectuer la transformation à une vitesse presque nulle en choisissant une valeur de ΔT très petite, on obtiendrait ainsi directement la courbe exacte avec la transformation à une température T_a' ou T_b' pratiquement confondue avec T_a ou T_b . Cependant il est préférable de prendre une valeur de ΔT plus grande pour maintenir la durée de l'expérience dans des limites commodes, quitte ensuite à corriger les valeurs obtenues pour les réduire au cas limite $\Delta T = 0$. Avec la plus petite des valeurs de ΔT utilisée pour établir la figure 5 la transformation $a'a''$ aurait duré environ 15 heures, avec la valeur généralement employée pour les mesures elle durait un peu moins d'une heure.

On peut renverser le sens de ΔT pendant la transformation $a'a''$, le cristal se réchauffe alors jusqu'à la température T_b en suivant la courbe cc' dont la pente semble intermédiaire entre celle de Bb' et celle de Aa' , ensuite le point représentatif suit une courbe de réchauffement dont le coude supérieur est d'autant plus brusque qu'on a transformé moins de substance. De même on peut renverser ΔT pendant la transformation $b'b''$, le cristal suit une courbe dd' puis se transforme à la température T_a .

Il est difficile de donner une interprétation théorique du phénomène d'hystérèse en se basant uniquement sur des mesures de la chaleur spécifique. C'est pourquoi d'autres méthodes d'investigation ont été employées dans ce laboratoire pour l'étude du même problème (analyse aux rayons X, mesure de la constante diélectrique). La comparaison des résultats de ces travaux fera l'objet d'un prochain article.

Résumé.

La chaleur spécifique de cristaux de NH_4Cl a été étudiée autour du point de transformation au voisinage de -30°C . Les résultats sont en bon accord avec ceux de SIMON, von SIMSON et RUHEMANN. En outre un phénomène d'hystérèse de l'énergie du cristal analogue à l'hystérèse de la dilatation a été mis en évidence et étudié plus spécialement.

Institut de Physique de l'Université de Genève.

La transformation du NH_4Cl observée par la diffraction des rayons X

par Paul Dinichert.

(6. VI. 1942.)

A. Introduction.

Résumé. La transformation du NH_4Cl à basse température est observée sur un cristal unique par la réflexion des rayons X sur le plan (024). On constate une coexistence de deux modifications sur un intervalle d'environ 3° . La proportion de ces deux formes cristallines et la variation de leur constante réticulaire (qui n'est pas la même en abaissant et en élevant la température) est déterminée par des mesures de l'intensité et du déplacement des raies provenant de chacun des deux réseaux. La transformation est irréversible. En outre, une observation de la structure de la surface du cristal, à la transformation, permet de tirer des conclusions sur la façon dont celle-ci s'effectue.

De nombreuses recherches¹⁾, qui ont porté sur la chaleur spécifique, la dilatation, la densité, la constante diélectrique, les propriétés optiques et élastiques, et faites par des procédés divers, ont démontré que les cristaux de NH_4Cl , de symétrie cubique, subissent, à environ -30° , une transformation. La plupart de ces mesures étant macroscopiques et effectuées sur des poudres cristallines, il nous a semblé intéressant d'étudier, sur un cristal unique, ce qui se passait au point de vue microscopique.

¹⁾ KLINKHARDT, Ann. Phys. (4) **84**, 167, 1927. — SIMON, Ann. Phys. **68**, 241, 1922. — SIMON, SIMSON, RUHEMANN, Z. phys. Chem. **129**, 339, 1927. — WEIGLE, HUBER, C. R. Soc. phys. et hist. nat. Genève **51**, 150, 1934. — KETELAAR, Nature **134**, 250, 1934. — SIMON et BERGMANN, Z. phys. Chem. (B) **8**, 255, 1930. — SMITS, GILLAVRY, Z. phys. Chem. (A) **166**, 97, 1933. — SHULVAS-SOROKOMA, ZEVDOKIMOV, Techn. Phys. U.R.S.S. **5**, 473, 1938. — POHLMANN, Z. Phys. **79**, 394, 1932. — MENZIES, MILLS, Proc. R. Soc. (A), **148**, 407, 1935. — WILBERG, Z. phys. **64**, 304, 1930. — BRIDGMAN, Phys. Rev. **38**, 182, 1931. — LAWSON, Phys. Rev. **57**, 417, 1940.

B. Le dispositif expérimental.

Le dispositif expérimental était composé de 3 parties:

1° Le spectrographe à rayons X, dont le cristal était placé dans un bain maintenu à température constante à $0,02^\circ$ près.

2° Le contrôle de cette température.

3° Le dispositif permettant de mesurer la température exacte du cristal.

1. *Le spectrographe.*

a) Le cristal.

Nous avons choisi le plan (024) du cristal, qui réfléchissait les raies K_α du cuivre avec une intensité suffisante sous un angle de Bragg de 63° . Ce grand angle de diffraction nous donnait une dispersion telle que la mesure de la constante réticulaire pouvait être faite avec une grande précision.

Le cristal formant à peu près un cube de 1 cm. de côté avait été obtenu par un refroidissement lent d'une solution saturée contenant de l'urée. Nous le coupions pour obtenir que sa surface supérieure fût parallèle au plan (024). Il était ensuite collé sur un bloc métallique, qui permettait un échange rapide de la température entre lui et le bain, et dans lequel était placé le thermocouple servant à la mesure de la température. Les cristaux, finalement utilisés dans l'appareil, avaient un volume de 0,2 à 0,3 cm³.

b) Le spectrographe proprement dit.

On voit la disposition de cet appareil sur la fig. 1. Il était formé de deux tubes disposés en forme de V, l'un se terminant par une fente réglable, qui venait se placer à proximité du tube à rayons X, l'autre par un support pour la cassette contenant les films et soudés à un tube vertical dans lequel pouvait se mouvoir un bloc cylindrique de cuivre destiné à servir de support au cristal. La possibilité d'une translation de la surface du cristal sur la bissectrice de l'angle moyen entre le faisceau incident et le rayon réfléchi permettait de réaliser, de façon très précise, la condition de Bragg, après qu'on eût procédé à un premier réglage grossier par un déplacement de la fente de l'appareil par rapport au tube à rayons X. Ces mouvements verticaux étaient commandés par un écrou s'appuyant sur un support solidaire des tubes et entraînant le pas de vis terminant la tige de suspension du bloc de cuivre.

Pour des raisons que nous expliquerons plus tard, en relatant les expériences, nous dûmes, pour certaines mesures, faire osciller le cristal. A cet effet, il fut placé sur une petite bascule fixée au bloc de cuivre et pivotant autour d'un axe passant par sa surface. Nous réalisons ainsi, en ayant encore soin de mettre la fente et le film à égale distance du cristal, la condition de foca-

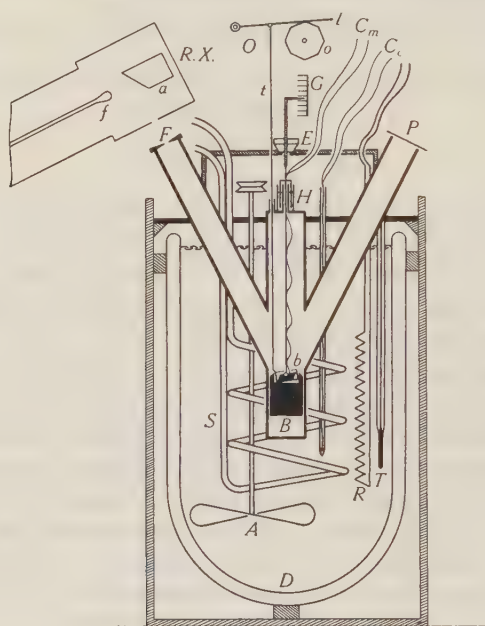


Fig. 1.

Le spectrographe.

D = Dewar contenant le bain d'alcool de refroidissement; *A* = Agitateur actionné par un moteur électrique; *S* = Spires de refroidissement; *T* = Thermomètre de contrôle; *R* = Corps de chauffe; *F* = Fente réglable; *P* = Film; *H* = Fermeture mobile à bain d'huile; *B* = Bloc de cuivre servant de support au cristal; *E* = Erou commandant les déplacements verticaux du bloc de cuivre; *G* = Graduation; *O* = Dispositif d'oscillation du cristal (le levier *l* de longueur réglable, actionné par l'octogone *o*, fait osciller, par l'intermédiaire de la tige *t*, la bascule *b* contenant le cristal); *C_m* = Thermocouple de mesure protégé et isolé par une gaine de matière isolante; *C_c* = Thermocouple de contrôle placé dans un tube de verre; *R. X.* = Tube à rayons X (avec le filament *f* et l'anticathode de Cu a).

lisation pour les rayons réfléchis par un cristal tournant. Une tige très mince, pour éviter un apport de chaleur de l'extérieur, fixée à la bascule, était actionnée par un mouvement d'horlogerie par l'intermédiaire d'un octogone faisant fonction de cames et d'un levier permettant d'en régler la course de telle façon que la

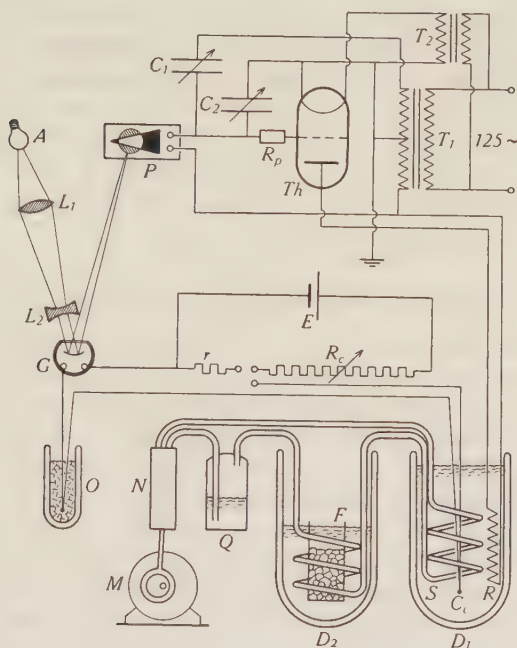


Fig. 2.

Schéma du dispositif de contrôle de la température.

A = Ampoule él. (110 bougies); L_1 = Lentille convergente; L_2 = Lentille divergente; G = Galvanomètre à miroir (résistance 450 ohms, sensibilité $0,7 \cdot 10^{-9}$ amp/mm); P = Cellule photoélectrique (Photopress P. 210, MG); Th = Thyatron (Westinghouse KU-627); R_p = Résistance de protection (0,06 megohms); C_1 = Condensateur variable pour l'adaptation de la résistance capacitive à la résistance ohmique de la cellule ($500 \mu\text{F}$); C_2 = Condensateur variable réglant la tension entre le filament et la grille ($500 \mu\text{F}$); T_1 = Transformateur fournissant la tension plaque ($-100, +100$ volts); T_2 = Transformateur pour le chauffage du filament (2,5 volts); E = Accumulateur (2 volts) du circuit de compensation de la force électromotrice du thermocouple; r = Résistance fixe (9,08 ohms); R_c = Boîtes de résistance (résist. de compensation); 0 = Point fixe 0° (Dewar contenant de la glace pilée); D_1 = Dewar contenant le bain de refroidissement du spectrographe; C_c = Soudure du thermocouple de contrôle; S = Spires de refroidissement; R = Corps de chauffe alimenté par le thyatron; D_2 = Dewar contenant le bain de refroidissement du liquide réfrigérant; F = Récipient en treillis métallique contenant la neige carbonique; Q = Bouteille permettant de contrôler le débit de la pompe; N = Pompe à débit réglable; M = Moteur actionnant la pompe.

surface du cristal fût constamment balayée par des rayons aptes à être réfléchis.

Le cristal étant soluble dans l'eau, il fallait éviter une altération de sa surface par de l'eau condensée pendant le refroidissement. Tout l'appareil était donc hermétiquement clos, soit par des fenêtres de cellophane à l'extrémité des tubes inclinés, soit — ainsi que cela ressort de la fig. 1 — par un tuyau souple de caoutchouc et par un petit système de gazomètre à bain d'huile qui assuraient leur mobilité aux deux tiges devant sortir par le couvercle du tube vertical.

2. *Le contrôle automatique de la température.*

Afin d'être maintenu à basse température, le spectrographe était placé dans un vase Dewar rempli d'alcool amené à peu près à la température voulue par un liquide réfrigérant, maintenu en circulation par une pompe à débit réglable et refroidi dans un autre Dewar contenant un mélange d'alcool et de neige carbonique (fig. 2). En réalité, ce refroidissement était irrégulier, de sorte que, pour obtenir une température constante, nous nous arrangions pour qu'il fût constamment un peu trop grand et nous le compensions alors par un courant de chauffage variable, commandé par un circuit-relai. Le système électro-optique utilisé était basé sur l'emploi d'un thyatron, contrôlé par le déphasage du potentiel de la plaque et de la grille, ce déphasage étant donné par le courant photo-électrique de la cellule (fig. 2).

Le corps de chauffe pouvait produire un échauffement de l'appareil d'environ $0,01^{\circ}$ en 3 secondes.

3. *La mesure de la température du cristal.*

La mesure de la température se faisait au moyen d'un thermocouple Cu-Constantan, dont la force électromotrice était compensée par celle d'un accumulateur, étalonnée chaque fois avec un élément Weston et réduite à la valeur voulue par un potentiomètre composé d'une petite résistance fixe et de boîtes à résistances. Une des soudures était maintenue à 0° , tandis que l'autre était placée directement sous le cristal. Dans le circuit du couple, toutes les précautions avaient été prises pour éviter des effets Peltier. Le schéma en est reproduit dans la fig. 3.

Nous nous sommes servis des deux points fixes de la glace et du mercure pour déterminer la force électromotrice du thermocouple, et nous avons, à l'aide de ces valeurs, corrigé celles données dans les tables internationales.

Comme nous n'avons pas pris de précautions spéciales, la valeur absolue de la température pouvait être entachée d'une erreur assez considérable, de sorte que, par la suite, nous avons ajusté nos températures de transformation à celles déterminées très exactement par d'autres auteurs.

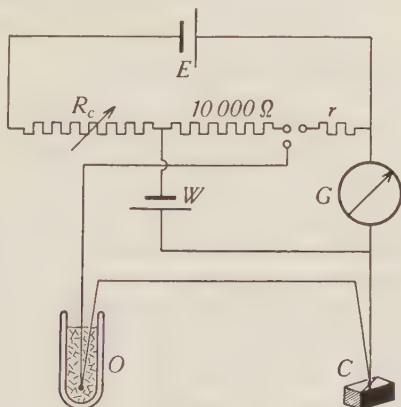


Fig. 3.

Circuit de mesure de la température.

E = Accumulateur (2 volts) du circuit de compensation de la force thermo-électrique du thermocouple; r = Résistance fixe (9,14 ohms); R_c = Boîtes de résistance (résist. de compensation); W — Élément Weston; G = Galvanomètre à miroir (résistance 40 ohms, sensibilité $0,5 \cdot 10^{-8}$. amp/mm); O = Point fixe 0° (Dewar contenant de la glace pilée); C = Cristal.

Par contre, les valeurs que nous obtenions pour de petits intervalles de température, étaient, elles, connues avec une très grande précision. Nous avons estimé que les erreurs expérimentales faites, provenant des résistances de compensation, des variations de la force électromotrice de l'accumulateur et des déficiences du réglage de la température, étaient de l'ordre de grandeur de $0,02^\circ$.

C. Les mesures.

1. Le mesurage des films.

Pour mesurer avec précision la position des raies K_{α_1} et K_{α_2} sur les films, position qui déterminait les dimensions de la maille cristalline, nous avons marqué des repères sur les films, par rapport auxquels on pouvait déterminer le déplacement des raies en fonction de la température, et cela de façon indépendante de la dilatation des films lors du développement.

Le mesurage des films s'effectuait au microphotomètre¹⁾, qui permettait de déterminer la position des raies à 0,05 mm. près (le déplacement des raies dû à la transformation correspondant à environ 1,5 mm.). Un certain nombre de photos qui avaient donné des résultats douteux ont été remesurées au comparateur.

2. Les calculs, la précision.

La constante réticulaire est donnée par

$$a = \frac{\lambda \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2}}{2 \sin \vartheta} = \frac{\lambda \sqrt{5}}{\sin \vartheta}, \quad (1)$$

pour le plan considéré.

Comme sur nos photos les raies K_{α_1} et K_{α_2} apparaissaient, nous avions la possibilité de déterminer a de deux façons différentes, ce qui donnait une certaine sécurité à nos résultats. Notre appareil ne se prêtant pas à une mesure directe de l'angle ϑ , nous l'avons calculé pour une température donnée en nous servant de la valeur $a = 3,8597 \text{ \AA}$ pour $-10,36^\circ$. Nous nous sommes alors contentés de trouver, par les mesures, les variations d'angle $\Delta\vartheta$ à partir de ce ϑ_0 calculé, et, au moyen de (1), les variations de la constante réticulaire. Nous sommes ainsi arrivés à déterminer celle-ci avec une erreur de 0,0002 Å, c'est-à-dire avec une précision de 1/20000.

D. Les résultats des expériences.

1. La dilatation du cristal avant, pendant et après la transformation.

Nous avons constaté que le fait d'avoir transformé une ou plusieurs fois le cristal ne modifiait en rien l'allure des transformations ultérieures. Toutefois, si la transformation a été rapide, les raies apparaissent parfois comme brisées même lorsqu'on est revenu à la température ordinaire (fig. 8b).

La fig. 4 représente les résultats obtenus pour un des cristaux examinés.

Les traits qui nous semblent être caractéristiques pour la transformation se retrouvent pour tous les cristaux:

1° A une certaine distance de la transformation, on observe une contraction ou une dilatation presque linéaire du réseau, quoique différente des deux côtés de la transformation. Cette différence du coefficient de dilatation montre bien qu'on a deux cristaux différents. Notons ici que le changement de structure se manifeste uniquement par une variation brusque de la constante

¹⁾ Microphotomètre de la Société Genevoise d'Instruments de Physique.

réticulaire, et non pas par un changement de la symétrie du cristal, que l'on puisse constater aux rayons X¹⁾.

2^o Près de la transformation, le coefficient de dilatation change de plus en plus rapidement, et cela de façon plus prononcée du côté des basses températures.

3^o Il y a une hystérèse très marquée dans le phénomène de la transformation.

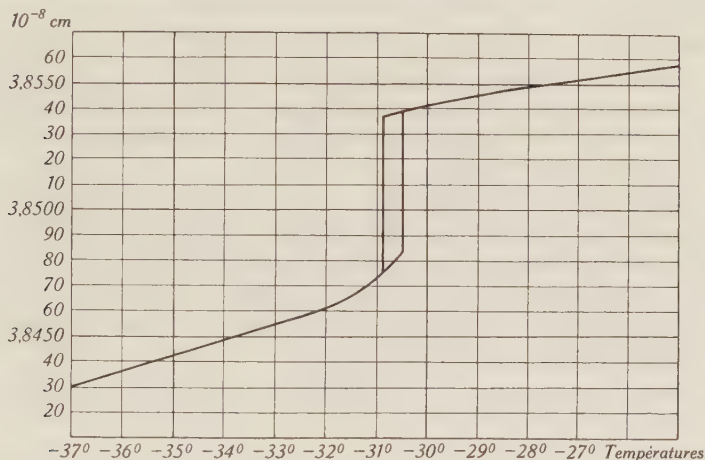


Fig. 4.

La constante réticulaire en fonction de la température aux abords de la transformation.

Par contre, certaines propriétés diffèrent légèrement d'un cristal à l'autre :

1^o Le saut de la constante réticulaire à la transformation n'est pas toujours le même (fig. 4 et 7). Il est de $0,0059 \pm 0,0003 \text{ \AA}$.

2^o La largeur de la boucle d'hystérèse varie de 0,25 à 0,4^o (fig. 4 et 7).

3^o La courbure des courbes aux abords de la transformation n'est pas absolument identique.

2. La coexistence de deux réseaux et l'irréversibilité de la transformation.

On observe sur de nombreuses photos (prises à des températures différentes) des raies provenant des réseaux existant au-dessus et au-dessous de la transformation (fig. 8c, d, e) et qui correspondent à ce que nous appellerons désormais la forme α et la forme β du cristal.

¹⁾ J. WEIGLE et F. HUBER, C. R. Soc. de phys. et d'hist. nat. Genève **51**, 151 (1934).

Pour montrer que les deux formes coexistent réellement et que la présence simultanée de leurs raies sur les photos n'était pas due à une variation accidentelle de la température, des photos s'échelonnant sur 6 heures ont été faites à température constante. Elles ne montraient aucun changement appréciable des raies tant au point de vue de leur intensité que de leur configuration, ce qui nous permit, au surplus, d'écarter la possibilité d'un équilibre qui ne s'établirait qu'au bout d'un certain temps.

Des mesures analogues, exécutées avec le cristal oscillant, qui permettaient d'observer sur chaque photo l'évolution de la transformation non pas seulement dans une toute petite région du cristal, mais sur toute sa surface, ne firent que confirmer les résultats obtenus précédemment.

Une autre série d'expériences démontra l'irréversibilité de la transformation. C'est-à-dire que celle-ci une fois commencée, une variation de la température en sens inverse ne modifie plus ni la configuration ni l'intensité des raies, et que ce n'est qu'après avoir dépassé la température extrême atteinte auparavant que la transformation continue à s'effectuer.

Remarquons ici que la température du cristal était certainement homogène à $0,01^{\circ}$ près.

3. La transformation.

a) La proportion des formes α et β .

Nous définissons le point critique de la transformation comme étant le point où les raies provenant des deux réseaux ont la même intensité, où donc les formes α et β existent en proportions égales.

Aux abords du point critique, le changement de structure du cristal est extrêmement sensible aux variations de température, tout en étant irréversible, et la soudaineté avec laquelle la majeure partie du cristal passe d'une forme à l'autre rend malaisée l'observation de ce phénomène. En outre, des mesures précises de la position et de l'intensité des raies sont rendues difficiles du fait que celles-ci deviennent plus floues et sont partiellement entrecoupées (fig. 8b, d). C'est ce dernier inconvénient qui nous amena à introduire le dispositif d'oscillation du cristal, par lequel nous obtenions une intégration de la surface. Le résultat ne fut cependant pas tout à fait celui que nous avions escompté: si les raies avaient indubitablement augmenté de netteté, elles n'en restaient pas moins discontinues (fig. 8e). Pour établir la proportion des deux formes, il fallut, en conséquence, évaluer la longueur et l'intensité de chacun des tronçons de raie appartenant à l'un ou

l'autre des deux réseaux. Les proportions ainsi obtenues pour environ 70 températures différentes fournirent la fig. 5.

La température à laquelle avait lieu l'apparition ou la disparition d'une forme du cristal ne pouvait, bien entendu, être déterminée que de façon approximative. Car, quoiqu'ayant en partie fortement surexposé nos films (fig. 8c), nous devons nous borner à constater qu'à un moment donné l'intensité des raies d'un des réseaux était certainement inférieure à un centième de

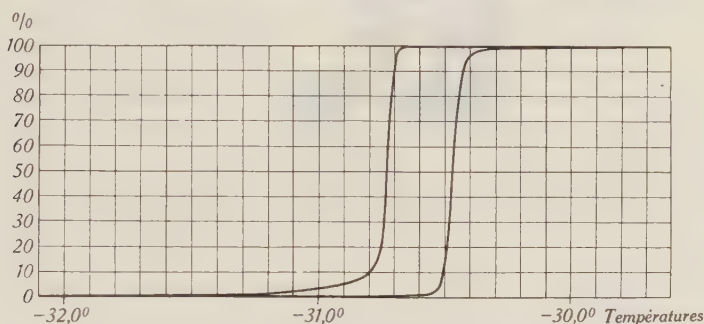


Fig. 5.

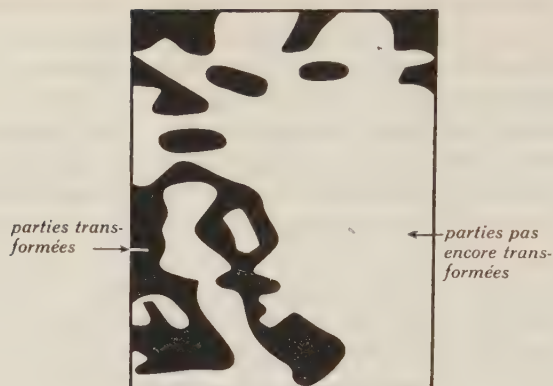
Proportion de la forme α du cristal pendant la transformation.

celle des raies de l'autre. C'est ainsi que nous observons, en abaissant la température, l'apparition brusque de la forme β à $-30,66^\circ$ et la disparition lente de la forme α vers -32° , tandis qu'en élevant de nouveau la température, la forme α réapparaissait extrêmement faible vers -32° également et que la forme β ne lui cédait entièrement la place qu'entre $-30,0^\circ$ et $-29,5^\circ$. Il y avait donc asymétrie dans la transformation parcourue dans un sens ou dans l'autre.

b) La structure de la surface.

Nous avons fait une étude plus complète de la surface du cristal au moment de la transformation (point critique) pour comprendre comment il se transformait. A cet effet, le cristal était maintenu à température constante. Il était immobile pendant les temps de pose, mais était tourné d'un angle déterminé pour chaque nouvelle photo, de sorte que chacune des quatre raies (fig. 8d) donnait chaque fois l'«image» d'un autre élément de la surface du cristal. En juxtaposant de façon convenable les 40 bandes obtenues au moyen d'une série de 10 photos, nous avons reconstitué la structure de la surface, que nous donnons dans la fig. 6.

Cette image donne une idée de l'ordre de grandeur des régions qui sont plus propices à la transformation; elle montre que celle-ci



Echelle 5:1

Fig. 6.

La structure de la surface du cristal au point critique.

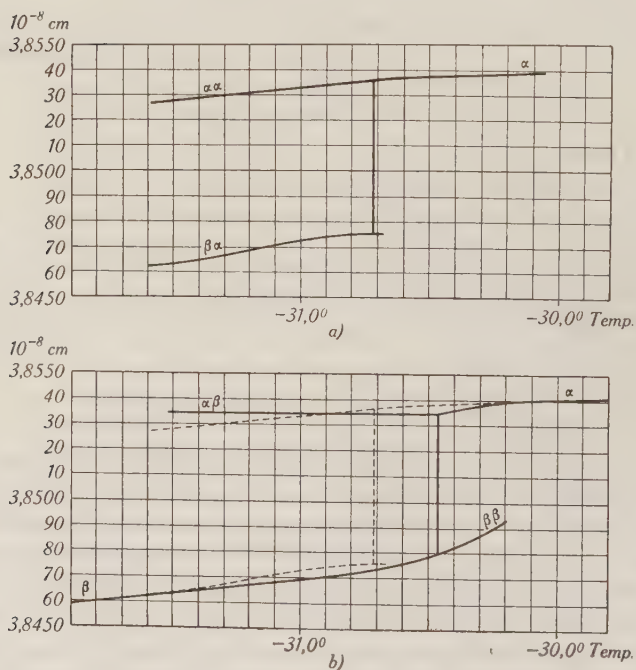


Fig. 7.

Les constantes réticulaires des formes α et β du cristal pendant la transformation.

a) En abaissant la température.

b) En élevant la température. (La courbe du graphique a) y est reportée en pointillé).

part plutôt d'un des bords et des angles de la surface, tout en pouvant alors progresser de façon quelconque vers l'intérieur, et que c'est, semble-t-il, tout un côté du cristal qui se maintient dans la forme qui est en train de disparaître.

c) La constante réticulaire.

Toutes les photos ayant servi à établir la proportion des formes α et β furent mesurées au microphotomètre et les résultats calculés à partir de ces données sont représentés graphiquement par les fig. 7a et b.

Nous observons dans ces figures les faits suivants:

1° La contraction ou la dilatation de la forme prépondérante du cristal cesse d'être presque linéaire (avant la transformation), ou ne le devient (après la transformation) qu'au moment où l'autre forme soit apparaît, soit disparaît (fig. 5).

2° La constante réticulaire des deux formes coexistantes n'est pas la même à une température donnée lorsque celle-ci a été atteinte par refroidissement ou par échauffement du cristal.

3° Une constance de la constante réticulaire de la forme α avant le point critique (marqué par la partie verticale de la courbe)

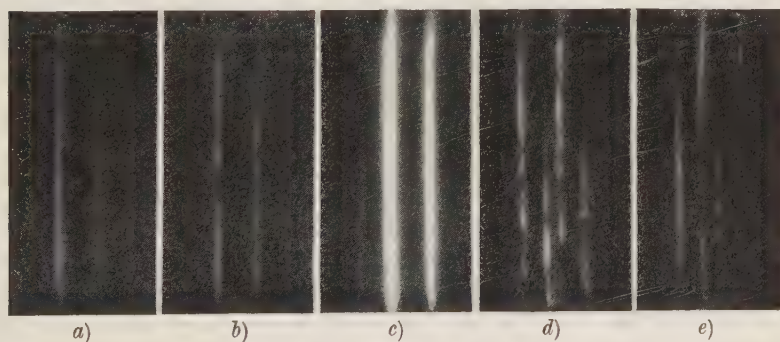


Fig. 8.

La configuration et l'intensité des raies. Agrandissement: environ $2\frac{1}{2}$ fois.

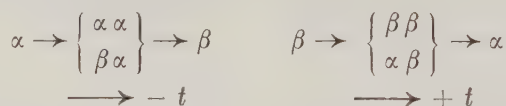
- a) Cristal n'ayant jamais été transformé (photo prise avec un cristal fixe à -30°). Les raies sont nettes.
- b) Cristal ayant été transformé 2 fois (photo prise avec le même cristal fixe à -25°). Les raies sont un peu irrégulières.
- c) Cristal à $-31,25^\circ$ (en abaissant la température). La raie K_{α_1} de la forme α est encore visible. (Cristal oscillant transformé plusieurs fois.)
- d) Cristal fixe au point critique. Les raies sont entrecoupées et floues.
- e) Cristal oscillant au point critique. Les raies sont plus nettes, mais n'ont pas la même intensité sur toute leur longueur.

lorsqu'on élève la température. Les points qui, dans la représentation graphique, décrivent son évolution, sont loin de venir se placer exactement sur une droite, mais se groupent cependant incontestablement des deux côtés d'une horizontale, les écarts atteignant jusqu'à 0,0005 Å.

E. Résultats et conclusions.

L'intervalle de température dans lequel la transformation se produit est donc d'environ 3°. Cet intervalle est caractérisé par deux faits, le premier étant la coexistence de deux sortes de cristaux, le second la dilatation anormale de ces deux cristaux. En effet, aussitôt que le second cristal apparaît, le cristal qui ne s'est pas encore transformé se dilate d'une façon différente; la variation de longueur de la maille avec la température, qui est linéaire en dehors de la transformation, ne l'est plus lorsque l'autre forme cristalline a fait son apparition. Le phénomène est du reste complexe puisque la dilatation des mailles α ou β dépend du sens dans lequel la transformation s'effectue.

Il semble alors nécessaire, pour décrire ce phénomène, d'introduire six sortes de cristaux dénotées par α , $\alpha\alpha$, $\beta\alpha$ et β , $\beta\beta$, $\alpha\beta$ (fig. 7). La phase α se transforme en deux variétés $\alpha\alpha$ et $\beta\alpha$ lorsqu'on abaisse la température; la forme $\alpha\alpha$ passant à $\beta\alpha$ et cette dernière se transformant finalement en β :



On pourrait concevoir ces formes intermédiaires comme dues à des états intermédiaires entre la rotation complète du groupe NH_4 et des oscillations de celui-ci autour de certains axes bien déterminés. Pour justifier cette supposition et mettre réellement en évidence la réalité des formes cristallines intermédiaires, d'autres expériences seraient nécessaires, comme par exemple l'étude aux rayons X non pas du seul plan (024) mais de tous les autres (DEBYE-SCHERRER). Toutefois, les expériences sur les chaleurs spécifiques¹⁾ semblent supporter notre hypothèse. En effet, les anomalies des chaleurs spécifiques s'étendent exactement dans la même région que les anomalies de dilatation. L'hystérèse se montre de la même façon. En plus, lors d'une transformation incomplète, disons dans le sens $\alpha \rightarrow \beta$ avec retour à la forme α , ce retour ne se fait pas de la même façon que si la transformation $\alpha \rightarrow \beta$ avait été complète

¹⁾ EXTERMANN et WEIGLE, *Helv. Phys. Acta* **15**, 455, 1942.

(voir fig. 6 de l'article cité). Nous expliquerions cet effet en disant que, lors de la transformation incomplète, la chaleur spécifique mesurée correspond au passage

$$\begin{Bmatrix} \alpha\alpha \\ \beta\alpha \end{Bmatrix} \rightarrow \alpha$$

tandis que, lors de la transformation complète, c'est

$$\begin{Bmatrix} \beta\beta \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \rightarrow \alpha$$

qu'on observe.

On pourrait penser que ce comportement extraordinaire des mailles des cristaux pendant la transformation, au lieu d'être dû à des formes intermédiaires, pourrait provenir des tensions ou compressions internes produites par les changements de dimensions du cristal. Des noyaux de la nouvelle phase se formant à l'intérieur de l'ancienne, exerceraient des pressions déplaçant la température de transformation des régions qui subiraient ces forces. Cependant, le calcul montre qu'alors les mailles seraient déformées considérablement par ces forces et les raies K_α réfléchies par le cristal devraient être fortement élargies. Comme nous avons observé que ce phénomène ne se produisait pas, les raies gardant toute leur netteté au cours de la transformation, nous avons été obligés d'abandonner cette explication.

Enfin, les différences observées (dans la largeur de l'hystérèse par exemple) pour deux cristaux différents pourraient s'expliquer par le rôle que jouent les arêtes et les coins du cristal dans la « propagation » de la transformation (fig. 6).

En terminant je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur le Professeur WEIGLE pour l'intérêt de tous les instants qu'il a porté à mes recherches, dont il m'avait proposé le sujet et suggéré la méthode. Je voudrais également remercier Monsieur SAÏNI de ses précieux conseils concernant la technique expérimentale.

Institut de Physique de l'Université de Genève.

Über den Begriff des Atoms II

von Willy Scherrer.

(18. V. 1942.)

Vorbemerkungen.

In Teil I¹⁾ wurden Grundsätze entwickelt, denen man im einfachsten Falle — lauter gleiche Massen und Ladungen — folgende Form geben kann:

1. Alle Materie besteht aus einzelnen Elektronen.

2. Jedes einzelne Elektron muss durch eine individuelle Wellenfunktion beschrieben werden.

3. Das auf ein Elektron wirkende Feld ist identisch mit der Gesamtheit der Materiewellen aller übrigen Elektronen.

4. Das Operationsgebiet ist der vierdimensionale Zeitraum der speziellen Relativitätstheorie.

Als Ansatz für die Wechselwirkung zwischen n Elektronen mit den Wellenfunktionen

$$u_1, u_2, \dots u_n$$

habe ich in Anlehnung an bekannte Methoden der Wellenmechanik folgendes System vorgeschlagen:

$$\square u_k = \left\{ A + \varepsilon \square \sum_{l=1}^{n(k)} \text{Lg } u_l + \varepsilon^2 \left(\text{grad } \sum_{l=1}^{n(k)} \text{Lg } u_l \right)^2 \right\} u_k. \quad (1)$$

Schon im Teil I wurde darauf hingewiesen, dass in diesen Gleichungen am ehesten das in ε quadratische Glied als problematisch angesehen werden muss. In der Tat hat nun die nähere Untersuchung gezeigt, dass vor allem dieses Glied einen plausiblen Ausdruck für die Erhaltung des einzelnen Teilchens erschwert.

¹⁾ Helv. Phys. Acta XV, I, 53 (1942).

Die weitere Untersuchung hat dann ergeben, dass folgender überaus einfacher Ansatz die wesentlichsten Vorteile von (1) besitzt, seine Nachteile aber vermeidet:

$$\square u_k = \mathcal{A} u_k + \varepsilon \square \sum_{l=1}^{n(k)} u_l \quad (2)$$

Er hat ausserdem den Vorteil, dass er ohne weiteres in Dirac'schen Operatoren geschrieben werden kann. Es wäre also möglich, die Erhaltungssätze in der engsten Form zum Ausdruck zu bringen, falls sich das als notwendig erweisen sollte.

Schliesslich soll noch ein dritter Vorteil des Systems (2) hervorgehoben werden. Schon im Teil I wurde darauf hingewiesen, dass das System (1) im Koinzidenzfalle — alle Teilchen gehen vom selben Weltpunkt aus — vollständig separierbar ist. Das gilt selbstverständlich auch für (2). Hier gilt aber noch mehr, nämlich: für das System (2) ist das Zweikörperproblem in jedem Falle vollständig separierbar, wenn man geeignete „Lamé'sche“ Koordinaten verwendet. Damit ist also ein methodischer Ansatz für ein relativistisches wellenmechanisches Zweikörperproblem¹⁾ gewonnen, dessen vollständige mathematische Durchführung vielleicht im Bereich des Möglichen liegt.

Bei der Behandlung von (2) zeigt sich nun, dass die Wellengleichung von DE BROGLIE

$$\square u = \mathcal{A} u \quad (3)$$

für verschiedene Massenfaktoren \mathcal{A} eine ganz zentrale Stellung einnimmt. Setzt man nämlich

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad (4)$$

und

$$u_{kl} = u_k - u_l, \quad (5)$$

so folgt aus (2) entweder durch Addition aller Gleichungen oder durch Subtraktion irgend zweier

$$\square u = \frac{\mathcal{A}}{1 - (n-1)\varepsilon} u \quad (6)$$

resp.

$$\square u_{kl} = \frac{\mathcal{A}}{1 + \varepsilon} u_{kl}. \quad (7)$$

Es ist also notwendig, sich über die physikalisch sinnvollen Lösungen der Gleichung (3) zu orientieren und dieser Aufgabe soll der vorliegende Teil II meiner Untersuchung gewidmet sein.

¹⁾ Vgl. SOMMERFELD: Atombau und Spektrallinien II, 2. Aufl. (1939), S. 209.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass nach dem oben Gesagten in dem vorliegenden Teil II überhaupt keine neue *formale* Hypothese diskutiert wird. Es handelt sich ausschliesslich um die altbewährte Gleichung (3). Hingegen soll diese Gleichung von dem im Teil I erläuterten Standpunkt einer Weltpunktdynamik im vierdimensionalen Zeitraum aus beurteilt werden. Das Elektron erweist sich in dieser Auffassung, die grundsätzlich von der üblichen abweicht, als ein recht vielgestaltiges Gebilde.

§ 1. Koordinatenwahl und Separation.

Wir setzen

$$\Delta = - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = - a^2 \quad (8)$$

und schreiben (3) aus:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = - a^2 u. \quad (9)$$

Diese Gleichung haben wir nun im Sinne von I, Postulat 1) zu lösen. Wir setzen also voraus, dass sich im Ursprung

$$(ct, x_1, x_2, x_3) = 0, 0, 0, 0) \quad (10)$$

ein Quant Q_0 befinde und fragen nach der Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$u = u(ct, x_1, x_2, x_3), \quad (11)$$

deren Quadrat die relative Häufigkeit des Auftretens eines Quants Q an der Weltstelle

$$(ct, x_1, x_2, x_3) \quad (12)$$

als Wirkung von Q_0 anzeigen soll. Dabei setzen wir ausdrücklich voraus, dass die betrachteten Stellen (12) in dem zum Ursprung gehörigen Zukunftskegel, dem sog. Vorgekel, liegen sollen.

Um die dem Vorgekel innewohnende Symmetrie voll auszunützen, verwenden wir vierdimensionale Polarkoordinaten $r, \Theta, \vartheta, \varphi$, die man am bequemsten definiert durch die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} ct &= r \cos \Theta \\ x_1 &= r \sin \Theta \cos \vartheta \\ x_2 &= r \sin \Theta \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_3 &= r \sin \Theta \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \quad (13)$$

in Verbindung mit den Definitionsbereichen

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ 0 &\leq \Theta < \infty \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (14)$$

r ist die vom Ursprung nach der betrachteten Stelle hinführende Weltstanz. Θ bedeutet den hyperbolischen Winkel zwischen Ruhachse und Ortsvektor. Interpretiert man also den Übergang vom Ursprung zum betrachteten Weltstanz (12) als eine Geschwindigkeit v , so gilt

$$\mathfrak{I}g \Theta = \frac{v}{c}. \quad (15)$$

Bezeichnet man weiter mit ϱ den räumlichen Abstand zwischen dem Ursprung und der Weltstanz, so gilt

$$\varrho = r \mathfrak{S} \sin \Theta. \quad (16)$$

Die Grössen ϱ , ϑ und φ sind dann die gewöhnlichen räumlichen Polarkoordinaten.

Das der getroffenen Koordinatenwahl entsprechende Linienelement ist gegeben durch

$$ds^2 = dr^2 - r^2 [d\Theta^2 + \mathfrak{S} \sin^2 \Theta (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]. \quad (17)$$

Daraus ergibt sich das vierdimensionale Volumelement

$$d(ct) dx_1 dx_2 dx_3 = r^3 dr \cdot \mathfrak{S} \sin^2 \Theta d\Theta \cdot \sin \vartheta d\vartheta \cdot d\varphi, \quad (18)$$

sowie der Wellenoperator

$$\begin{aligned} \square u = & \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ & - \frac{1}{r^2 \mathfrak{S} \sin^2 \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\mathfrak{S} \sin^2 \Theta \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right) \\ & - \frac{1}{r^2 \mathfrak{S} \sin^2 \Theta \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) \\ & - \frac{1}{r^2 \mathfrak{S} \sin^2 \Theta \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Nun vollziehen wir die Separation auf Grund des Produktansatzes

$$u = R(r) G(\Theta) P(\vartheta) \Phi(\varphi). \quad (20)$$

Es resultieren die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d \varphi^2} + m^2 \Phi &= 0, \quad (\Phi) \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d \vartheta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P &= 0, \quad (P) \\ \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{d}{d \Theta} \left(\sin^2 \Theta \frac{dG}{d \Theta} \right) + \left[E - \frac{l(l+1)}{\sin^2 \Theta} \right] G &= 0, \quad (G) \\ \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dR}{dr} \right) + \left(a^2 + \frac{E}{r^2} \right) R &= 0. \quad (R) \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen werden in bekannter Weise durch trigonometrische resp. durch Kugelfunktionen gelöst, und wir haben deshalb von vorneherein ihre Eigenwerte als Funktionen der Quantenzahlen m und l eingesetzt.

Neue Momente ergeben die „Radialgleichung“ (R) und vor allem die „Geschwindigkeitsgleichung“ (G) , da sie ein kontinuierliches Spektrum von Eigenwerten E aufweist. Diesem „Geschwindigkeitsspektrum“ wollen wir uns jetzt zuwenden.

§ 2. Das Geschwindigkeitsspektrum.

Wir setzen

$$E = 1 - p^2 \quad (21)$$

und erhalten damit an Stelle von (G) :

$$\frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{d}{d \Theta} \left(\sin^2 \Theta \frac{dG}{d \Theta} \right) - \left[p^2 - 1 + \frac{l(l+1)}{\sin^2 \Theta} \right] G = 0 \quad (22)$$

Durch die Transformation

$$\cos \Theta = z \quad (23)$$

geht (22) über in

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 G}{dz^2} + 3z \frac{dG}{dz} - \left[p^2 - 1 + \frac{l(l+1)}{z^2 - 1} \right] G = 0. \quad (24)$$

Durch die Substitution

$$G \equiv G(l, z) = (z^2 - 1)^{\frac{l}{2}} H(l, z) \equiv (z^2 - 1)^{\frac{l}{2}} H \quad (25)$$

geht weiter (24) über in

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 H}{dz^2} + (2l + 3)z \frac{dH}{dz} - [p^2 - 1 - l(l+2)] H = 0. \quad (26)$$

Aus (26) schliesst man leicht, dass man aus jeder Funktion $H(l-1, z)$ eine Funktion $H(l, z)$ erhält durch einfache Ableitung:

$$H(l, z) = \frac{d}{dz} H(l-1, z). \quad (27)$$

In Verbindung mit (25) folgt daraus, dass man Lösungen von (24) auf Grund der Formel

$$G(l, z) = (z^2 - 1)^{\frac{l}{2}} \left(\frac{d}{dz} \right)^l K(z) \quad (28)$$

erhält, wo $K(z) \equiv G(0, z)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 K}{dz^2} + 3z \frac{dK}{dz} - (p^2 - 1) K = 0 \quad (29)$$

ist. Um ein Hauptsystem dieser Differentialgleichung in möglichst bequemer Gestalt zu erhalten, empfiehlt es sich, wiederum gemäss (23) auf die ursprüngliche Variable Θ zurückzugreifen.

Die Gleichung (29) geht dann über in

$$\frac{1}{\mathfrak{S} \sin^2 \Theta} \frac{d}{d\Theta} \left(\mathfrak{S} \sin^2 \Theta \frac{dK}{d\Theta} \right) - (p^2 - 1) K = 0. \quad (30)$$

Nun bestätigt man leicht, dass ein Hauptsystem von (30) gegeben wird durch

$$K_1(\Theta) = \frac{e^{p\Theta}}{\mathfrak{S} \sin \Theta}; \quad K_2(\Theta) = \frac{e^{-p\Theta}}{\mathfrak{S} \sin \Theta}. \quad (31)$$

An Stelle von (28) tritt nun der

Satz: Aus jeder Lösung $K(\Theta)$ von (30) erhält man eine Lösung von (22) vermittelt der Formel

$$G(\Theta) = (\mathfrak{S} \sin \Theta)^l \left(\frac{1}{\mathfrak{S} \sin \Theta} \frac{d}{d\Theta} \right)^l K(\Theta). \quad (32)$$

Gestützt auf das Hauptsystem (31) von (30) erhält man also ein Hauptsystem von (22).

Um nun die im Sinne der Wahrscheinlichkeitsinterpretation brauchbaren Lösungen auszuscheiden, wollen wir einige Unterscheidungen treffen.

Es liege allgemein die selbstadjungierte Eigenwertdifferentialgleichung

$$(P(x)y')' - Q(x)y + E(q)D(x)y = 0 \quad (33)$$

mit dem Definitionsbereich $a \leq x \leq b$ vor, deren Eigenwert E also eine bekannte Funktion eines Zustandsparameters q sei. Sei weiter $N(q)$ der zur Eigenlösung $y(q, x)$ gehörige Normierungsfaktor. Nun wollen wir folgende Ausdrucksweisen einführen:

1. Die Eigenlösung heiße „im engeren Sinne normierbar“, falls eine Normierung

$$\int_a^b N(q)^2 [y(q, x)]^2 D(x) dx = 1 \quad (34)$$

möglich ist.

2. Die Eigenlösung heiße „im weiteren Sinne normierbar“, falls eine Normierung

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \int_{q_1}^{q_2} \frac{N(q) N(\kappa)}{E(q) - E(\kappa)} \left\{ P(x) \left[y(q, x) \frac{\partial y(\kappa, x)}{\partial x} - y(\kappa, x) \frac{\partial y(q, x)}{\partial x} \right] \right\} dq = 1 \quad (35)$$

im Sinne der Theorie der kontinuierlichen Spektren¹⁾ möglich ist, wo also der festgehaltene Parameterwert κ dem Intervall (q_1, q_2) angehört.

Im 1. Falle kann man von einer absoluten Wahrscheinlichkeit sprechen dafür, das betrachtete Objekt im Koordinatenintervall $(x, x + dx)$ anzutreffen:

$$dw = N(q)^2 [y(q, x)]^2 D(x) dx. \quad (36)$$

Im 2. Falle stellt (36) nur eine relative Wahrscheinlichkeit dar. Trotzdem ist die Normierung von Bedeutung, denn nur sie gestattet die relativen Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Zustände — d. h. für verschiedene q — miteinander zu vergleichen.

Um die Existenz von Integralen (35), (36) bei unseren Lösungen (32) beurteilen zu können, benötigt man das asymptotische Verhalten dieser Lösungen in den Randpunkten $\Theta = 0$ und $\Theta = \infty$. Durch Reihenentwicklung nach Θ an der Stelle $\Theta = 0$ und nach $e^{-\Theta}$ an der Stelle $\Theta = \infty$ findet man

$$G(\Theta) \underset{\Theta \rightarrow 0}{\sim} \Theta^l \left(\frac{d}{\Theta d\Theta} \right)^l K(\Theta) \quad (37)$$

und

$$G(\Theta) \underset{\Theta \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{d}{d\Theta} \right)^l K(\Theta). \quad (38)$$

¹⁾ Siehe E. FUES, Ann. d. Phys. **81**, 295ff. (1926).

Zwecks Berechnung der Integrale bringt man nun (22) vermittle Multiplikation mit $\mathfrak{S}\sin^2 \Theta$ auf die (33) entsprechende Gestalt

$$\frac{d}{d\Theta} \left(\mathfrak{S}\sin^2 \Theta \frac{dG}{d\Theta} \right) - l(l+1)G + (1-p^2) \mathfrak{S}\sin^2 \Theta \cdot G = 0, \quad (39)$$

wo also $E = 1 - p^2$ Eigenwert und p Zustandsparameter ist.

Die Ergebnisse der rechnerischen Analyse sind — soweit wir sie brauchen — folgende.

$$\text{I.} \quad -\infty < E < 1,$$

p also reell. Wir nehmen p positiv an, also

$$p = |\sqrt{1 - E}|.$$

Die einzigen normierbaren Lösungen ergeben sich für $l = 0$ zu

$$g_0(\Theta) = N(p) \frac{e^{-p\Theta}}{\mathfrak{S}\sin \Theta} \quad (40)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N(p) = \sqrt{2} p. \quad (41)$$

Diese Lösungen sind im engeren Sinne normierbar und an der Stelle $\Theta = 0$ mit einem Pol erster Ordnung behaftet.

$$\text{II.} \quad 1 < E < \infty$$

also p rein imaginär. Wir setzen

$$p = iq. \quad (42)$$

Die normierbaren Lösungen sind gegeben durch

$$g(q, l; \Theta) = N(q) (\mathfrak{S}\sin \Theta)^l \left(\frac{d}{\mathfrak{S}\sin \Theta d\Theta} \right)^l \left(\frac{\sin q\Theta}{\mathfrak{S}\sin \Theta} \right) \quad (43)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{q^l}. \quad (44)$$

Sie sind nur im weiteren Sinne normierbar, hingegen mit Einschluss der Ränder stetig. Die Stelle $\Theta = 0$ ist eine Nullstelle der Ordnung l , wie man sofort feststellt, wenn man beachtet, dass $\frac{\sin(q\Theta)}{\mathfrak{S}\sin \Theta}$ eine gerade Funktion von Θ ist. Diese Lösungen verdienen insofern besondere Beachtung, als sie ein kontinuierliches Spektrum darstellen, das genau den Schrödinger'schen Stetigkeitsforderungen entspricht, während das bei I nicht der Fall ist.

Die mutmassliche Deutung kann natürlich erst erläutert werden, wenn man auch die Radiallösung kennt.

§ 3. Die Radialgleichung.

Es handelt sich um die Gleichung (R) in § 1 mit der Welt-distanz r als unabhängiger Variablen. Gemäss (21) setzen wir

$$E = 1 - p^2,$$

so dass (R) übergeht in

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dR}{dr} \right) + \left(a^2 + \frac{1 - p^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (45)$$

Mit

$$r = \frac{s}{a} \quad (46)$$

und

$$R = \frac{J}{s} \quad (47)$$

geht (45) über in

$$\frac{d^2 J}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dJ}{ds} + \left(1 - \frac{p^2}{s^2} \right) J = 0, \quad (48)$$

also eine Bessel'sche Differentialgleichung mit dem Parameter p .

Nun treffen wir wieder die im vorigen Paragraphen vorgenommene Fallunterscheidung

I. p reell :

Für (45) ergibt sich die Lösung

$$R = M(p) \cdot \frac{J_p(ar)}{r}, \quad (49)$$

wo $M(p)$ einen Normierungsfaktor bedeutet, dem wir den Wert

$$M(p) = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (50)$$

erteilen wollen. Die Motivierung dieser Wahl — von einer Begründung kann vorderhand noch nicht gesprochen werden — soll nachher für die Fälle I und II gleichzeitig vorgebracht werden.

Wir unterlassen es auch, Lösungen für negativen Index zu notieren, da dieselben — wenn überhaupt — wegen der erforderlichen Konvergenz des Wahrscheinlichkeitsintegrals an der Stelle $r = 0$ nur in sehr beschränktem Umfang zulässig sind.

II. p rein imaginär:

Wir setzen also wieder gemäss (42)

$$p = iq$$

und erhalten für (45) die Lösung

$$R = M(q) \cdot \frac{J_{iq}(ar)}{\sqrt{2} \cdot r}, \quad (51)$$

wobei für den Normierungsfaktor die Wahl

$$M(q) = \frac{a}{\sqrt{2} \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{I}(\pi q)} \quad (52)$$

getroffen werden soll. Entsprechend unserer Beschränkung auf reelle Amplituden müsste in (51) rechts entweder der Realteil oder der Imaginärteil genommen werden. Diese beiden Komponenten sind nicht wesentlich voneinander verschieden. Sie unterscheiden sich für grosse Argumente nur in asymptotisch konstanten Amplituden und einer asymptotisch konstanten Phasenverschiebung. Wir haben deshalb in (52) kurz eine mittlere Normierung in bezug auf die Dichte RR^* vorgenommen.

Nun zur Motivierung der vorgenommenen Normierung. Dabei genügt es, den formal einfacheren Fall I zu betrachten.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Quantum in der Distanz r anzutreffen, ist gegeben durch

$$R^2 = M^2 \cdot \left(\frac{J_p(ar)}{r} \right)^2.$$

Die Häufigkeit der auf das Intervall (r_1, r_2) entfallenden Quanten ist also gegeben durch

$$\int_{r_1}^{r_2} R^2 r^3 dr = M^2 \cdot \int_{r_1}^{r_2} [J_p(ar)]^2 r dr. \quad (53)$$

Für grosse ar gilt aber asymptotisch

$$J_p(ar) \sim \frac{\cos\left[ar - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}{\sqrt{\frac{\pi ar}{2}}}. \quad (54)$$

Wählt man also für r_1 und r_2 zwei aufeinanderfolgende Minima der Amplitude, d. h. erstreckt man das Integral (53) über eine Schwingung, so folgt asymptotisch für grosse ar

$$\int_{r_1}^{r_2} R^2 r^3 dr \sim \frac{2 M^2}{a^2}, \quad (55)$$

d. h.: Für grosse ar ist die Zahl der auf eine Schwingung entfallenden Wirkungen asymptotisch konstant. Nun entspricht nach unserer Auffassung das ganze Wellenfeld den mutmasslichen Wirkungen des *einen* im Ursprung angenommenen Ausgangsquantums Q_0 . Es ist deshalb das Einfachste, jeder einzelnen Schwingung ein einmaliges Auftreten einer Wirkung zuzuordnen. Man setzt also in (55) die rechte Seite gleich 1, womit die Normierung (50) gewonnen ist. Die Relation (55) sagt dann aus, *dass jede Wirkung asymptotisch für „grosse“ Weltdistanzen erhalten bleibt* (praktisch handelt es sich um Distanzen, die gross sind gegenüber der Compton-Wellenlänge $1/a$).

Genau dieselbe Überlegung und eine fast ebenso leichte Rechnung führt auf die Normierung (52).

Zum Schluss wollen wir uns noch vergegenwärtigen, wie sich die Radiallösungen den Schrödinger'schen Stetigkeitsforderungen unterordnen. Diejenigen Lösungen, wo diese Forderungen erfüllt sind, kommen offenbar nur beim Falle I vor. Die Verhältnisse liegen also gerade umgekehrt wie beim Geschwindigkeitsspektrum. *Es gibt also überhaupt keine partikuläre Lösung der Gleichung (3), die in allen Variablen den Schrödinger'schen Forderungen genügt.* Wir haben uns also zu entscheiden, für welche Variable wir diese Forderungen preisgeben wollen. Da scheint es mir nun natürlich, diese Preisgabe bei der Weltdistanz r zuzulassen, denn $r = 0$ bedeutet den Rand des Vorkegels, während die Stellen $\theta = 0$ im Innern liegen. Bei dieser Auffassung wäre also auf jeden Fall der Fall II zuzulassen.

§ 4. Die Interpretation.

Wir beginnen mit dem reichhaltigeren und im Vorkegel ausnahmslos stetigen Fall II, wo also $p = iq$ ist. Die Faktoren der partikulären Lösung (20) sind zu entnehmen aus folgender Tafel:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \\
 P &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot P_l^m(\cos \vartheta) \\
 G &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} q^{-l} G_q^l(\cos \Theta) \\
 R &= \frac{a}{2\sqrt{\cos \Theta}} \cdot \frac{J_{iq}(ar)}{r}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Hier sind in Zeile 2 und 4 die bekannten Symbole für Kugel- und Bessel'sche Funktionen verwendet, in Zeile 3 aber steht in angepasster Bezeichnung unser früheres, durch (43) und (44) definiertes $g(q, l, \Theta)$. Es gilt also

$$G_q^l(\cos \Theta) = (\sin \Theta)^l \left(\frac{d}{\sin \Theta d\Theta} \right)^l \left(\frac{\sin q\Theta}{\sin \Theta} \right). \tag{57}$$

Um dem Leser ein anschauliches Bild dessen zu vermitteln, was ich mir vorgestellt habe, entnehmen wir aus (56) nur reelle Lösungen und definieren demgemäss die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten einer durch Q_0 verursachten Wirkung Q an der Stelle $(r, \Theta, \vartheta, \varphi)$ des Vorkegels durch das ausnahmslos positive Quadrat

$$w = u^2 = R^2 G^2 P^2 \Phi^2. \tag{58}$$

Die dadurch bedingte Änderung des Normierungsfaktors von R wollen wir aber ausser Betracht lassen, da vorderhand die Phasen keine Rolle spielen.

Analysiert man nun den Verlauf der Dichte w , so konstatiert man, dass der Vorkegel in lauter Zellen zerfällt, von denen jede einzelne ein Dichtemaximum aufweist, während auf ihrem Rande die Dichte 0 herrscht. Das ganze Wellenfeld erhält also eine körnige Struktur, welche die von uns im Teil I angenommene These von intermittierendem Auftreten der Wirkungen veranschaulicht. Selbstverständlich muss es vorderhand eine offene Frage bleiben,

ob sich die Dinge wirklich so abspielen. Gerade in dem jetzt zu betrachtenden Falle II bietet die Definition

$$w = uu^* = RR^*G^2P^2\Phi\Phi^* \quad (59)$$

zum mindesten rechnerische Vorteile, und die Normierung in (56) wurde daher ihr. angepasst

Die für die vorgeschlagene Lösung charakteristischen Züge sind fast vollständig enthalten in den Faktoren $G(\Theta)$ und $R(r)$. Es soll deshalb das, was man den Formeln entnehmen kann, noch kurz für die Variablen r und Θ in Worten geschildert werden.

In bezug auf r zerfällt der Kegel in eine unendliche Serie von hyperbolischen Schalen, die gegen Unendlich asymptotisch äquidistant verlaufen und gegen Null eine Häufung aufweisen (singuläre Oscillation).

In bezug auf Θ weisen die Meridialebenen (r, Θ) eine fächerartige Struktur auf, die nach den Geraden $\Theta = \text{konst.}$ orientiert ist, und deren einzelne Glieder von $\Theta = 0$ an mit abnehmender Breite einer Häufungsstelle bei $\Theta = \infty$ zustreben (Geschwindigkeitsverteilung). Allgemein wird die Gliederung mit wachsendem q feiner. Für $l = 0$ liegt das Maximum der Maxima auf der Ruhachse. Für $l > 0$ verschiebt es sich nach Massgabe von l in der Richtung wachsender Θ . Gleichzeitig überlagert sich dieser Feingliederung eine zweite Gliederung, bestehend aus endlich vielen Oscillationen, deren Anzahl mit l wächst.

Durch Integration von w nach φ und ϑ erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$w_q^l(\Theta, r) = RR^*G^2 \quad (60)$$

für das Auftreten einer zum Zustand (l, q) gehörigen Wirkung mit den Koordinaten (Θ, r) . Dies bedeutet anschaulich das Auftreten einer Wirkung zur Zeit $t = \frac{1}{c} r \cos \Theta$ auf einer Kugel vom Radius $\varrho = r \sin \Theta$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, zur Zeit t innerhalb einer Kugel vom Radius $\varrho_0 = ct \sin \Theta_0$, um den räumlichen Nullpunkt eine Wirkung zu erfahren, ist daher gegeben durch

$$W_q^l(ct, \Theta_0) = \int_0^{\Theta_0} |R(r)|^2 G(\Theta)^2 \varrho^2 d\varrho, \quad (61)$$

wobei also zu setzen ist

$$r = \frac{ct}{\cos \Theta} \quad (62)$$

$$\varrho = ct \sin \Theta. \quad (63)$$

Statistisch ist also durch (61) die relative Anzahl der „Teilchen“ gegeben, deren „Geschwindigkeit“ zur Zeit t zwischen 0 und $v_0 = c \mathfrak{E}g \Theta_0$ liegt. Mit Teilchen und Geschwindigkeit ist natürlich nur die Konfiguration, bestehend aus dem ursprünglichen Quant Q_0 und dem an der beobachteten Stelle auftretenden Quant Q gemeint. Die Geschwindigkeit, die zur Beobachtung gelangt, wäre also ein mittlerer Differenzenquotient.

Aus Gleichung (61) ergibt sich nun eine wichtige Folgerung, wenn man den Grenzübergang $ct \rightarrow \infty$ vollzieht. Setzt man nämlich

$$\lim_{ct \rightarrow \infty} W_q^l(ct, \Theta_0) = W_q^l(\Theta_0), \quad (64)$$

so ergibt sich die Rechnung auf Grund von (56) und (54)

$$W_q^l(\Theta_0) = \frac{2a}{\pi^2 q^{2i}} \int_0^{\Theta_0} [G_q^l(\mathfrak{E}g \Theta)]^2 \frac{\mathfrak{E} \sin^2 \Theta}{\mathfrak{E}g \Theta} d\Theta. \quad (65)$$

Wir haben damit das Resultat:

Die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass das Teilchen zu einer bestimmten Zeit t mit einer Geschwindigkeit eintrifft, die zwischen 0 und $v_0 = c \mathfrak{E}g \Theta_0$ liegt, nähert sich mit wachsendem t einem bestimmten Grenzwert $W_q^l(\Theta_0)$.

Das Integral (65) konvergiert aber auch noch, wenn man $\Theta_0 \rightarrow \infty$ gehen lässt. Setzen wir also

$$\lim_{\Theta_0 \rightarrow \infty} W_q^l(\Theta_0) = W_q^l, \quad (66)$$

so haben wir

$$W_q^l = \frac{2a}{\pi^2 q^{2i}} \int_0^\infty [G_q^l(\mathfrak{E}g \Theta)]^2 \frac{\mathfrak{E} \sin^2 \Theta}{\mathfrak{E}g \Theta} d\Theta. \quad (67)$$

Es gilt also:

Die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass das Teilchen zu einer bestimmten Zeit t überhaupt auftritt, nähert sich mit wachsendem t einem bestimmten Grenzwert W_q^l .

Es besteht also auch in den phänomenologischen Koordinaten (ct, x_1, x_2, x_3) ein Erhaltungssatz. Das Integral (67) bezieht sich nun auf einen genauen Querschnitt, um die wirkliche Wahrscheinlichkeit zu erhalten, muss man also noch über ein Intervall $\Delta(ct)$ integrieren. Wir können nun Δt so wählen, dass die Wahrscheinlichkeit 1 wird und haben damit die Folgerung:

Nach Ablauf einer genügend grossen Zeit lässt sich ein Zeitintervall

$$\Delta t_q^l = \frac{1}{c W_q^l} \quad (68)$$

angeben mit der Eigenschaft, dass innerhalb dieses Zeitintervalls die Wirkung im Mittel genau einmal auftritt.

Geben wir statt dessen eine Zeitdifferenz Δt beliebig vor, so können wir auch sagen:

Nach Ablauf einer genügend grossen Zeit ist die mittlere Anzahl Z der von unserem Teilchen innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls Δt ausgeübten Wirkungen gegeben durch

$$Z = c W_q^l \cdot \Delta t. \quad (69)$$

Die Grösse hcW_q^l spielt offenbar die Rolle einer Energie, und die Existenz des Grenzwerts (67) kann als die asymptotische Erhaltung der mittleren Energie des Teilchens gedeutet werden. Den wahren Erhaltungssatz hat man im Postulat 1) von Teil I zu erblicken, aus dem ja alles übrige — mit Ausnahme der Normierungen (50) und (52) des vorigen Paragraphen — abgeleitet wurde.

Die vorgeschlagene Interpretation ermöglicht vielleicht ein besseres Verständnis für die Vorgänge beim kontinuierlichen β -Spektrum, denn sie liefert ja schon für die Trägheitsbewegung des Elektrons ein kontinuierliches und für $l > 0$ mit Selektion versehenes Geschwindigkeitsspektrum.

Wir gehen nun über zu Fall I, wo also p reell ist und $l = 0$ sein muss. An Stelle der Tafel (56) tritt

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \\ P &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ G &= \sqrt{2} \bar{p} \frac{e^{-p\Theta}}{\sin \Theta} \\ R &= \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{J_p(ar)}{r} \end{aligned} \quad (70)$$

Die Berechnungen verlaufen wie oben. An Stelle von (65) erhalten wir, indem wir den Index $l = 0$ weglassen,

$$W_p(\Theta_0) = \frac{ap}{\pi} \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{e^{2p\Theta} \sin \Theta}, \quad (71)$$

und an Stelle von (67)

$$W_p = \frac{ap}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\Theta}{e^{2p\Theta} \mathfrak{E} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \Theta} . \quad (72)$$

Im übrigen gelten natürlich vollkommen analoge Aussagen, wie sie eben für den Fall II formuliert wurden.

Nun stehen wir also wieder vor der Frage, ob man diesen Fall ausschliessen muss, einfach deshalb, weil er einen Pol aufweist. Da aber die Lösung sogar absolut normierbar ist, wäre ein solcher Ausschluss vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Abschluss aus nicht zu verstehen. Ich muss gestehen, dass mich die Argumente, die für den Ausschluss geltend gemacht werden, nicht zu überzeugen vermögen. Die Unbrauchbarkeit des $l=0$ entsprechenden singulären Zustandes könnte ja auch darauf beruhen, dass für diesen Fall die Ausstrahlungsregeln versagen.

Liesse sich nun der Fall II in die Theorie einordnen, so könnte die von uns durchdiskutierte Lösung eventuell gedeutet werden als ein Teilchen, das zweier Serien von Zuständen fähig ist. Die eine Serie — die p -Serie — würde der Materie, die andere — die q -Serie — dem Licht entsprechen. Bezeichnet man nämlich mit $w_p^0(ct, \Theta)$ resp. $w_q^l(ct, \Theta)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass das Teilchen zur Zeit t auf der Peripherie einer Kugel um 0 vom Radius $\varrho = ct \mathfrak{E} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \Theta$ zu treffen, so gelten für grosse t teils asymptotisch, meist aber genau, die Relationen:

$$\frac{w_p^0(ct, \infty)}{w_p^0(ct, 0)} \sim 0; \quad \frac{w_q^l(ct, \infty)}{w_q^l(ct, 0)} \sim \infty . \quad (73)$$

Trotzdem gibt es, wie unsere frühere Statistik zeigt, beim *Einkörperproblem*, kein „genaues“ Licht.

Nun wollen wir noch in den Fällen $l=0$ die Totalenergie des Teilchens für grosse t betrachten. Nach dem oben Gesagten erhält man sie, wenn man (72) resp. (67) mit hc multipliziert. Unter Beachtung von (8) folgt also

$$U_p = hc W_p = 2 m_0 c^2 p \int_0^\infty \frac{d\Theta}{e^{2p\Theta} \mathfrak{E} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \Theta} \quad (74)$$

$$U_q^0 = hc W_q^0 = \frac{4 m_0 c^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(q\Theta)}{\mathfrak{E} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \Theta} d\Theta . \quad (75)$$

Durchlaufen nun p und q alle Werte von 0 bis Unendlich, so gehen die zugehörigen Energiewerte kontinuierlich in zwei Grenzwerte über, die leicht zu bestimmen sind. Man findet:

$$U_{p=\infty} = m_0 c^2; \quad U_{q=\infty}^0 = m_0 c^2, \quad (76)$$

also in beiden Fällen die Ruheenergie des Elektrons.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Verteilungsfunktion (71)

$$W_p(\Theta_0) = \frac{ap}{\pi} \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{e^{2p\Theta} \zeta_0(\Theta)} \quad (71)$$

für $p \rightarrow \infty$ genau in eine δ -Funktion übergeht, womit im Grenzfall ein rein korpuskularer Zustand charakterisiert ist.

Im übrigen sei ausdrücklich hervorgehoben, dass die vorliegende Behandlung des „ruhenden“ und „kräftefreien“ Elektrons gegenüber der üblichen Behandlung folgende neue Momente gebracht hat:

1. Das „ruhende“ Elektron ist verschiedener Zustände fähig, welche durch einen neu einzuführenden Parameter $E = 1 - p^2$ (21) charakterisiert werden.
2. Die Energie ist nur asymptotisch für grosse Zeiten als Mittelwert definierbar.
3. Jedem Zustand ist eindeutig eine Energie zugeordnet.
4. Die sog. Ruhenergie ergibt sich nur in zwei Grenzfällen.

Wichtig ist vor allem die sich ergebende asymptotische Konstanz der Energie. Die hier vorgenommene Bewertung hängt natürlich von der auf (55) gestützten Normierung ab und muss vorderhand als provisorisch angesehen werden. Es könnte sich ja als notwendig herausstellen, die Normierung über Querschnitte $t = \text{konstans}$ vorzunehmen.

Im Gegensatz zur Energie hat in unserer Lösung die Konstante E für jeden Punkt des Vorkegels eine exakte Bedeutung, und es soll deshalb noch kurz die kinematische Deutung von E gegeben werden. Setzt man

$$(ct, ix_1, ix_2, ix_3) = (y_0, y_1, y_2, y_3) \quad (77)$$

und führt man ausserdem

$$y_k \frac{\partial}{\partial y_l} - y_l \frac{\partial}{\partial y_k} = F_{kl} \quad (78)$$

als dimensionslosen Operator ein, so findet man, dass für unsere zentralsymmetrischen Lösungen (20) genau gilt

$$\frac{1}{2} F_{kl} F_{kl} u = E u. \quad (79)$$

E stellt also das „Quadrat“ des Sechservektors (78) dar.

Dem Operator F_{kl} korrespondiert punktdynamisch — abgesehen von der Dimension — der Rotor

$$m_0(y_k \dot{y}_l - y_l \dot{y}_k) = P_{kl} \quad (80)$$

wo der Punkt die Ableitung nach einem Parameter von der Dimension einer Zeit bedeuten möge. In den Polarkoordinaten (13) gilt dann

$$\frac{1}{2} P_{kl} P_{kl} = -m_0^2 r^4 [\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)]. \quad (81)$$

Wir setzen also

$$\frac{1}{2} P_{kl} P_{kl} = -J^2 \quad (82)$$

wo J^2 eine positive Konstante ist. Nach der Operatorregel

$$m_0 \dot{y}_k \sim \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y_k} \quad (83)$$

folgt dann gemäss (78)

$$\frac{1}{2} F_{kl} F_{kl} u = \frac{J^2}{\hbar^2} u \quad (84)$$

und daher

$$E = \frac{J^2}{\hbar^2} \quad (84)$$

Korrespondenzmässig erhält man also alle $E > 0$, d. h. die ganze q -Serie und ein Stück der p -Serie.

Schlussbemerkungen.

Mancher Leser wird sich vielleicht sagen, das Vorgebrachte sei wohl eine mathematisch ganz interessante Behandlung der kräftefreien Wellengleichung (3), es sei aber nicht einzusehen, wie auf dieser Grundlage die sog. klassische Wellenmechanik als Grenzfall in dem Umfange hergeleitet werden könne, wie sie sich bewährt habe. Es kommt nun ganz darauf an, in welcher Form und in welchem Umfang diese Forderung geltend gemacht wird.

Es bieten sich im wesentlichen zwei Möglichkeiten, die genannte Forderung zu präzisieren:

1. Man verlangt, dass die zugrundegelegten *Differentialgleichungen* (1) oder (2) durch einen geeigneten Grenzübergang in die üblichen Differentialgleichungen der Wellenmechanik übergehen.

Eine derart formulierte Forderung kommt höchstens für den kräftefreien Fall in Frage. Für die Wechselwirkungsgleichungen halte ich sie für vollkommen falsch und schon darum undurchführbar, weil vorurteilslos betrachtet überhaupt keine brauchbaren relativistischen Wechselwirkungsgleichungen existieren. Die jetzt mit Erfolg verwendeten Wellengleichungen enthalten die Potentiale explicite. Das formal Wesentliche unserer Ansätze beruht aber darauf, dass Wellenfunktionen und Potentiale gleichzeitig durch Integration — sagen wir deutlicher, durch Summation — entstehen. Würde also ein Grenzübergang explicite Potentiale liefern, so käme die Sache gerade verkehrt heraus, da dann die Potentiale bei der Integration gewissermassen nochmals summiert würden.

2. Man verlangt, dass die *Integrale* der zugrundegelegten Differentialgleichungen dasjenige numerisch richtig wiedergeben, was sich in der klassischen Wellenmechanik bewährt hat.

In dieser Form ist die Forderung eine Selbstverständlichkeit, und ihre Erfüllung wird natürlich zur endgültigen Bewährung der vorgeschlagenen Ansätze unerlässlich sein. Doch ist bei der Nennung der zuerst zu behandelnden Aufgaben grösste Vorsicht am Platze. Unser Ausgangspunkt ist das Elektron, und schon das Proton stellt möglicherweise ein sehr komplexes Problem dar. Man darf also nicht verlangen, das Wasserstoffsystem müsse den *ersten* Prüfstein der Theorie bilden. Die in erster Linie zu behandelnde Aufgabe wird die Wechselwirkung zweier Elementarteilchen sein, vermutlich also der *Comptonprozess* im weitesten Sinne des Wortes, wozu meines Erachtens auch die Paarерzeugung gehören sollte.

Ich zweifle also sehr daran, dass es möglich sein wird, die Aussichten der vorgeschlagenen Ansätze durch einige Rechnung rasch nachzukontrollieren.

Für eine rasche Orientierung kommt, wie eben unter 1. erwähnt wurde, höchstens der kräftefreie Fall in Betracht. Hierzu einige kurze Bemerkungen.

Hauptfrage: Warum behandelt man das gebundene Elektron kugelsymmetrisch, das freie Elektron aber als ebene Welle? Ich empfehle jedem Leser, die Gleichung (9) vermittelst des stationären Ansatzes

$$u = e^{2\pi i \nu t} G(\varrho) P(\vartheta) \Phi(\varphi) \quad (85)$$

zu behandeln und die Lösung sowohl mathematisch als auch wahrscheinlichkeits-theoretisch konsequent durchzudiskutieren. Dazu gehören vor allem zwei Dinge:

1. Die Frequenz ν muss wirklich als frei wählbarer Parameter behandelt werden, so wie sie in (85) auftritt.

2. Die Wahrscheinlichkeiten müssen ausnahmslos interpretiert werden. Wenn also das Quadratintegral divergiert, ist auch kein Teilchen zu finden.

Die Rechnungen verlaufen ähnlich wie in den §§ 1—3, und die Funktionen $\Phi(\varphi)$ und $P(\vartheta)$ bleiben natürlich dieselben. In der Funktion $G(q)$ dagegen werden gewisse Züge der früheren Lösungen $G(\Theta)$ und $R(r)$ verschmolzen, andere gehen verloren.

Instruktiv ist die Interpretation in Analogie zu § 4. Wieder erhält man Lösungen I und II, aber als Ausartungen. I stellt einen völlig bewegungslosen Korpuskel dar, der sich im Grenzfall $\nu = \frac{m_0 c^2}{h} = \nu_0$ über den ganzen Raum verbreitet. Für $\nu > \nu_0$ tritt II ein mit der Wahrscheinlichkeit 0. Das Teilchen ist nach Unendlich abgewandert. Die in vollkommener Analogie zu § 4 durchgeführte Energieberechnung führt — nach vorheriger Normierung über eine Zeitperiode — im Falle I auf

$$U = h \nu \quad (86)$$

im Grenzfall $\nu = \nu_0$ also auf

$$U = m_0 c^2. \quad (87)$$

Diese Lösung — numerisch der ebenen Welle unterlegen, weil sie die Bewegung vermissen lässt — scheint dennoch auf ein sinnvolles Ganzes hinzudeuten. Formal relativistisch invariant, enthüllt sie doch deutlich die Schwäche der mit dem „Zerspaltungsansatz“ (85) arbeitenden Wellenmechanik: Sie verstösst gegen das Verbot der Überlichtgeschwindigkeit.

Im übrigen können natürlich Ansätze des von uns vorgeschlagenen Typus (2) ohne weiteres mit dem Zerspaltungsansatz behandelt werden. Es ist sehr wohl möglich, dass sich dabei gewisse Züge stabiler Systeme ergeben, welche dynamisch erst auf Grund der vollständigen Lösung des Mehrteilchenproblems erhältlich sind.

Ich will deshalb zum Schluss noch kurz angeben, wie sich nach der Zerspaltungsmethode unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen ein *differentieller Erhaltungssatz* formulieren lässt.

Betrachten wir das System

$$\square u_k = A_{kl} u_l + \varepsilon_{kl} \square u_l, \quad (k = 1, 2, \dots n)$$

(88)

wo über l zu summieren ist und die „Massenmatrix“ A_{kl} sowie die „Kräftematrix“ ε_{kl} Hermite'sch sein sollen:

$$A_{lk} = A_{kl}^*; \quad \varepsilon_{lk} = \varepsilon_{kl}^* \quad (89)$$

Führt man nun den totalen Teilchenstrom

$$S^\lambda = \frac{\hbar}{2i} \left(u_k^* \frac{\partial u_k}{\partial x_\lambda} - u_k \frac{\partial u_k^*}{\partial x_\lambda} \right) \quad (89)$$

sowie den totalen Strom der Wechselwirkungsenergie

$$T^\lambda = -\frac{\hbar}{2i} \varepsilon_{kl} \left(u^* \frac{\partial u_l}{\partial x_\lambda} - u_l \frac{\partial u_k^*}{\partial x_\lambda} \right) \quad (90)$$

ein, so gilt der differentielle Erhaltungssatz

$$\frac{\partial (S^\lambda + T^\lambda)}{\partial x_\lambda} = 0. \quad (91)$$

Bern, Mathematisches Institut der Universität.

Über einen Nachwirkungseffekt an Zählrohren bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen

von F. Roggen und P. Scherrer.

(18. VI. 1942.)

Bei Untersuchungen über Kernanregung durch Röntgenstrahlen beobachteten wir einen Nachwirkungseffekt, welcher an Zählrohren nach Bestrahlung mit Röntgenstrahlen auftritt. Dieser Effekt, der sich bei der Messung schwacher, künstlich erzeugter Aktivitäten störend bemerkbar machen kann, sei hier kurz beschrieben.

Werden Zählrohre während ca. 20 Minuten der Strahlung einer Röntgenröhre ausgesetzt (Spannung 160—180 kV, Stromstärke 6 mA), so ergeben sie nach der Bestrahlung Impulszahlen, welche das zwei- bis zehnfache des normalen Nulleffektes betragen¹⁾. Die Zahl dieser zusätzlichen Entladungen nimmt allmählich wieder auf null ab. Fig. 1 zeigt in logarithmischem Masstab ein Beispiel für eine solche Abklingkurve und zwar für ein Cu-Zählrohr, das 30 Minuten lang bestrahlt worden war (60 kV). Wie man sieht, kann die Abklingung gut dargestellt werden durch zwei Exponentialkurven mit Halbwertzeiten von 7 bzw. 18 Minuten.

Der Effekt konnte auch beobachtet werden an Aluminium- und Messingzählrohren; z. B. auch an den in Glas eingeschmolzenen Messingzählrohren der Firma UTZINGER. Die Halbwertszeiten des Abfalles variierten für verschiedene Zählrohre zwischen einigen Minuten und zehn Stunden. Bei *demselben* Rohr war die Abklingkurve aber *reproduzierbar*. Der Effekt wurde dagegen nicht gefunden an Zählrohren aus Zink und an solchen mit vergoldeter Kathode.

¹⁾ Nach Abschluss dieser Arbeit wird uns eine Anmerkung von VAN ATTA und Mitarbeitern (Rev. Sci. Instr. **12**, 544, 1941) bekannt, die einen Nachwirkungseffekt an Zählrohren bei Bestrahlung mit 900 kV Röntgenstrahlen erwähnen, ohne diesen indessen weiter zu verfolgen.

Eingehende Versuche zeigten, dass der Effekt vom Metallzylinder des Zählrohres herrührt: Bestrahlung des Füllgases ausserhalb des Zählrohres und nachheriges Einfüllen des Gases ins Rohr ergab niemals einen Effekt. Auch eine Röntgenbestrahlung des Zählrahtes und der Isoliermaterialien des Zählrohres blieb ohne Wirkung. Der Effekt trat dagegen auf, wenn der Metallzylinder allein in Luft oder im evakuierten Glasrohr bestrahlt wurde. Um solche Versuche auszuführen, wurde ein mit Schliffen versehenes, zerlegbares Glaszählrohr gebaut, das nach Bestrahlung seiner einzelnen Bestandteile in kurzer Zeit zusammengesetzt und betriebsbereit gemacht werden konnte.

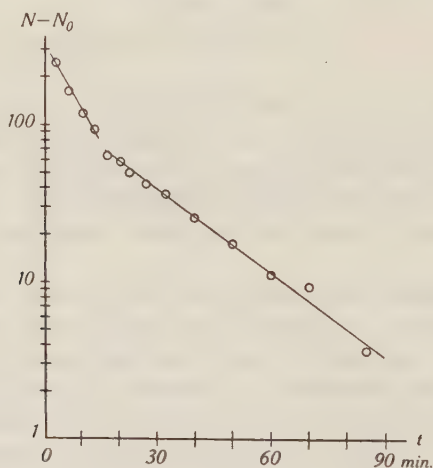


Fig. 1.

N : Zahl der Zählrohrimpulse pro min,

N_0 : Zahl der Nullstösse pro min. = 18,8 (Zählrohr unter 10 cm Blei)

$t = 0$: Ende der Bestrahlung.

Der Effekt erwies sich stark abhängig von der Beschaffenheit der Metalloberfläche. Er war stets am intensivsten bei frisch abgedrehter Metalloberfläche und verschwand im Laufe von Wochen, wenn das Metall mit Luft in Berührung war. Durch Aufbringen einer künstlichen Oxydschicht von 15μ Dicke auf Aluminium (Eloxieren) oder einer dünnen Lackschicht (ca. 1μ) verschwand der Effekt an Rohren, welche ihn vorher stark gezeigt hatten.

Gegen die Deutung der Erscheinung als Phosphoreszenz des Metalloxyds spricht die Tatsache, dass der Effekt bei Zink, dessen Oxyd als Phosphor bekannt ist, nicht auftritt, und dass er auch

durch Bestrahlung der Innenfläche der Metallzylinder mit sichtbarem und ultraviolettem Licht nicht erregbar war.

Wir nehmen deshalb an, dass es sich bei dieser Erscheinung um die sog. „Feldelektronenemission durch dünne Isolatorschichten“ handelt. Diese Emission kommt dann zustande, wenn sich in der isolierenden Oxydhaut, welche das Metall bedeckt, positive Ladungen befinden, deren Feld eine *autoelektronische Emission* aus dem darunterliegenden Metall bewirkt. Diese positiven Ladungen in der Oxydhaut werden offenbar hier durch den Photoeffekt der Röntgenstrahlen gebildet. Eine rechnerische Abschätzung ergibt,

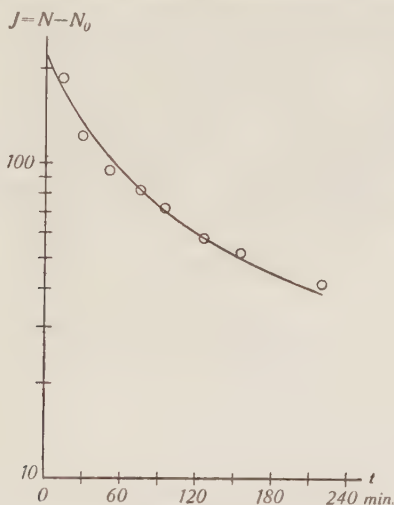


Fig. 2.

Abklingkurve für ein Al-Zählrohr.

o Messpunkte.

— Kurve nach TANAKA: $I = I_0 \frac{1}{1 + \alpha t}$ $I_0 = 220$, $\alpha = 0,022 \text{ min}^{-1}$.

dass die so entstehende Raumladung zur Erzeugung der nötigen Feldstärke ausreicht.

GÜNTHERSCHULZE und FRICKE¹⁾ wiesen das Auftreten von Feldemission bei Gasentladungen nach, MALTER²⁾ fand sie bei Elektronenbestrahlung von Aluminium, dessen Oxydschicht noch mit Cs-Oxyd bedeckt ist. TANAKA³⁾ konnte zeigen, dass auch intensives Elektronenbombardement von gewöhnlichen Al-, Ag-, Cu- und Ni-Bleichen zu nachträglicher langsam abklingender

¹⁾ GÜNTHERSCHULZE und FRICKE, Zs. f. Phys. **86**, 463, 1933; s. a. PAETOW, Zs. Phys. **111**, 770, 1939.

²⁾ MALTER, Phys. Rev. **50**, 48, 1936.

³⁾ TANAKA, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **22**, 899, 1940.

Elektronenemission führt. Als theoretische Abklingkurve erhält TANAKA $I = \frac{I_0}{\alpha t + 1}$, unter der Annahme einer Oxydschicht mit unendlich grossem elektrischem Widerstand. Wenn es sich bei unsern durch Röntgenstrahlen erzeugten Aktivitäten um raumladungsbedingte Feldemission handelt, so muss der Abfall bei dem durch Röntgenstrahlen hervorgerufenen Effekt ebenfalls nach dieser Formel erfolgen. Diese Voraussetzung stimmt am ehesten bei Aluminium (Fig. 2). Es sind denn auch die von uns an Aluminium-Zählrohren gemessenen Abklingkurven mit der Formel von TANAKA vereinbar, nicht aber die an andern Metallen beobachteten Abklingkurven. Wie man sich leicht überlegt, bewirkt ein kleinerer Widerstand der Oxydschicht von einem bestimmten Zeitpunkt an ein bedeutend rascheres, eher exponentielles Abfallen des Effektes, als es der Formel von TANAKA entspricht. Es entstehen dann in logarithmischer Darstellung Diagramme nach Art der Figur 1, die ein Abfallen der Aktivität mit verschiedenen Halbwertszeiten vortäuschen.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

— — — — —

Dielektrische Messungen an KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 bei tiefen Temperaturen¹⁾

von G. Busch und E. Ganz.

(18. VI. 1942.)

Zusammenfassung. Es wird über Messungen der Dielektrizitätskonstanten und der dielektrischen Verluste an KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 bis in das Temperaturgebiet des flüssigen Wasserstoffes berichtet. Die Curie-Temperaturen ergeben sich für die beiden Substanzen zu 123,5 bzw. 96,5 °K. Für das mit Hysterisis behaftete Dielektrikum wird ein in erster Näherung gültiges Ersatzschema besprochen und die dadurch definierte wirksame Dielektrizitätskonstante und der Verlustwinkel mittels einer Wechselstrom-Brücke gemessen. Die Dielektrizitätskonstante fällt für KH_2PO_4 zwischen 70 und 50 °K, für KH_2AsO_4 zwischen 75 und 60 °K auf niedrige Werte ab. Im selben Temperaturgebiet tritt das Maximum der dielektrischen Verluste auf, das 3 Joule/cm³ beträgt.

In zwei früheren Arbeiten²⁾ wurde über die dielektrischen Eigenschaften des primären Kaliumphosphats und des isomorphen Arsenats berichtet, die sich aus Untersuchungen zwischen Zimmertemperatur und dem Siedepunkt der flüssigen Luft ergaben. Die Dielektrizitätskonstante ϵ_c beider Substanzen steigt in der Nähe der Temperatur der flüssigen Luft rasch auf abnorm hohe Werte; bei weiterer Abkühlung fällt sie jedoch wieder auf einen Betrag in der Größenordnung 10, wie eine vorläufige Messung im Wasserstoffgebiet zeigte. Der Zweck der vorliegenden Arbeit war, die früheren Messungen der Dielektrizitätskonstanten und die Untersuchung der dielektrischen Hysterisis im Gebiet der mit flüssigem Wasserstoff erreichbaren Temperaturen fortzusetzen.

Da der untere Curiepunkt der beiden Substanzen zwischen den Temperaturbereichen liegt, die sich mit Bädern von flüssiger Luft und von flüssigem Wasserstoff erzeugen lassen, wurde ein Gas-Kryostat konstruiert, welcher in genügender Menge tiefgeköhltes Wasserstoffgas lieferte, um die in den Kristallen durch das elektrische Wechselfeld entstehende Wärme rasch abzuführen.

¹⁾ Die Messungen, welche dieser Arbeit zugrunde liegen, wurden bereits im Sommer 1939 im Royal Society Mond Laboratory in Cambridge ausgeführt; ihre Veröffentlichung verzögerte sich jedoch infolge ungünstiger äusserer Umstände bis heute.

²⁾ G. BUSCH und P. SCHERRER, *Natw.* **23**, 737 (1935); G. BUSCH, *HPA* **11**, 269 (1938).

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 dargestellt. Sie besteht aus drei konzentrisch ineinanderliegenden Dewar-Gefässen; das äussere enthält flüssige Luft, das mittlere flüssigen Wasserstoff, währenddem das innerste den eigentlichen Gas-Kryostaten bildet. Die Wasserstoff enthaltenden Gefässe sind oben mit Metalldeckeln und Gummimanschetten gegen die Aussenluft abgedichtet und das

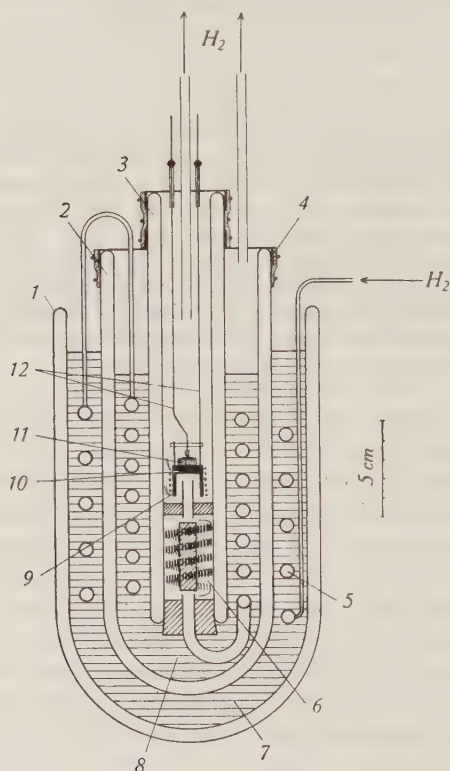


Fig. 1. Gas-Kryostat.

- 1, 2 und 3=Dewar-Gefässe; 4=Abschlussdeckel mit Gummimanschetten;
 5=Kühlspirale; 6=Heizwicklung; 7- flüssige Luft; 8- flüssiger Wasserstoff;
 9=Platin-Widerstands-Thermometer; 10=Kristallhalter aus Kupfer;
 11=Kristall; 12=Aufhängung des Kristallhalters und Zuleitungen für die Elektroden.

innerste Gefäss ist an seinem unteren Ende durch einen Gummistopfen verschlossen. Der für Wasserstoff-Verflüssigung geeignete, in Bomben erhältliche, speziell gereinigte Wasserstoff wurde mittels einer in flüssiger Luft gekühlten Ausfrierflasche weiter gereinigt und intensiv getrocknet. Er strömt sodann durch die beiden in den verflüssigten Gasen liegenden Kühlspiralen und tritt in

die untere, mit einer Heizwicklung versehene Kammer des innersten Dewar-Gefässes ein. In der oberen Kammer hängt der Kristallhalter, welcher aus Kupfer besteht und so geformt ist, dass der Wasserstoffstrom den Kristallhalter und das daraufgewickelte Widerstandsthermometer intensiv umspült. Durch geeignete Regulierung des Heizstromes und der Strömungsgeschwindigkeit des Wasserstoffs konnte die Temperatur des Kristalles im ganzen Messbereich innerhalb $1/10^{\circ}$ konstant gehalten werden.

Damit sich das Platin-Widerstands-Thermometer in möglichst gutem Wärmekontakt mit dem Kristall befand, wurde der Platindraht direkt auf den mit einer sehr dünnen Cellophanfolie isolierten Kupferhalter gewickelt, nachdem der Draht der von KEESOM und DAMMERS¹⁾ angegebenen Wärmebehandlung unterzogen worden war. Herrn Prof. KEESOM und Herrn Dr. BIJL²⁾ sind wir für die Überlassung eines Stückes geeichten Platindrahts *C* zu grossem Dank verpflichtet. Die Widerstandswerte stimmten mit der Leidener-Eichung für die Temperaturen der Normal-Siedepunkte von Methan und Sauerstoff überein. Für den Tripelpunkt des Stickstoffs, sowie für den Normal-Siedepunkt des Wasserstoffs ergaben sich dagegen ein wenig höhere Werte, was auf den etwas höheren Restwiderstand zurückgeführt werden muss.

Zur Untersuchung gelangten 1—2 mm dicke Kristall-Platten von 0,5—1 cm² Fläche, welche senkrecht zur *c*-Achse der Kristalle geschnitten waren. Die beiden zu *c* normal stehenden Flächen wurden im Vakuum durch Aufdampfen von Gold mit Elektroden versehen, wodurch erfahrungsgemäss ein guter Kontakt gewährleistet wird.

Die Messungen der Dielektrizitätskonstanten und des Verlustwinkels erfolgten mittels einer Kapazitätsmessbrücke mit Wechselstrom von 50 Perioden. Es ist nun die Frage, welche Bedeutung den Ergebnissen einer Brückenmessung zukommt, wenn das untersuchte Dielektrikum, wie in unserem Falle, Hysteresis zeigt. Der Kondensator, der durch die Kristallplatte gebildet wird, besitzt in diesem Falle eine nichtlineare Strom-Spannungs-Charakteristik und gibt daher Anlass zur Entstehung von Oberschwingungen im Brückenstromkreis. Daher wurde als Nullinstrument ein auf 50 Hertz abgestimmtes Vibrationsgalvanometer benützt. Diese Massnahme hat zur Folge, dass die Brücke durch Variation zweier ihrer Elemente, z. B. einer Kapazität und eines zu dieser in Serie liegenden Widerstandes genau abgeglichen werden kann. Dies bedeutet

1) W. H. KEESOM und B. G. DAMMERS, *Physica* **2**, 1051 (1935).

2) W. H. KEESOM und A. BIJL, *Physica* **3**, 418 (1936).

aber im weiteren, dass sich der Kristall wie eine normale, verlustbehaftete Kapazität, d. h. wie ein verlustfreier Kondensator mit vorgeschaltetem Ohm'schen Widerstand verhält. Formal wird demnach bei dieser Messmethode die Hysteresis-Kurve, welche den funktionalen Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke E und der dielektrischen Verschiebung D darstellt, durch eine Ellipse ersetzt, wie in Fig. 2 dargestellt ist. Es handelt sich also um eine erste Näherung.

Setzt man in bekannter Weise D als komplexen Ausdruck an

$$D = (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)E$$

so ergibt sich als Widerstands-Operator für den Kristall in oben angegebener Näherung

$$\mathfrak{R}_k = - \frac{\varepsilon_2}{\omega C_0 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} - i \frac{\varepsilon_1}{\omega C_0 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$$

d. h. er wirkt wie eine Kapazität von der Grösse

$$C^* = C_0 \cdot \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}$$

mit einem in Serie geschalteten Widerstand

$$R^* = - \frac{\varepsilon_2}{\omega C_0 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}.$$

Dabei bedeutet ω die Kreisfrequenz und C_0 die durch die Elektroden der Kristallplatte gebildete Leerkapazität. ε_2 ist stets negativ, R^* also positiv, da die Hysteresis-Kurven stets im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden¹⁾.

Man erhält somit einerseits für den Verlustwinkel ϑ

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \vartheta = \omega R^* C^* = - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}.$$

Andererseits ergibt sich eine „wirksame“ Dielektrizitätskonstante

$$\underline{\underline{\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)}}.$$

Für hinreichend kleine Verlustwinkel ist also die gemessene wirksame Dielektrizitätskonstante ε^* praktisch identisch mit der reellen, in üblicher Weise definierten Dielektrizitätskonstanten ε_1 .

¹⁾ Vgl. z. B. H. G. MÖLLER, Behandlung von Schwingungsaufgaben.

ε_1 und ε_2 sind übrigens einer anschaulichen Interpretation zugänglich. Es gilt nämlich

$$\varepsilon_1 = \operatorname{tg} \varphi_1; \quad \varepsilon_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = -\varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \vartheta$$

wo φ_1 und φ_2 die in Fig. 2 eingezeichneten Winkel bedeuten. Den Winkel φ_1 erhält man als Winkel zwischen der positiven E -Achse und der Verbindungslinie des Zentrums der Ellipse mit dem Berührungspunkt P der zur D -Achse parallelen Tangente. Projiziert man den symmetrischen Punkt Q auf die E -Achse, so erhält man Q' . Dann schliesst die Verbindungsgerade zwischen Q' und dem

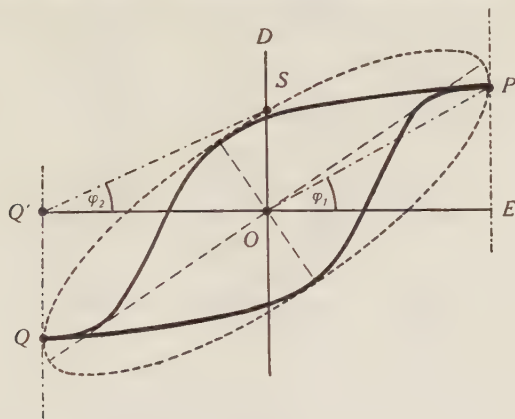


Fig. 2.

Schnittpunkt S der Ellipse mit der positiven D -Achse zusammen mit der E -Achse den Winkel φ_2 ein. Durch Angabe dieses Winkel ist daher Form und Lage der Ellipse bezüglich den Koordinatenachsen, und damit auch in erster Näherung Form und Lage der Hysteresis-Kurven bestimmt. Das dielektrische Verhalten eines Kristalles im Gebiet der spontanen Polarisierung kann demnach durch Messung von ε^* und $\operatorname{tg} \vartheta$ in einer Wechselstrombrücke in *erster Näherung* ermittelt werden.

Ergebnisse. Die wirksame Dielektrizitätskonstante ε^* und der Verlustwinkel ϑ für KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 senkrecht zur c -Achse sind in den Fig. 3 und 4 in logarithmischem Masstab als Funktion der absoluten Temperatur aufgetragen. Für KH_2PO_4 ergibt sich ein Maximalwert für ε^* von 32000; für KH_2AsO_4 wird ε^* maximal 19500. Als Temperaturen für den „oberen“ Curiepunkt ergeben sich für KH_2PO_4 $\Theta = 123,5^\circ\text{K}$ und für KH_2AsO_4 $\Theta = 96,5^\circ\text{K}$. Diese Temperaturen sind um mehrere Grade höher als die früher angegebenen Werte; sie sind jedoch als zuverlässiger anzusehen. Die Curie-Temperatur des KH_2PO_4 ist übrigens in be-

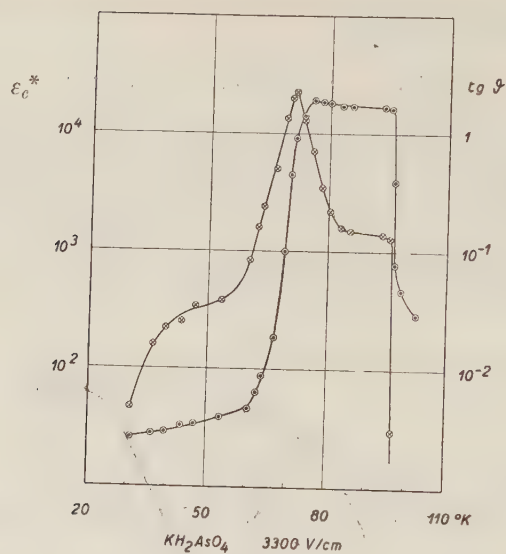


Fig. 3.

○ ϵ_c^* , ⊕ $\text{tg } \vartheta$.

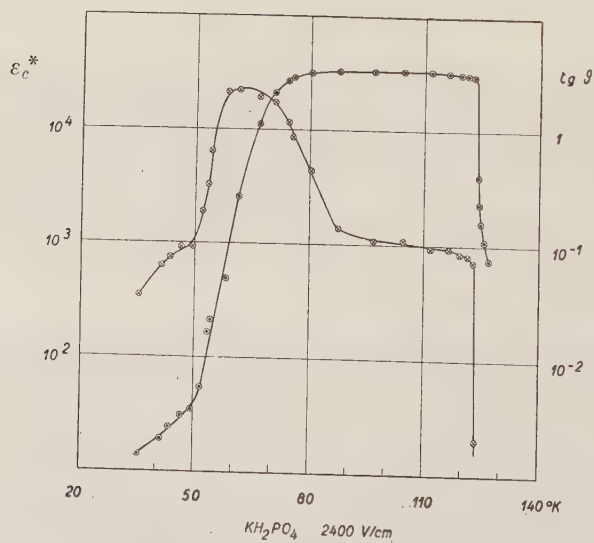


Fig. 4.

○ ϵ_c^* , ⊕ $\text{tg } \vartheta$.

friedigender Übereinstimmung mit den Beobachtungen von STEPHENSON und HOOLEY¹⁾, welche aus dem Maximum der Anomalie der spezifischen Wärme $\Theta = 122^\circ\text{K}$ finden.

Für beide Substanzen bleibt die wirksame Dielektrizitätskonstante unterhalb des Curiepunktes bei sinkender Temperatur nahezu konstant, fällt dann für KH_2PO_4 zwischen 70 und 50°K und für KH_2AsO_4 zwischen 75 und 60°K stark ab und nimmt schliesslich Werte von ähnlicher Grösse an, wie sie bei Zimmertemperatur beobachtet werden. Die dielektrischen Verluste, die am oberen

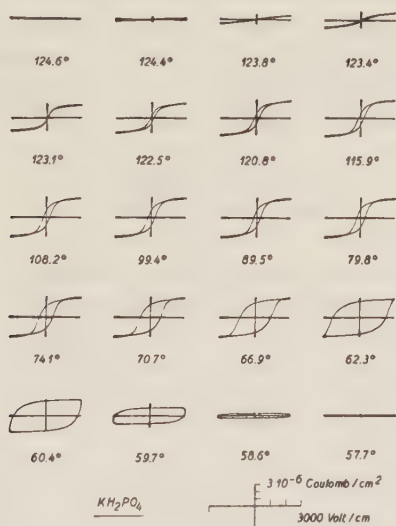


Fig. 5.

Curiepunkt plötzlich einsetzen, steigen zunächst mit fallender Temperatur langsam an und erreichen im Moment des Abfalles der wirksamen Dielektrizitätskonstanten ein ausgeprägtes Maximum. Hiernach erfolgt der Abfall auf kleine, aber offenbar nicht verschwindende Verlustwinkel. Das Verhalten am untern Curiepunkt erinnert etwas an die Erscheinung der Reibungsdispersion bei polaren Flüssigkeiten, und deutet darauf hin, dass die Beweglichkeit der für die hohe Polarisierbarkeit der untersuchten Substanzen verantwortlichen Dipole mit fallender Temperatur stark abnimmt.

Wiederholte Versuche an verschiedenen Kristallplatten derselben Substanz lieferten stets denselben Wert für die Curie-Temperatur. Die dielektrischen Verluste dagegen schwankten von einer Probe zur andern sehr stark. Kristallplatten mit geringeren Ver-

¹⁾ C. C. STEPHENSON und J. G. HOOLEY, Phys. Rev. **56**, 121 (1939).

lusten ergaben höhere Werte für die Dielektrizitätskonstante unterhalb des Curie-Punktes; das Maximum des Verlustwinkels und der Abfall der Dielektrizitätskonstanten verschoben sich in diesem Falle nach tieferen Temperaturen und umgekehrt. Es scheint, dass diese Erscheinungen mit inneren mechanischen Spannungen, welchen die Kristalle in verschiedenem Masse unterworfen sind, zusammenhängen.

Die Dielektrizitätskonstanten, welche parallel zur kristallographischen a -Achse gemessen worden sind, zeigen nach dem Maximum am Curie-Punkt lediglich einen monotonen Abfall bis zu der tiefsten gemessenen Temperatur von 30 °K.

Weiter wurde noch die dielektrische Hysteresis an KH_2PO_4 mit 50-periodigem Wechselstrom nach der Methode von SAWYER und TOWER¹⁾ als Funktion der Temperatur untersucht. Die Beobachtungsergebnisse sind in Fig. 5 zusammengestellt. Die Absolutwerte der Polarisation sind allerdings erheblich niedriger als die früher angegebenen. Diese Unsicherheit rührt zum grössten Teil von der sehr störenden Erscheinung her, dass die Kristalle während der Aufnahme der Hysteresis-Kurve sehr häufig innerlich zersplittern, so dass die Bestimmung der wirksamen Elektrodenfläche unsicher wird. Qualitativ stimmen jedoch die auf diese Weise gefundenen Ergebnisse mit den Brückenmessungen völlig überein. Der maximale dielektrische Verlust tritt beim KH_2PO_4 bei ca. 60 °K auf und erreicht dort 3 Joule/cm³ pro Periode. Eine Diskussion von Hysteresis-Erscheinungen findet sich auch in einer Arbeit von BANTLE²⁾, auf welche wir hier hinweisen möchten.

Zum Schluss möchten wir den Herren Prof. SCHERRER und Prof. COCKCROFT in Cambridge für das rege Interesse, das sie dieser Arbeit entgegenbrachten herzlichst danken.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

¹⁾ C. B. SAWYER und C. H. TOWER, Phys. Rev. **35**, 269 (1930).

²⁾ W. BANTLE, H.P.A. **4**, 373 (1942).

Bericht über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft

in Sion, am 30. August 1942.

(anlässlich der 122. Jahresversammlung der S. N. G.)

Präsident: Prof. Dr. J. WEIGLE (Genf).

Vizepräsident: Prof. Dr. H. KÖNIG (Bern).

Sekretär: Prof. Dr. E. MIESCHER (Basel):

Geschäftlicher Teil.

In die S. P. G. wurden aufgenommen:

Ordentliche Mitglieder: HH. S. H. METZGER, Dipl.-Ing. (Fribourg); D. MÄDER (Basel).

Kollektivmitglied: Armeekommando, Sekt. für mat. u. techn. Angelegenheiten.

Die S. P. G. hat durch den Tod verloren:

Prof. CH. EUG. GUYE (Genf), Ehrenmitglied; Prof. Gentile (Milano).

Aus der S. P. G. ist ausgetreten:

R. STUCKY (Lausanne).

Die S. P. G. zählt zur Zeit 245 Mitglieder.

Wissenschaftlicher Teil.

Remarque sur la dynamique des fluides visqueux

par ANDRÉ MERCIER (Berne).

Soit \vec{v} la vitesse dans le mouvement d'un fluide, ρ la densité, $-3p$ la trace du tenseur des tensions internes, \vec{F} la force appliquée par unité de masse, μ le coefficient de viscosité et t le temps. Soit $\vec{\omega}$ le vecteur du tourbillon. A partir de l'équation de NAVIER-

STOKES et d'une identité vectorielle, on établit l'équation la plus générale pour l'évolution du tourbillon, que voici:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{1}{2} \nabla \times \left[\vec{F} - \frac{\nabla p}{\varrho} + \frac{\mu}{\varrho} \left\{ \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \vec{v} \right\} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

On n'en trouve dans les ouvrages que des cas particuliers, par exemple pour $\vec{F} = -\nabla \varphi$ et $\varrho = \text{const.}$ (DUHEM¹⁾), auquel cas on montre l'impossibilité de créer un tourbillon dans le sein du liquide.

Il n'existe probablement pas de phénomènes naturels lors desquels on ait $\nabla \times \vec{F} \neq 0$. Tenant compte de l'équation de continuité en l'absence de sources et de puits et négligeant $\nabla \times \vec{F}$, on déduit de (1) l'équation que voici:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\vec{\omega}}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{2} \nabla \frac{1}{\varrho} \times \nabla p \\ & + \frac{\mu}{2\varrho} \Delta \vec{\omega} + \frac{\mu}{2} \nabla \frac{1}{\varrho} \times \Delta \vec{v} + \frac{\mu}{6\varrho} \nabla \frac{1}{\varrho} \times \nabla \left(\frac{d\varrho}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Il se produit un tourbillon si, $\vec{\omega}$ étant nul au temps $t=0$, $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$ est différent de zéro au même instant. La création d'un tourbillon au sein du liquide est donc conditionnée par la relation suivante:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \right)_{t=0} = \frac{1}{2} \nabla \frac{1}{\varrho} \times \nabla p \\ & + \frac{\mu}{2} \nabla \frac{1}{\varrho} \times \Delta \vec{v} + \frac{\mu}{6\varrho} \nabla \frac{1}{\varrho} \times \nabla \left(\frac{d\varrho}{dt} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Il faut et suffit qu'au moins l'un des trois termes du second membre de (3) soit différent de zéro, pour qu'un tourbillon se forme ailleurs qu'à la surface d'un obstacle:

1^o $\nabla \frac{1}{\varrho} \times \nabla p \neq 0$. Il faut pour cela que $\varrho \neq \varrho(p)$. Cela se produit vraisemblablement dans l'atmosphère, dans les océans ou peut-être à l'intérieur des astres, même si l'on peut écrire $\mu = 0$.

2^o Même si $\varrho = \varrho(p)$, il se peut que $\nabla \frac{1}{\varrho}$ ne soit pas parallèle à $\Delta \vec{v}$. Si alors $\mu \neq 0$, on peut rendre la viscosité responsable de la

¹⁾ P. DUHEM, Recherches sur l'hydrodynamiques, II (Paris, 1904). JAFFÉ (Physik. ZS. 21, 541, 1920) a retrouvé les résultats de DUHEM et a examiné la question de la formation des tourbillons dans un cas particulier.

formation des tourbillons (contrairement à une proposition émise dans certains ouvrages).

3° Même si $\varrho = \varrho(p)$, il se peut aussi que $\nabla \frac{1}{\varrho}$ ne soit pas parallèle à $\nabla \left(\frac{d\varrho}{dt} \right)$. Si alors $\mu \neq 0$, on peut de nouveau rendre la viscosité responsable de la formation de tourbillons. Mais comme dans de nombreux cas on peut considérer la variation spatio-temporelle de ϱ comme la propagation lente d'une onde plus ou moins sphérique, cette condition est vraisemblablement rarement réalisée dans la nature.

Les remarques qui précèdent doivent avoir de l'importance dans les problèmes concernant des fluides suffisamment compressibles, et en particulier en géophysique, car les tourbillons qui se forment dans l'atmosphère, dans les masses d'eau ou à l'intérieur des astres fluides ne peuvent être dûs, dans de nombreux cas, à la présence de corps solides formant obstacle.

Sur la théorie de l'effet de la température sur la diffraction des rayons X

par K. BLEULER et J. WEIGLE (Genève).

(Erscheint demnächst in den Helv. Phys. Acta.)

Über eine Methode zur Messung zeitlich rasch veränderlicher Spektren

VON D. MAEDER und E. MIESCHER (Basel).

Bei der plötzlichen Erregung oder Unterbrechung von Spektren ist in vielen Fällen zu erwarten, dass eine Untersuchung des zeitlichen Verlaufes wertvolle neue Aussagen liefern würde. Insbesondere haben MIESCHER¹⁾, OLDENBURG²⁾ und andere Autoren bereits nach einer von DORGEL³⁾ angegebenen Methode Absorptionsspektren kurzlebiger Radikale erhalten, welche bei der gewöhnlichen, über lange Zeit gemittelten Beobachtungsweise nicht gefunden werden können. Diese Methode geht davon aus, dass solche Radikale durch eine elektrische Entladung leicht in genügender Anzahl zu erzeugen sind, wobei aber stets deren Emissionsspektren auftreten. Die elektrische Anregung wurde durch einen mechanischen Schalter plötzlich unterbrochen und kurze Zeit später das Absorptionsspektrum der dann noch vorhandenen kurzlebigen Partikel aufgenommen. Das Zeitintervall zwischen Abschaltmoment und Aufnahme

¹⁾ E. MIESCHER, Helv. Phys. Acta **9**, 693, 1936.

²⁾ O. OLDENBURG, Journ. Chem. Phys. **3**, 266, 1935.

³⁾ H. B. DORGEL, Zeitschr. f. Phys. **34**, 766, 1925.

war definiert mittels einer rotierenden Blende, die starr mit dem Schalter verbunden war. Aus Intensitätsgründen musste der ganze Vorgang etwa 10^3 mal wiederholt werden. Die zeitliche Auflösung betrug 10^{-3} sec; um den ganzen zeitlichen Verlauf der Absorptionsspektren zu erhalten, mussten viele einzelne solcher Aufnahmen mit verschiedenen langen Zeitintervallen zwischen Abschaltmoment und Aufnahme gemacht werden.

Die im folgenden beschriebene Verbesserung der Methode gestattet einerseits, das zeitliche Auflösungsvermögen um mehrere Zehnerpotenzen zu steigern, und liefert anderseits mit einer einzigen Aufnahme schon den ganzen zeitlichen Verlauf des untersuchten Spektrums. Die gleiche Anordnung lässt sich auch zur zeitlichen Verfolgung des Entstehens oder Abklingens von Emissionsspektren verwenden.

Der Kunstgriff der neuen Apparatur besteht darin, dass die rotierende Blende durch einen Drehspiegel ersetzt ist. Indem der Drehspiegel das vom Absorptionsgefäss herkommende Lichtbündel in der Längsrichtung des Spektrographenspaltes über diesen hinwegbewegt, entsteht ein breites Spektrum, dessen verschiedene Zonen verschiedenen Zeiten entsprechen. Die kleinste, mit einer solchen Anordnung noch unterscheidbare Zeit ist

$$\Delta t = \frac{\text{Durchmesser d. beleuchteten Stelle d. Spektrographenspaltes}}{\text{Lineargeschwindigkeit längs des Spektrographenspaltes}}$$

und erreicht leicht Werte von 10^{-5} bis 10^{-6} sec. Das vergrößerte zeitliche Auflösungsvermögen erfordert anderseits eine entsprechend grössere Anzahl von Wiederholungen, nämlich etwa 10^5 bzw. 10^6 (totale Belichtungszeit jeder einzelnen Stelle etwa 1 sec). Um diese wesentlich erhöhte Anzahl Wiederholungen des Abschaltvorganges dennoch innert absehbarer Zeit durchführen zu können, wurde statt des einfachen Drehspiegels ein 8-flächiger Polygonspiegel verwendet. Praktisch ist dann noch eine Betriebsdauer der Grössenordnung 10 min für eine Absorptionaufnahme erforderlich.

Damit die theoretisch mögliche zeitliche Auflösung der optischen Einrichtung von z. B. 10^{-5} sec tatsächlich ausgenützt wird, muss im Absorptionsgefäss eine elektrische Leistung von der Grössenordnung $10\,000\text{ V} \cdot 1\text{ A} = 10\text{ kW}$ bei jedem Spiegeldurchgang innerhalb 10^{-5} sec vollständig ausgeschaltet werden, wobei der Abschaltmoment jedesmal genau derselben Stellung des jeweils reflektierenden Teils des Polygonspiegels entsprechen muss. Mit einem rotierenden Schalter auf der Achse des Polygonspiegels lässt sich dies, ganz abgesehen von der Funkenbildung, aus Gründen der Herstellungsgenauigkeit nicht mehr erreichen. Diese Schwierigkeit

fällt weg bei Verwendung einer Photozelle, welche durch eine Hilfslichtquelle über die gleiche Fläche des Polygonspiegels, die sich jeweils auch im Hauptstrahlengang befindet, intermittierend belichtet wird. Die Photozelle vermag zwar nur schwache Steuerimpulse zu liefern; dafür ist aber die Synchronisation eine vollkommene, die Abweichungen des Spiegels vom regulären Polygon eliminieren sich selbst. Als Hauptproblem verbleibt nun die Notwendigkeit einer sowohl in bezug auf Spannungen als auch auf Ströme etwa 10^5 -fachen Verstärkung der rechteckigen Photozellenimpulse, wobei die Zeitkonstante der ganzen Apparatur 10^{-5} sec nicht wesentlich überschreiten darf. Da bei der zu erreichenden beträchtlichen Endleistung (10 kW) für die 10^{10} -fache Leistungsverstärkung mindestens 5 Verstärkerstufen nötig sind, muss die Zeitkonstante jeder einzelnen Verstärkerstufe sogar in der Größenordnung 10^{-6} sec liegen. Diese Schwierigkeit führte zur Verwendung von Hochfrequenz als Träger der zu verstärkenden Impulse. Nach einer aperiodischen Vorverstärkung modulieren die Impulse eine in einem Hilfssender erzeugte Hochfrequenzschwingung. Die weitere Verstärkung geschieht in einem 2-stufigen Leistungsverstärker, wobei die Abklingdauern der Hochfrequenzkreise praktisch zu vernachlässigen sind (Frequenz 10^7 sec $^{-1}$). Die auf mehrere 100 W verstärkten Impulse gelangen dann auf das Gitter der Endröhre — einer Gross-Senderöhre vom Typ MA $4/_{600}$, welche dem Basler Institut von der PHILIPS-Vertretung in Zürich freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurde — und diese ist direkt in Serie mit dem Absorptionsrohr geschaltet.

An Ergebnissen liegen vorläufig Absorptionsaufnahmen des Radikals BCl (Lebensdauer ca. 10^{-3} sec) vor. Beim Abklingen des Emissionsspektrums von SnCl zeigten sich ferner Sn-Linien von eindeutig sehr verschiedener Lebensdauer (ca. 10^{-5} sec, bzw. $> 10^{-4}$ sec). Die Absorptionsversuche werden fortgesetzt.

Le rôle de l'invariance spinorielle et l'invariance de jauge dans un nouveau principe fondamental¹⁾

par E. C. G. STUECKELBERG (Genève).

1^o Pour décrire des lois physiques, on doit introduire un système de coordonnées spatio-temporel $(\tilde{x}, ct) = (x^1, x^2, x^3, x^4 = ct)$

¹⁾ STUECKELBERG, *Une nouvelle mécanique du point*. Helv. Phys. Acta **14**, 321 (1941); **14**, 588 (1941) mentionné comme I; **15**, 23 (1942) mentionné comme II. — *Une nouvelle mécanique des champs*. Helv. Phys. Acta **15**, 327 (1942), mentionné comme III.

D'ailleurs, le rôle que joue la célérité des ondes acoustiques ou sismiques dans les phénomènes de transition d'un milieu matériel à l'autre ne correspond nullement au rôle joué par la célérité dans les formules de Fresnel. Il y a donc là une anomalie qui doit être éclaircie. Elle l'est par les considérations suivantes.

Remplaçons ε et μ par deux nouvelles constantes définies comme suit:

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \qquad \mathfrak{R} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (1)$$

la première n'est autre que la *célérité de phase* de l'onde; la seconde constante est nouvelle et sera nommée *résistance d'onde*. Au moyen de ces nouvelles constantes qui caractérisent aussi bien le milieu que ε et μ , les équations de Maxwell prennent la forme suivante:

$$\frac{\mathfrak{R}}{u} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} \qquad - \frac{1}{\mathfrak{R}u} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} \quad (2)$$

dans laquelle on postule les unités de Lorentz. De ces nouvelles formes on déduit que dans une onde plane harmonique, le rapport des amplitudes des champs magnétique et électrique est justement égal à \mathfrak{R} . Considérant que le champ électrique est l'effet (d'induction) du champ magnétique (considéré comme la cause), on voit que \mathfrak{R} est bien la mesure d'une résistance.

Appliquons maintenant les conditions classiques de continuité et d'unicité à la surface de séparation de deux milieux homogènes (dont les grandeurs correspondantes seront affectées des indices 1 et 2); les célérités et les résistances d'onde interviennent par leurs rapports que l'on abrège par n et m :

$$n = \frac{u_1}{u_2} \qquad m = \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} \quad (3)$$

Désignant encore par φ , φ' et ψ les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction, on retrouve tout d'abord les conditions de Descartes:

$$\varphi' = \varphi \qquad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n \quad (4)$$

Puis, en affectant de l'indice t les composantes des champs parallèles au plan de séparation, et de l'indice n les composantes normales aux premières, on obtient finalement pour l'onde réfléchie:

$$E'_t = E_t^0 \left\{ \frac{1 - m \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}}{1 + m \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \right\} \quad E'_n = E_n^0 \left\{ \frac{m - \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}}{m + \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \right\}$$

et pour l'onde transmise:

$$E''_t = E_t^0 \left\{ \frac{2}{1 + m \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \right\} \quad E''_n = E_n^0 \left\{ \frac{2}{m + \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \right\}$$

Ces deux groupes de formules constituent une généralisation de celles de Fresnel; elles font apparaître d'une façon très nette le rôle important des résistances d'onde (sous la forme de leur rapport), rôle qui correspond complètement à celui des résistivités acoustiques dans la théorie des ondes séismiques.

Deux conséquences intéressantes de ces formules:

1^o La surface de séparation de deux milieux vitreux dont les indices de réfraction sont différents, mais les résistances d'onde identiques, n'est la source d'aucune réflexion lorsque l'incidence est normale.

2^o Si les milieux possèdent le même indice de réfraction mais des résistances d'onde différentes, il apparaît un rayon réfléchi dont l'intensité est indépendante de l'azimut de polarisation et, fait plus surprenant, indépendant de l'angle d'incidence. La condition à réaliser dans ce cas est

$$\varepsilon_1 \mu_1 = \varepsilon_2 \mu_2 \quad \mu_1 \neq \mu_2 \quad (6)$$

Enfin il est évident que si l'on identifie les perméabilités magnétiques des deux milieux, on retrouve les formules classiques de Fresnel, avec toutes les conséquences particulières qu'elles comportent. On sait que les perméabilités des différents corps vitreux (au sens de l'optique) sont pratiquement toutes égales dans le domaine de la lumière visible; c'est donc en dehors de ce domaine qu'il faudra chercher pour observer les particularités signalées plus haut.

On peut encore se libérer de la condition de ne considérer que des corps isolants; en appliquant la méthode habituelle des grandeurs complexes, l'indice de réfraction (et la célérité de phase) devient alors complexe, ce qui s'interprète par l'extinction de l'onde. Il en sera de même de la résistance d'onde qui, tout naturellement, prendra le nom d'*impédance d'onde*, et sera l'expression du déphasage entre le champ magnétique et électrique. On pourra par cette extension étudier les phénomènes de réflexion et réfraction métallique dans le cas général.

D'ailleurs, le rôle que joue la célérité des ondes acoustiques ou sismiques dans les phénomènes de transition d'un milieu matériel à l'autre ne correspond nullement au rôle joué par la célérité dans les formules de Fresnel. Il y a donc là une anomalie qui doit être éclaircie. Elle l'est par les considérations suivantes.

Remplaçons ε et μ par deux nouvelles constantes définies comme suit:

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \qquad \mathfrak{R} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \qquad (1)$$

la première n'est autre que la *célérité de phase* de l'onde; la seconde constante est nouvelle et sera nommée *résistance d'onde*. Au moyen de ces nouvelles constantes qui caractérisent aussi bien le milieu que ε et μ , les équations de Maxwell prennent la forme suivante:

$$\frac{\mathfrak{R}}{u} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} \qquad - \frac{1}{\mathfrak{R}u} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} \qquad (2)$$

dans laquelle on postule les unités de Lorentz. De ces nouvelles formes on déduit que dans une onde plane harmonique, le rapport des amplitudes des champs magnétique et électrique est justement égal à \mathfrak{R} . Considérant que le champ électrique est l'effet (d'induction) du champ magnétique (considéré comme la cause), on voit que \mathfrak{R} est bien la mesure d'une résistance.

Appliquons maintenant les conditions classiques de continuité et d'unicité à la surface de séparation de deux milieux homogènes (dont les grandeurs correspondantes seront affectées des indices 1 et 2); les célérités et les résistances d'onde interviennent par leurs rapports que l'on abrège par n et m :

$$n = \frac{u_1}{u_2} \qquad m = \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} \qquad (3)$$

Désignant encore par φ , φ' et ψ les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction, on retrouve tout d'abord les conditions de Descartes:

$$\varphi' = \varphi \qquad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n \qquad (4)$$

Puis, en affectant de l'indice t les composantes des champs parallèles au plan de séparation, et de l'indice n les composantes normales aux premières, on obtient finalement pour l'onde réfléchie:

$$E'_t = E_t^0 \left\{ \frac{1 - m \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}}{1 + m \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \right\} \quad E'_n = E_n^0 \left\{ \frac{m - \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}}{m + \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \right\}$$

et pour l'onde transmise: (5)

$$E''_t = E_t^0 \left\{ \frac{2}{1 + m \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \right\} \quad E''_n = E_n^0 \left\{ \frac{2}{m + \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \right\}$$

Ces deux groupes de formules constituent une généralisation de celles de Fresnel; elles font apparaître d'une façon très nette le rôle important des résistances d'onde (sous la forme de leur rapport), rôle qui correspond complètement à celui des résistivités acoustiques dans la théorie des ondes séismiques.

Deux conséquences intéressantes de ces formules:

1° La surface de séparation de deux milieux vitreux dont les indices de réfraction sont différents, mais les résistances d'onde identiques, n'est la source d'aucune réflexion lorsque l'incidence est normale.

2° Si les milieux possèdent le même indice de réfraction mais des résistances d'onde différentes, il apparaît un rayon réfléchi dont l'intensité est indépendante de l'azimut de polarisation et, fait plus surprenant, indépendant de l'angle d'incidence. La condition à réaliser dans ce cas est

$$\varepsilon_1 \mu_1 = \varepsilon_2 \mu_2 \quad \mu_1 \neq \mu_2 \quad (6)$$

Enfin il est évident que si l'on identifie les perméabilités magnétiques des deux milieux, on retrouve les formules classiques de Fresnel, avec toutes les conséquences particulières qu'elles comportent. On sait que les perméabilités des différents corps vitreux (au sens de l'optique) sont pratiquement toutes égales dans le domaine de la lumière visible; c'est donc en dehors de ce domaine qu'il faudra chercher pour observer les particularités signalées plus haut.

On peut encore se libérer de la condition de ne considérer que des corps isolants; en appliquant la méthode habituelle des grandeurs complexes, l'indice de réfraction (et la célérité de phase) devient alors complexe, ce qui s'interprète par l'extinction de l'onde. Il en sera de même de la résistance d'onde qui, tout naturellement, prendra le nom d'*impédance d'onde*, et sera l'expression du déphasage entre le champ magnétique et électrique. On pourra par cette extension étudier les phénomènes de réflexion et réfraction métallique dans le cas général.

L'extension aux phénomènes d'anisotropie est également prévue, ce qui permettra d'étudier de plus près ce qui se passe à la surface de cristaux fortement magnétiques.

Über den Spannungsaufbau im Kaskaden-Generator

von H. GREINACHER, Bern.

Im Kaskadengenerator für Höchstspannungen wird eine von den Schaltungen benutzt, die ich 1920 beschrieben habe¹, und welche eine Spannungsvervielfachung mit Hilfe von Kondensatoren und Ventilen bezweckt. Es wurde damals schon das allgemeine Prinzip entwickelt und der Aufladevorgang an Modellen, die bis zur Verzehnfachung gebaut wurden, experimentell untersucht. Im Hinblick auf die Bedeutung, welche die Kaskadenschaltung in neuerer Zeit erlangt hat, habe ich die Frage nach dem Aufladevorgang im Generator neuerdings wieder aufgegriffen, und zunächst Herrn M. JAGGI veranlasst, Untersuchungen an der Zweifach- und Vierfach-Schaltung auszuführen²). Gewöhnlich wird der Generator mit einer geraden Zahl von Kondensatoren bzw. Ventilen ausgeführt, und wird demgemäss eine Schaltung mit $2n$ Kondensatoren als n -stufig bezeichnet. Dem liegt die Anschauung zu-

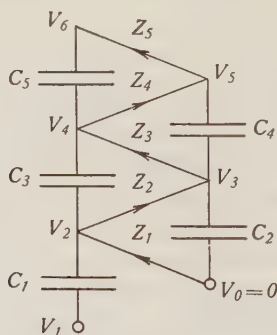


Fig. 1.

grunde, dass die Kondensatoren rechts (Fig. 1) als Sammler, die links als Schubkondensatoren dienen. In der Tat nehmen alle Punkte der rechten Reihe im stationären Zustande konstante Po-

¹) H. GREINACHER, Bulletin S.E.V. 1920, Heft 3. Verh. der Deutsch. Phys. Ges. **4**, 195, 1921. D.R.P. Nr. 422230.

²) M. JAGGI, H.P.A. **15**, 339, 1942.

tentiale an, während die der linken um $2V$ (V = Scheitelspannung) oszillieren. Man kann aber ebensogut $V_1 = 0$ machen und V_0 mit der Wechselspannung verbinden. Dann vertauschen sich die Rollen. Man wird also, um über die Funktionsweise der Kondensatoren ins Klare zu kommen, nicht die Potentiale, sondern die *Differenzen* an der rechten Reihe, d. h. V_5 und an der linken, d. h. $V_6 - V_1 = V_{61}$ miteinander verglichen müssen.

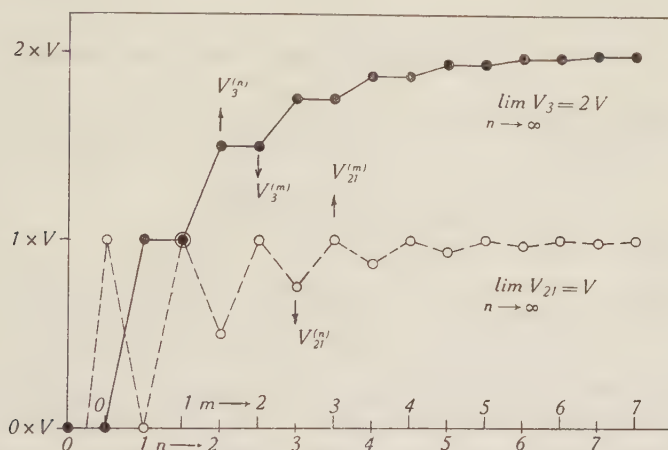


Fig. 2.

In Fig. 2 ist der einfachste Fall der *Zweifach-Schaltung* wieder gegeben. Angenommen ist, dass anfangs alle Punkte das Potential 0 besitzen, mit Ausnahme von V_1 , an dem in diesem Moment $+V$ liege. n = Zahl der Spannungsstöße, m = Zahl der Senkungen. Resultat: C_2 ladet sich treppenförmig auf, ist also reiner Sammler, C_1 hingegen ladet sich oszillierend auf. Die Aufladeformel für den allgemeinen Fall, dass $C_2 = q \cdot C_1$, lautet

$$V_3^{(n)} = V_3^{(m)} = 2V \left[1 - \left(\frac{q}{1+q} \right)^n \right] \quad (1)$$

In der Zeichnung sowie auch im folgenden sind alle Kondensatoren als gleich gross angenommen.

Anders verhält sich nun z. B. der *Fünffach-Generator* (Fig. 1). Hier gelten die Aufladeformeln:

$$V_{61}^{(n)} = 5V - \frac{2}{5}V \left[(7 + 3\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right)^n + (7 - 3\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right)^n \right] \quad (2)$$

$$V_{61}^{(m)} = 5 V - \frac{2}{5} V \left[(5 - 2\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right)^n + (5 - 2\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right)^n \right] \quad (3)$$

$$V_5^{(n)} = 4 V - \frac{2}{5} V \left[(5 + \sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right)^n + (5 - \sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right)^n \right] \quad (4)$$

$$V_5^{(m)} = 4 V - \frac{2}{5} V \left[(5 + 2\sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right)^n + (5 - 2\sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right)^n \right] \quad (5)$$

Als Welligkeit der Aufladung kann man bezeichnen:

$$V_{61}^{(n)} - V_{61}^{(m)} = \Delta V_{61} = -\frac{2}{5} V \left[(2 + \sqrt{5}) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right)^n + (2 - \sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right)^n \right] \quad (6)$$

$$V_5^{(n)} - V_5^{(m)} = \Delta V_5 = +\frac{2}{5} V \left[\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right)^n - \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right)^n \right] \quad (7)$$

Die Potentialwerte bis $n = m = 12$ sind in Fig. 3 aufgetragen. Die Aufladung erfolgt wesentlich langsamer als bei der Zweifach-Schaltung. Beachtenswert ist der Umstand, dass *beide* Kondensatorenreihen sich oszillierend aufladen. Sie arbeiten übrigens im Gegenakt. Die Welligkeit ΔV_{61} ist nur wenig grösser als ΔV_5 . Wie schon in der Originalmitteilung¹⁾ ausgeführt, übernehmen also schliesslich alle Kondensatoren beide Funktionen.

Es seien noch die entsprechenden Formeln für die *Dreifach-Schaltung* wiedergegeben:

$$V_{41}^{(n)} = 3 V \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \right] \quad (8) \quad V_3^{(n)} = 2 V \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] \quad (10)$$

$$V_{41}^{(m)} = 3 V \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \right] \quad (9) \quad V_3^{(m)} = 2 V \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] \quad (11)$$

Schon hier haben wir an allen Punkten oszillierenden Verlauf.

Die Schnelligkeit des Spannungsaufbaus $\frac{dV^{(n)}}{dn}$ und damit die Kenntnis der Funktion $V^{(n)}$ ist offenbar für die Beurteilung der Stromnachlieferung bei belastetem Generator wichtig. In dieser Hinsicht interessiert auch das *Arbeiten des Eingangsventils* Z_1 , durch

das sämtliche Elektrizität in den Generator eintritt. Sinkt die Spannung an V_1 von $+V$ auf $-V$, so nimmt V_2 erst auf 0 ab, worauf sich dann Z_1 öffnet. Nennen wir den Bruchteil der Spannungssenkung $2V$, während dessen Z_1 geöffnet ist, β , so finden wir der Reihe nach folgende Werte:

Für die 2fach-Schaltung $\beta_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (12)

„ „ 3 „ „ „ $\beta_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ (13)

„ „ 4 „ „ „ $\beta_4 = \frac{1}{12} \left[\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \right]$ (14)

„ „ 5 „ „ „ $\beta_5 = \frac{1}{24} \left[\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8}\right)^{n-2} + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right)^{n-2} \right]$ (15)

Da mit zunehmender Länge der Kaskade die Stromlieferung ungünstiger wird, kann man, wie früher schon gezeigt¹⁾, mit Vorteil

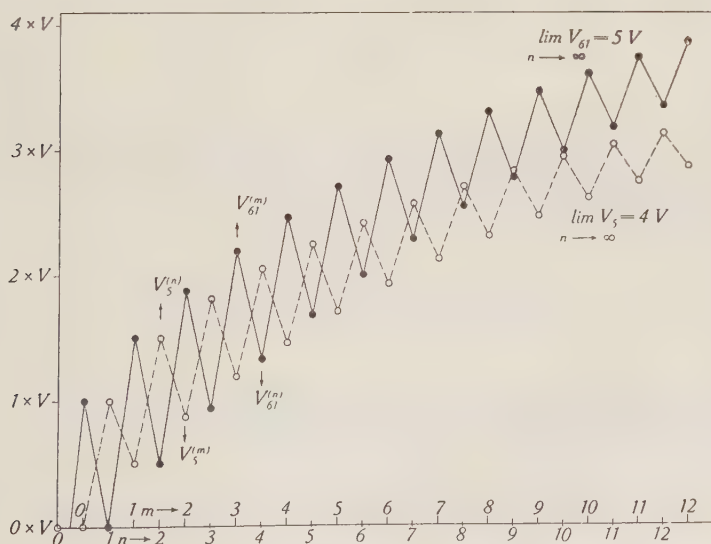


Fig. 3.

die Kaskade in zwei Hälften aufteilen, die beide an V_1 und V_0 angeschlossen, sich je in umgekehrtem Sinne aufladen. Eine solche *doppelt wirkende Kaskade* besitzt auch eine geringere Welligkeit der

Aufladung. Geben z. B. Fig. 2 und 3 die Aufladekurven für die eine Hälfte wieder, dann wären die der zweiten spiegelbildlich nach unten aufzutragen, und zwar um eine halbe Periode nach links versetzt. Die Gesamtspannung wäre dann $V^{(n)} + V^{(m)}$ ($n = m$), bzw. $V^{(n)} + V^{(m)}$ ($n = m + 1$).

Der Hauptvorteil der Kaskadenschaltung für Höchstspannungen besteht in dem Umstand, dass die Gesamtspannung sich immer gleichmässig auf die Kondensatorenreihe verteilt. Dies ist bei der schon von SCHENKEL angegebenen Schaltung³⁾, die man als *Pyramidenschaltung* bezeichnen könnte (Fig. 4), nicht der Fall.

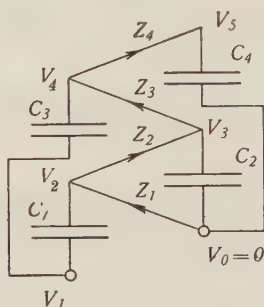


Fig. 4.

Hier muss der letzte Kondensator die ganze Spannung aushalten. Man kann aber zeigen, dass trotz der Verschiedenheit der Anordnung die Aufladefunktion der Vierfachpyramiden- und Kaskaden-Schaltung genau die gleiche ist. Sie lautet

$$V_5^{(n)} = 4 V \left[1 - \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)^{n+1} - \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)^{n+1} \right] \quad (16)$$

Die Stromlieferung ist indessen nicht dieselbe, denn bei der Pyramidenschaltung besitzt β den grösseren Wert

$$\beta'_4 = \sqrt{2} V \left[\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)^n - \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)^n \right] \quad (17)$$

Eine ausführliche Veröffentlichung der Resultate soll demnächst in einer technischen Zeitschrift erfolgen.

³⁾ SCHENKEL, Elektrotechn. ZS. 40, 333, 1919.

Zur Lösung des Raumproblems

von LÉON SCHAMES (Genf).

GAUSS hatte nach Einführung der nach ihm genannten Koordinaten angenommen, dass die Beobachtungen von geodätischen oder astronomischen Dreiecken eine Differenz zwischen der experimentellen Winkelsumme und 2 Rechten würden feststellen lassen, um so zu beweisen, dass der wirkliche Raum vom Euklid'schen verschieden sei. Das von ihm angestellte Experiment ergab aber zwei Rechte als Winkelsumme.

Von 1900 ab ist die Möglichkeit, dass der Raum im Grossen sphärisch und geschlossen sei, wiederholt erörtert worden. So hat SCHWARZSCHILD¹⁾ versucht, aus astronomischen Daten den noch zulässigen Wert der Krümmung zu berechnen. HARZER²⁾ hat den sphärisch-geschlossenen Raum vertreten und aus ihm gefolgert, dass das Licht auf einem grössten Kreis zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren müsse.

Inzwischen hatte POINCARÉ³⁾ den entgegengesetzten Standpunkt vertreten. Die Frage, ob die Euklid'sche oder die Nicht-Euklid'sche Geometrie richtig sei, hält er für sinnlos. „Eine Geometrie kann nicht richtiger sein als die andere, sie kann nur bequemer sein“. Demnach ist auch ein experimenteller Entscheid zwischen den Geometrien unmöglich.

Die grossen Erfolge der Einstein'schen allgemeinen Relativitätstheorie liessen POINCARÉ's Standpunkt in den Hintergrund treten. Für das statische Universum EINSTEIN's ergaben sich im Unendlichen zuerst die gleichen Schwierigkeiten wie nach der Newton'schen Theorie. Um diese Schwierigkeiten zu überwinden, führte EINSTEIN ein kosmologisches Glied mit der kosmologischen Konstanten λ ein, durch welches der Raum im Grossen zum sphärisch-geschlossenen wurde.

FRIEDMANN⁴⁾ und unabhängig von ihm LEMAITRE⁵⁾ erweiterten die Einstein'schen Feldgleichungen der Gravitation auf nicht-statische Systeme. LEMAITRE zeigte auch, dass diese so zu einer Expansion der Welt führen in Übereinstimmung mit der Hubblé'schen Beziehung. Für nicht-statische Systeme ist nun aber λ über-

1) K. SCHWARZSCHILD, Viertelj.schrift d. Astr. Ges. Leipzig **35**, 337 (1900).

2) P. HARZER, Die Sterne und der Raum. Rekt. Antr. Vortrag, Kiel (1908).

3) H. POINCARÉ, La Science et l'Hypothèse (1902).

4) A. FRIEDMANN, Z. f. Phys. **10**, 377 (1922).

5) G. LEMAITRE, Ann. Soc. Scient. Bruxelles **47**, sér. A (1927).

flüssig, worauf EINSTEIN⁶⁾ selbst hinwies. Im Anschluss daran zeigte HECKMANN⁷⁾, dass die nicht-statischen Lösungen nicht unbedingt zu einer positiven Raumkrümmung führen, sondern dass diese ebensogut negativ oder null sein kann. Er kommt zu dem Schluss: „Sowohl λ als auch C (Krümmungsmass) fungieren als völlig überzählige Konstante, die in keiner Weise durch die Materie festzulegen sind“. Daraufhin berechneten EINSTEIN und DE SITTER⁸⁾ für den Fall des ebenen Raumes, also $\lambda = C = 0$, mittels der Hubble'schen Beziehung die mittlere Massendichte ϱ zu $4 \cdot 10^{-28}$ g/cm⁻³. Obwohl dieser Wert mit den Beobachtungen verträglich ist, glauben sie, dass spätere, genauere Werte für die Massendichte und für den Expansionskoeffizienten eine Festlegung des Vorzeichens und der Grösse der Raumkrümmung ermöglichen werden.

Was bedeutet es nun eigentlich vom erkenntnistheoretischen Standpunkte aus, einen „gekrümmten Raum“ zu benutzen? Letzten Endes bedeutet es nichts anderes, als die Einführung gekrümmter Koordinaten. Nun ist es aber allgemein anerkannt, dass die Wahl des Koordinatensystems ganz willkürlich und nur durch Zweckmässigkeitsgründe beherrscht ist. Mit dem Koordinatensystem ist auch der Raum und folglich auch die Geometrie frei wählbar.

Demnach hat die oft gestellte Frage, ob der Raum im Grossen eben oder gekrümmt sei, keinen Sinn. Die Frage, ob die Krümmung experimentell bestimmbar sei, ist zu verneinen. Die von GAUSS ausgehende, von SCHWARZSCHILD, HARZER und EINSTEIN vertretene Ansicht, dass sich die Raumkrümmung aus empirischen Daten berechnen lässt, ist also nicht aufrecht zu erhalten.

Nachträglich fanden wir, dass der hier vertretene Standpunkt auch derjenige ist, welcher MILNE seinem Buche „Relativität, Gravitation und Weltstruktur“ zugrunde gelegt hat. Nach MILNE erscheint im unendlichen, euklidischen Raum das Universum endlich und zwar kugelförmig. Es dehnt sich entsprechend der Hubble'schen Beziehung aus. Dabei darf aber nicht unerwähnt bleiben, dass HUBBLE in seinen bisher letzten Arbeiten⁹⁾ ernste Zweifel ausspricht, ob es berechtigt ist, die Rotverschiebung im Spektrum der Nebel als Dopplereffekt zu deuten. Damit ist die Frage nach der Expansion der Welt eine zur Zeit offene Frage.

⁶⁾ A. EINSTEIN, Sitz.ber. Preuss. Ak. d. Wiss., Phys.-Math. Kl. **12**, S.235 (1931).

⁷⁾ O. HECKMANN, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen. Phys.-Math. Kl. 1931, S. 126.

⁸⁾ A. EINSTEIN und W. DE SITTER, Proc. Nat. Ac. of Sciences **18**, 213 (1932).

⁹⁾ E. P. HUBBLE & R. C. TOLMAN, Astrophys. Journ. 1936, **82**, 302. — E. P. HUBBLE, Astrophys. Journ. 1936, **84**, 517.

Über eine Standardsubstanz für optische Absorptionsmessungen

H. v. HALBAN und K. WIELAND (Zürich).

Die von Zeit zu Zeit unbedingt notwendige Überprüfung spektrophographischer Apparaturen, mit denen quantitative Absorptionskurven aufgenommen werden sollen, erfordert das Vorhandensein geeigneter Standardsubstanzen mit genau bekannten Absorptionswerten. Für Absorptionsmessungen im *ultravioletten* Spektralbereich haben sich zu diesem Zwecke Kaliumchromat und neuerdings auch Pikrat vorzüglich bewährt¹). Für das *sichtbare* Spektralgebiet dagegen scheint bisher keine geeignete Standardsubstanz vorzuliegen. Wir möchten hiermit für diesen Zweck *Astraphloxin-Perchlorat*²) (Bruttoformel $C_{25}H_{29}N_2ClO_4$), das für unsere Bedürfnisse genügend wasserlöslich ist, in Vorschlag bringen.

Eine Standardsubstanz für optische Absorptionsmessungen sollte den folgenden Anforderungen genügen:

1. Eine — wenn möglich wässrige — Lösung der Substanz muss im gewünschten Spektralbereich (in unserem Falle 7000 bis

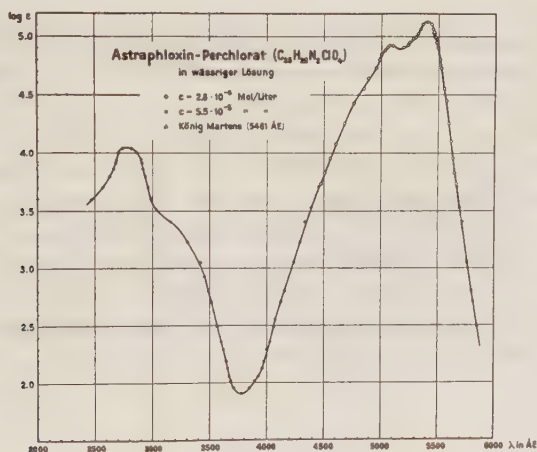


Fig. 1.

4000 ÅE) ein geeignetes Absorptionsspektrum besitzen (breite, jedoch nicht zu flache Maxima und Minima mit hohen Absorptionswerten, keine engen Banden). Die in Fig. 1 wiedergegebene Ab-

¹) H. v. HALBAN, G. KORTÜM u. B. SZIGETI, Z. Elektrochem. **42**, 628, 1936, sowie H. v. HALBAN u. M. LITMANCOWITSCH, Helv. Chim. Acta **24**, 44, 1940.

²) Wir sind Herrn Prof. WIZINGER (Zürich), der uns auf diesen Farbstoff aufmerksam gemacht und ihn auch beschafft hat, zu grossem Dank verpflichtet.

sorptionskurve von A-Perchlorat genügt diesen Anforderungen nicht nur im sichtbaren, sondern auch im ultravioletten Spektralbereich.

2. Die Substanz muss als chemisch rein käuflich sein oder doch sich aus einem käuflichen Ausgangsstoff leicht rein darstellen lassen. A-Perchlorat lässt sich einfach aus dem käuflichen Farbstoff Astraphloxin FF (Ciba, Basel) rein herstellen.

3. Die Substanz muss in festem Zustand unbegrenzt haltbar sein. Dies dürfte für das A-Perchlorat, in verschlossenen Flaschen aufbewahrt, der Fall sein. Wir haben uns ausserdem davon überzeugt, dass selbst nach dreitägigem offenem Stehenlassen an der feuchten Laborluft keine Gewichtsveränderung eingetreten ist.

4. Eine für Absorptionsmessungen bestimmte Lösung der Substanz muss sich mindestens tagelang, besser aber noch länger, unverändert halten. Eine wässrige Lösung von A-Perchlorat, die über 2 Wochen alt und überdies während zwei Tagen dem vollen Tageslicht ausgesetzt war, zeigte im Absorptionsspektrum keine Veränderung (innerhalb unserer Fehlergrenze von 2% im Extinktionskoeffizienten).

5. Das Beer'sche Absorptionsgesetz muss für den in Betracht kommenden Konzentrationsbereich erfüllt sein. Wir haben bis zu praktisch gesättigten wässrigen Lösungen ($\sim 5 \cdot 10^{-5}$ Mol/Liter) keine Abweichung vom Beer'schen Gesetz beobachten können.

Auf Grund dieser Ergebnisse, die zur Zeit noch einer endgültigen Überprüfung unterzogen werden, glauben wir in Astraphloxin-Perchlorat eine für Absorptionsmessungen im sichtbaren (und ultravioletten) Spektralbereich geeignete Standardsubstanz gefunden zu haben. Weitere Angaben werden später in den *Helv. Chim. Acta* veröffentlicht werden. Wir sind gerne bereit, kleine Proben der Substanz an Interessenten abzugeben.

Der Einfluss der Temperatur auf das dynamisch-elastische Verhalten von Seignetteelektrika

von Werner Lüdy.

(20. VIII. 1942.)

Zusammenfassung: Es werden die *Eigenfrequenzen* von *Seignettesalz-* und *Kaliumphosphat-Kristallstäbchen* nach einer neuen Methode mit *Kathodenstrahloszillograph* und *Frequenzmodulator* in *Abhängigkeit* von der *Temperatur* untersucht und daraus die *Elastizitätsmoduln* der beiden seignetteelektrischen Substanzen berechnet. Dem Einfluss des *Luftspaltes* zwischen Kristall und Elektrode und dem Verhalten bei den *Curietemperaturen* wird spezielle Aufmerksamkeit geschenkt. Es ergeben sich im *Luftspalt* gemessen, bei einer Temperatur von $+20^{\circ}\text{C}$, für die Elastizitätsmoduln von Seignettesalz die folgenden Werte:

$$s_{11} = 5,4 \cdot 10^{-12}, s_{22} = 3,7 \cdot 10^{-12}, s_{33} = 3,4 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{Dyn}$$

und für Kaliumphosphat entsprechend:

$$s_{11} = s_{22} = 1,9 \cdot 10^{-12}, s_{33} = 2,2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{Dyn}.$$

Diese elastischen Grössen zeigen bei den Curietemperaturen *keinerlei un stetiges Verhalten* (Fig. 11 und 14). Ohne Luftspalt, d. h. wenn der Kristall mit *aufgedampften* Elektroden versehen ist, weisen die Moduln an den Curiepunkten *stark anomales Verhalten* auf.

1. Einleitung.

In einer Reihe von Veröffentlichungen hat H. MÜLLER ¹⁾²⁾³⁾⁴⁾ versucht, das durchweg anomale Verhalten der Seignetteelektrika durch eine neue Theorie, genannt „Wechselwirkungstheorie“, zu erklären. Bekanntlich zeigen die *piezoelektrischen* (d), *dielektrischen* (ϵ) und *elastischen* (s) Konstanten, wie sie ursprünglich von VOIGT⁵⁾ allgemein für Kristalle definiert wurden, bei allen Seignetteelektrika einen völlig anomalen Temperaturgang in der Nähe des Curiepunktes, der analog zum Curiepunkt der Ferromagnetika, durch das Auftreten oder Verschwinden der spontanen Polarisierung definiert ist. Die Anomalie dieser drei Konstanten führte zu drei verschiedenen Theorien, der piezoelektrischen Theorie von CADY⁶⁾, der dielektrischen oder Dipoltheorie von KURTSCHATOW⁷⁾ und anderen und der Umwandlungstheorie von JAFFÉ⁸⁾.

Ganz besonders interessant ist eine Theorie von SLATER⁹⁾ für KH_2PO_4 , die aus der Wahrscheinlichkeit gewisser Orientierungen der Phosphor-Sauerstoff-Tetraeder und der dadurch erzwungenen Lage der Wasserstoff-Atome, das anormale Verhalten von KH_2PO_4

erklären will. Für unsere Untersuchungen ist aber diese Theorie vorläufig noch zu wenig durchgearbeitet, doch scheint sie ausserordentlich vielversprechend und eine Vertiefung derselben wäre sehr zu begrüssen.

Die drei oben erwähnten „klassischen“ Konstanten d , κ und s verknüpfen die Grössen: elastische Deformation $x_x \dots, y_z \dots$, elastische Spannung $X_x \dots, Y_z \dots$, elektrische Polarisation $P_x \dots$ und elektrische Feldstärke $E_x \dots$ miteinander, wie dies in den Gleichungen 1—3 des nächsten Abschnitts für SS und KH_2PO_4 zum Ausdruck kommt. Lösen wir diese Gleichungen explizit nach $X_x \dots, Y_z \dots, E_x \dots$ auf, anstatt nach $x_x \dots, y_z \dots, P_x \dots$, wie dies in Gleichung 1—3 getan wurde, so erhalten wir 3 neue Konstanten f, χ und c die Funktionen der „klassischen“ Konstanten d, κ und s sind.

MÜLLER nimmt nun an, dass diese Grössen f, χ und c die „wahren“*) Konstanten — mit absolut normalem Temperaturgang, auch im Curiegebiet — seien. Die Anomalie der drei „klassischen“ Konstanten würde dann nur durch Nullwerden des Nenners der Funktion, welche „wahre“ und „klassische“ Konstanten miteinander in Beziehung bringt, hervorgerufen.

Es sei dahingestellt, ob diese „Wechselwirkungstheorie“ tatsächlich Ursache und Wirkung beim piezo-dielektrischen Verhalten zu trennen vermag, und in welchem Masse sie den physikalischen Tatsachen gerecht wird.

Vorläufig ist es notwendig, alle elastischen, piezoelektrischen und dielektrischen Konstanten der Seignettelektrika unter vernünftigen Bedingungen in Funktion der Temperatur zu messen. Die oft sehr grossen Diskrepanzen dieser Messungen, wie sie in der Literatur zu finden sind, beruhen immer auf der Missachtung der Randbedingungen. Speziell aber wird fast durchwegs dem Temperatureffekt zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt.

Zweck dieser Arbeit ist es, einen Teil der zahlreichen Elastizitätsmoduln von Seignettesalz und Kaliumphosphat in ihrem Temperaturverlauf und namentlich in ihrem Verhalten an den Curiepunkten zu untersuchen.

2. Theorie.

Die Symmetrie-Eigenschaften von Seignettesalz (SS) und Kaliumphosphat (KH_2PO_4) lassen von den 21 Elastizitätsmoduln 12 zu Null werden und es bleiben nur die Moduln $s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}, s_{13}, s_{23}$, sowie s_{44}, s_{55}, s_{66} von 0 verschieden. Bei KH_2PO_4 ist ausserdem $s_{11} = s_{22}, s_{13} = s_{23}, s_{44} = s_{55}$ zu setzen. Von den 18 Piezomoduln

*) true constants.

bleiben nur d_{14} , d_{25} und d_{36} übrig mit der Vereinfachung $d_{14} = d_{25}$ für KH_2PO_4 .

Ferner haben wir 3 Suszeptibilitätskonstanten $\kappa_{1,2,3} = \frac{\epsilon_{1,2,3} - 1}{4\pi}$. Wenn das Achsensystem xyz mit den kristallographischen Hauptachsen zusammenfällt, so gelten für SS die folgenden Gleichungsgruppen:

$$\begin{aligned} -x_x &= s_{11}X_x + s_{12}Y_y + s_{13}Z_z \\ -y_y &= s_{21}X_x + s_{22}Y_y + s_{23}Z_z \\ -z_z &= s_{31}X_x + s_{32}Y_y + s_{33}Z_z \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -y_z &= s_{44}Y_z + d_{14}E_x \\ -z_x &= s_{55}Z_x + d_{25}E_y \\ -x_y &= s_{66}X_y + d_{36}E_z \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P_x &= d_{14}Y_z + \kappa_1 E_x \\ P_y &= d_{25}Z_x + \kappa_2 E_y \\ P_z &= d_{36}X_y + \kappa_3 E_z \end{aligned} \quad (3)$$

Hierin sind für KH_2PO_4 die oben erwähnten Vereinfachungen einzusetzen²⁾⁵⁾.

Wir schneiden nun senkrecht zur x -Achse eine dünne Kristallplatte und aus dieser ein möglichst schmales und langes Stäbchen, dessen Längsachse mit der y -Achse den Winkel β einschliesst. Einem solchen Stäbchen geben wir die Bezeichnung $yz\beta$ (analog $zx\gamma$ und $xy\alpha$ durch zyklische Vertauschung der Elemente xyz).

Parallel zu den Kanten des $yz\beta$ -Stäbchens legen wir ein neues Koordinatenkreuz $x'y'z'$, das aus dem ursprünglichen xyz durch Drehung um die x -Achse um den Winkel β entstanden ist. Für diesen Fall gelten die transformierten Gleichungen:

$$\begin{aligned} -y_{y'} &= s'_{22}Y_{y'} + d'_{12}E_x \\ P_x &= d'_{12}Y_{y'} + \kappa_1 E_x \end{aligned} \quad (4)$$

wobei

$$s'_{22} = s_{22} \cos^4 \beta + (2s_{23} + s_{44}) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + s_{33} \sin^4 \beta \quad (5a)$$

$$\text{und} \quad d'_{12} = \frac{1}{2} d_{14} \sin 2\beta \quad (5b)$$

zu setzen ist²⁾⁵⁾.

Durch ein elektrisches Wechselfeld parallel zur x -Achse wird das $yz\beta$ -Stäbchen zu longitudinalen Schwingungen erregt.

Die Resonanzfrequenz wird durch die Formel

$$\nu_R = \frac{2n+1}{2L} \frac{1}{(s'_{22}\epsilon)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

erfasst, falls der Idealfall (unendlich kleiner Querschnitt) möglichst angenähert wird²⁾¹⁰⁾. Es bedeutet L die Länge und ϱ die Dichte des Kristalls. n ist die Ordnungszahl der Schwingung. Durch experimentelle Bestimmung der Resonanzfrequenz lässt sich mit Gleichung (6) der Modul s'_{22} bestimmen.

Aus der gemessenen Resonanzfrequenz für drei $yz\beta$ -Stäbchen mit verschiedenen Winkeln β , erhält man durch die Gleichungen (5a) und (6) die Moduln s_{22} , s_{33} und die Summe $(2s_{23} + s_{44})$. (Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 3 Unbekannten!) Die Moduln s_{23} und s_{44} sind leider durch diese Methode nicht getrennt erhältlich.

Aus Messungen in den beiden andern Achsenrichtungen erhält man durch analoge Gleichungen (zyklische Vertauschung der Indices) die übrigen Moduln.

Die Resonanzkurve von piezoelektrischen Resonatoren ist normalerweise äusserst scharf (Quarz).

SS und KH_2PO_4 machen im Curiegebiet (aber *nur* bei Messungen mit dem Feld parallel zur ausgezeichneten Achse) eine Ausnahme¹¹⁾.

In diesem Temperaturgebiet tritt eine starke Verbreiterung der Resonanzkurve auf, die am Curiepunkt ihr Maximum erreicht. Mit der Verbreiterung läuft stets eine starke Verschiebung (bis 50%) der Resonanzfrequenz gegen kürzere Frequenzen parallel. Eine solche Verbreiterung und Verschiebung in Funktion der Temperatur ist aber nur zu beobachten, wenn der Kristall beklebt ist, d. h. wenn seine Elektroden dem Kristall völlig anliegen. Am isolierten Kristall (Luftspalt) verschwindet der Effekt und sein Verhalten ist völlig normal (Scharfbleiben der Resonanzkurve, keine Verschiebung), wie dies für die beiden andern nicht ausgezeichneten Achsen, unabhängig von den Elektroden, immer der Fall ist. MÜLLER hat diesen „Spalteffekt“ berechnet, aber zu wenig konsequent ausgewertet.

Betrachten wir einen Kondensator mit konstanter Spannung V , in welchem sich eine Kristallplatte, der Dicke D , mit einem beidseitigen Abstand $A/2$ von den Kondensatorplatten, befindet. Dann ist $E_0 = \frac{V}{D+A} = 4\pi\sigma_0$ das Feld im Kondensator ohne Kristall. $E' = 4\pi\sigma$ das Feld im Luftspalt, wenn der Kristall eingeschoben ist. Dabei ist $\sigma = \sigma_0 + P_x$; P_x = Polarisation der Kristallplatte, wenn diese senkrecht zur x -Achse geschnitten ist. Das Feld im Kristall wird somit $E_x = 4\pi(\sigma - P_x)$ und $V = E'A + E_xD = 4\pi[\sigma A + (\sigma - P_x)D]$.

Eliminieren wir aus den beiden letzten Gleichungen σ , so erhalten wir:

$$E_x = E_0 - 4\pi P_x \frac{A}{A+D} = \frac{V}{A+D} - 4\pi P_x \frac{A}{A+D} \quad (7)$$

Für $A = 0$ (Kristall beklebt) wird

$$E_x = E_0 = \frac{V}{D} \quad (7a)$$

und für $A = \infty$ (Kristall isoliert)

$$E_x = -4\pi P_x \quad (7b)$$

Beachtenswert ist die Übereinstimmung der Formel (7) mit der Analogie, für das Feld in einer ringförmigen ferromagnetischen Spule mit Luftspalt¹²⁾¹³⁾. Es gilt dort

$$H = H_0 - 4\pi M \frac{L}{U} \quad (8)$$

H_0 = Feld der Spule ohne Kern.

L = Dicke des Luftspaltes.

U = mittlerer Umfang der Spule.

M = Magnetisierung.

Diese sogenannte „magnetische Scherung“ bei den Ferromagnetika steht also in formalem Zusammenhang mit dem „Spalteffekt“ der Seignettelektrika.

Die Formel (7) möchte ich wie folgt interpretieren: Solange der Kristall beklebt ist, werden seine Dipole gezwungen, dem Wechsel des äusseren Feldes zu folgen. Der Energieverbrauch beim Umlappen derselben kommt in der verbreiterten Resonanzkurve zum Ausdruck, natürlich nur im Curiegebiet, wo die Polarisierung gross ist. Ist der Kristall im Luftspalt isoliert, so entspricht dem Faktor $4\pi P_x \frac{A}{A+D}$ eine „abschirmende“ Wirkung, weshalb die Dipole nur teilweise, oder gar nicht dem äusseren Wechselfeld folgen, was das „scharf“ bleiben der Resonanzkurve bewirkt.

Es sei einer andern demnächst erscheinenden Arbeit²⁹⁾ überlassen, zu entscheiden, wie weit der dämpfende Einfluss der Dipolbewegung in Parallele zu setzen ist, mit dem Einfluss der magnetischen Sättigung auf die Resonanzkurve bei magnetostriktiven Schwingungen. ΔE -Effekt¹²⁾.

Wir setzen nun Gleichung (7) in die Gleichungen (4) ein und erhalten so ein neues Gleichungspaar:

$$y_y' = s_{22}'^* Y_y' + d_{12}'^* E_0 \quad (9)$$

$$P_x = d_{12}'^* Y_y' + \kappa_1'^* E_0$$

mit

$$s_{22}'^* = s_{22}' - \frac{4\pi (d_{12}')^2 A}{\varepsilon_1 A + D} \quad (9a)$$

und

$$d_{12}'^* = \frac{d_{12}'(A + D)}{\varepsilon_1 A + D} \quad (9b)$$

$$\kappa_1'^* = \frac{\kappa_1'(A + D)}{\varepsilon_1 A + D}. \quad (9c)$$

Aus (9a) folgt für $A = 0$ $s_{22}'^* = s_{22}'$ (beklebt) und für $\varepsilon_1 A \gg D$

$$s_{22}'^* = s_{22}' - \frac{4\pi (d_{12}')^2}{\varepsilon_1} =: s_{22}^i \quad (\text{isoliert}). \quad (10)$$

Es ist zu beachten, dass die Bedingung $\varepsilon_1 A \gg D$ schon mit einem sehr kleinen Luftspalt zu erreichen ist, falls die DK sehr gross ist. Ist der Kristall beispielsweise 2 mm dick und ε_1 ungefähr 1000, so genügt schon ein kleiner Luftspalt von $1/10$ mm der Bedingung $\varepsilon \cdot A \gg D$. ($100 \gg 2!$).

Die DK kann aber noch wesentlich grösser werden, so dass nur eine auf frische Oberfläche aufgedampfte Metallschicht den Zustand des beklebten Kristalls vollkommen zu realisieren vermag.

Der Unterschied zwischen isoliertem und beklebtem Kristall ist durch das Glied $\frac{4\pi (d_{12}')^2}{\varepsilon_1} = F$ gegeben.

Dieser Unterschied wird praktisch immer dann verschwinden, wenn dieses Glied F von kleinerer Grössenordnung ist als s_{22}^i . In der ausgezeichneten Achse, genügend weit vom Curiegebiet entfernt, sowie in den beiden andern Achsen im ganzen Temperaturgebiet, ist diese Bedingung erfüllt. (Für KH_2PO_4 bei Zimmertemperatur $d \approx 50 \cdot 10^{-8}$ est. E.; $\varepsilon \approx 100$; $E \approx 2,5 \cdot 10^{-14} \ll s^i \approx 4 \cdot 10^{-12}$). Im Curiegebiet der ausgezeichneten Achse wird F grösser als s^i . (Für KH_2PO_4 am Curiepunkt $d \approx 2 \cdot 10^{-4}$ est. E.; $\varepsilon \approx 10^4$; $F \approx 40 \cdot 10^{-12} > 4 \cdot 10^{-12} \approx s^i$.)

Es kann aber auch im Curiegebiet $s_{22}'^* = s_{22}^i$ werden, nämlich dann, wenn das Glied F überhaupt zu Null wird.

Nach Gleichung (5b) wird für $\beta = 0$ oder $\pi/2$; $d'_{12} = 0$, also auch das Glied F .

Wird somit im Curiegebiet ein Kristallstäbchen parallel den Hauptachsen geschnitten (yz_0 oder yz_{90}), müssen beklebter und isolierter Kristall identisch werden, was tatsächlich der Fall ist, wie das Experiment zeigt.

Die Messungen in den nicht ausgezeichneten Achsen, sowie in der ausgezeichneten Achse für *isolierten* Kristall, liefern Elastizitätsmoduln von der Grössenordnung, wie man sie aus rein statisch mechanischen Messungen erhält¹⁴⁾¹⁵⁾. Leider existiert nur spärliches Vergleichsmaterial, speziell fehlen mechanische Messungen in Funktion der Temperatur. Es ist aber völlig unzumutbar, den „Elastizitätsmodul“ aus elektrischen Messungen an 3 *beklebten* Kristallen im Curiegebiet mit verschiedenen Orientierungswinkeln β unter Verwendung der Gleichungen (5a), (5b) und (6) berechnen zu wollen, da dann der absolut unübersichtliche gegenseitige Einfluss von Piezomodul, Elastizitätsmodul und Dielektrizitätskonstante nicht ausgeschaltet wird. Das Resultat der Rechnung liefert „Elastizitätsmoduln“ mit ausserordentlich starkem Temperaturgang und starken Abweichungen gegenüber den Werten aus Messungen an isolierten Kristallen.

3. Kristallzucht.

Für alle Messungen an Kristallen ist es wesentlich, diese in guter Qualität und genügend grossen Stücken zur Verfügung zu haben. Nur absolut klare und einschlussfreie Kristalle liefern zuverlässige und gut reproduzierbare Messungen. Für SS war dieses Problem bereits hinreichend gelöst, denn es werden an unserem Institut fortwährend SS-Kristalle aus der gesättigten Lösung durch Absenken der Temperatur gezüchtet¹²⁾, mit den ungefähren Achsenlängen $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm. Diese Kristalle sind absolut klar und ohne Wachstumsfehler; nach Ausweis durch Röntgenaufnahmen handelt es sich beinahe um Idealkristalle. Schwieriger lagen die Verhältnisse bei KH_2PO_4 , denn diese ebenfalls aus der gesättigten Lösung gezüchtet, zeigten stets von der Mitte des Kristalls ausgehende fein verästelte Trübungen und Sprünge. An diesen Stellen wurde dann meistens bei der Bearbeitung der Kristall zerstört. Weder langsames Absenken der Temperatur, noch erschütterungsfreie Lagerung des Zuchtgefässes vermochte eine Qualitätssteigerung zu bringen. Ebensowenig zeigte die Verwendung ganz reiner Substanzen und peinlich sauberes Arbeiten den gewünschten Erfolg. Unter dem Mikroskop stellte ich fest, dass schon Keime von maximal 1 mm Länge in der Mitte fein verzweigte Trübungen aufwiesen, am Rande jedoch klar waren. Dieser Zustand blieb beim

Wachstum insofern erhalten, als das Verhältnis von trüber Mitte zu klarer Umrandung stets ungefähr dasselbe blieb, mit andern Worten, die Trübung wuchs stets im selben Mass wie der ganze Kristall. Es zeigte sich aber, dass, wenn es gelang, einen vollständig klaren Keim zu finden, dieser als Impfling in die gesättigte Lösung gebracht, dort ohne jegliche Störung vollkommen klar weiter wuchs.

Ein wirklich klarer Keim wächst auch in verschmutzten Lösungen oder bei leichten Erschütterungen klar weiter. Hingegen bewirken Lageänderungen des Kristalls oder sehr starke Erschütterungen schichtartige Trübungen in diesem, jedoch wächst in den meisten Fällen der Kristall später wieder klar weiter. Dies ist ohne weiteres zu verstehen, denn es bildet sich im Laufe des Wachstums um den Kristall ein Raum, der gegenüber der übrigen Lösung etwas untersättigt ist. Jede Bewegung bringt eine Konzentrationsänderung mit sich, was natürlich eine Wachstumsstörung nach sich zieht.

Wie wesentlich das Vorhandensein eines klaren Keimes ist, möge folgendes Beispiel zeigen.

Ein klarer Keim wurde wie gewohnt an einem Haar in die gesättigte Lösung gehängt und die Temperatur abgesenkt. Der Keim wuchs während einigen Tagen ungestört, dann setzte sich an diesem ein neuer Keim an, der sich nachträglich in der Lösung gebildet hatte. Die beiden Keime wuchsen nun vereint weiter. Es zeigte sich bald, dass der zweite Keim die gewohnten Trübungen aufwies, denn es war ja kein ausgesuchter, sondern ein ganz beliebiger Keim, der mit 95-prozentiger Sicherheit schon von Anfang an trübe war. Der erste Keim hingegen wuchs ohne die geringsten Störungen weiter. Das Schlussresultat waren fest verwachsene Kristallzwillinge, der eine davon vollständig klar und der andere vollständig trüb, beide unter genau den gleichen Bedingungen gewachsen, aber mit verschiedenen Anfangsbedingungen. Es ist somit nur die richtige Auswahl der Keime für vollkommenes Wachstum verantwortlich.

Leider beträgt die Ausbeute an geeigneten Keimen nur etwa 5% aller entstandenen Keime. Durch einen geringen Zusatz von Harnstoff in die KH_2PO_4 -Lösung konnte diese Ausbeute auf nahezu 50% gesteigert werden. Vielleicht beseitigt dieser Zusatz einen eventuellen Kristallisationsverzug*), so dass ein plötzliches Ent-

*) Es muss sich um einen Kristallisationsverzug im kleinen handeln, denn mit Rühren oder Impfen mit kleinen Kristallen ist keine Verbesserung der Keime zu erreichen.

stehen vieler sehr kleiner Keime verhindert wird und bereits in mikroskopischen Dimensionen der Keim durch langsame Anlage-
 rung von KH_2PO_4 an das Harnstoffmolekül entsteht.

Mit diesen Keimen gelang es ohne weitere Schwierigkeiten, vollkommene Kristalle (Fig. 1 und 2) bis zur Kantenlänge von

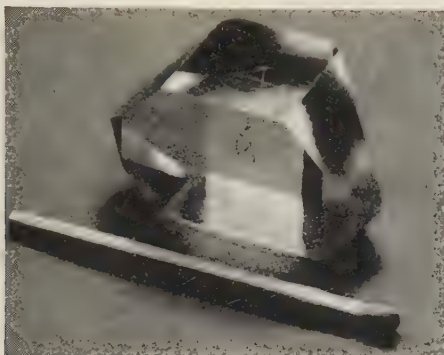


Fig. 1.
 KH_2PO_4 -Kristall.

Im Innern ist die Haarschleife sichtbar, an welchem der Keim in die Lösung gehängt wurde.

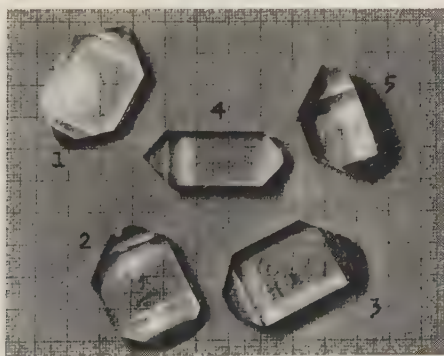


Fig. 2.
 KH_2PO_4 -Kristalle.

Kristall 1, 2, 3 sind auf dem etwas gewölbten Boden des Zuchtgefäßes gewachsen, daher die kreisförmige Struktur in der Auflagefläche. Kristall 4 und 5 wuchsen an einem Haar frei hängend.

$a = 3$ cm und $c = 5,5$ cm zu züchten. (Wachstumsdauer ca. 2 Monate.) Im übrigen wurden alle Kristalle aus der stöchiometrischen Lösung von KH_2PO_4 mit leichtem Basenüberschuss gezüchtet, wie seinerzeit von Busch¹⁷⁾ beschrieben.

4. Kristallbearbeitung.

Ein weiteres Problem brachte die Bearbeitung der Kristalle. Die bei SS gebräuchliche Sägemethode mit feuchtem Seidenfaden ist bei KH_2PO_4 sehr zeitraubend, da letzteres in Wasser bedeutend schwerer löslich ist als ersteres. Zudem ist KH_2PO_4 mechanisch

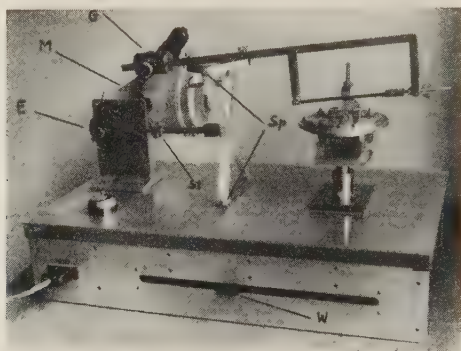


Fig. 3. Kristallsäge.

M = Motor mit Schneckengetriebe, E = verstellbarer Exzenter zur Regulierung der Sägeamplitude, St = verstellbare Stange zur Anpassung des Sägebogens an die jeweilige Kristallage, Sp = Spitzenlager, G = Gewicht zur Einstellung des Sägedrucks, W = Widerstand zur Regulierung der Sägeschwindigkeit.

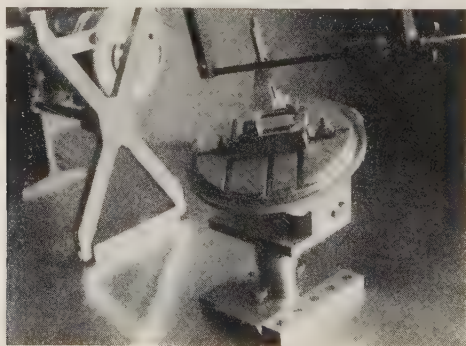


Fig. 4. Kristallsupport.

Tischebene um 60° gegen die Horizontalebene neigbar, sowie 360° um die Vertikalachse drehbar. In der Höhe und seitlich (senkrecht zur Sägebene) verschiebbar.

viel fester, was einen unhaltbaren Verschleiss an Seidenfäden mit sich bringt. Es zeigte sich aber nach einer Reihe von Versuchen, dass man mit einem gewöhnlichen Laubsägeblättchen, unter reichlicher Verwendung von Petrol als Schmiermittel, KH_2PO_4 sehr leicht zersägen kann.

Bedingungen für eine schöne Schnittfläche sind:

1. Möglichst grosse Bewegungsamplitude der Säge um das Verschmieren der feinen Sägezähne zu verhindern. (Die Zähne müssen während des Sägens ausgespült werden.)
2. Absolut starre Führung des Sägebogens in der Schnittebene.
3. Sägeschwindigkeit und Sägedruck müssen variierbar sein. Am Anfang und Ende eines Schnittes muss sehr sorgfältig gesägt werden, um ein Splittern der Ränder zu verhüten.
4. Allseitig gute Halterung des zu zersägenden Kristalls. Es muss auch das abzusägende Stück festgehalten werden.
5. Die Halterung des Kristalls muss in allen Richtungen verstellbar sein um Kristalle beliebiger Orientierung schneiden zu können.

Nach diesen Gesichtspunkten konstruierte ich eine Säge, wie sie Fig. 3 und 4 zeigen. Mit dieser Säge konnten Plättchen bis $\frac{1}{2}$ mm minimaler Dicke ohne Schwierigkeit abgesägt werden. Für Flächen von 3—4 cm² benötigt man eine Sägezeit von ca. $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$ Stunden bei einer Sägeschwindigkeit von ca. 15 cm/sec und einem Gewicht des Sägebogens von ca. 300 Gramm. Diese beiden letzten Daten müssen um ungefähr die Hälfte reduziert werden am Anfang und Ende des Schnittes*).

Für die Bearbeitung grosser Stücke, speziell solcher aus SS, eignet sich eine Bandsäge besser, weil das Sägeblatt nach Durchlaufen des Kristalls richtig gereinigt werden kann und so ein Verschmieren der Sägezähne verhindert wird. Unsere Bogensäge ist aber unbedingt vorzuziehen, wenn es sich darum handelt, sehr kleine Stücke möglichst genau zu zersägen, weil es nur mit einer solchen möglich ist, einen in allen Richtungen mit genügender Präzision verstellbaren Tisch zu kombinieren. Zudem kommt die Lösung des Vorschubproblems in Wegfall, da der Sägebogen durch sein Eigengewicht oder mit einem Zusatzgewicht durch den Kristall gedrückt wird.

Die zersägten Kristalle wurden mit Petrol und SiC 800 auf einer Glasplatte von Hand oder mit der Schleifmaschine nach WÜLFELING¹⁸⁾ feingeschliffen und auf Hirschleder mit Polierrot je nach Bedarf bis zu Hochglanz poliert. Alle verwendeten Kristalle wurden in ihren Dimensionen auf mindestens 1 % genau bearbeitet.

*) Herrn Dr. W. BOSSHARD möchte ich an dieser Stelle für seine ideenreiche Mithilfe bei der Konstruktion der Säge danken.

5. Die Apparatur.

a) *Elektrischer Teil.* Da piezoelektrische Kristalle äusserst scharfe Resonanzkurven aufweisen, über deren Lage im Frequenzband, speziell bei KH_2PO_4 keine Anhaltspunkte vorlagen, musste eine Methode gewählt werden, die das Aufsuchen dieser Resonanzstelle leicht ermöglichte. Sehr geeignet dazu ist die Schwebungsmethode von CADY¹⁹). Diese beruht bekanntlich darauf, dass die Frequenz eines Senders rasch über ein bestimmtes Gebiet $\Delta\nu$ variiert wird. Liegt die Eigenfrequenz des lose angekoppelten Kristalls in diesem überstrichenen Frequenzgebiet, so wird dieser Kristall zu mechanischen Schwingungen angeregt, die aber infolge des reziproken Piezoeffektes selbst wieder die Ursache von schwach gedämpften elektrischen Schwingungen sind. Im selben Augenblick ist aber die Frequenz des Senders schon um einen kleinen Betrag geändert worden und erzeugt mit der Kristallfrequenz Schwebungen, die mit einem Audion oder Detektor im Kopfhörer, oder mit entsprechender Verstärkung im Lautsprecher als pfeifendes Knallen hörbar werden (Klickmethode). Die Frequenzänderung $\Delta\nu$ des Senders kann automatisch durch eine rotierende Kapazität erzeugt werden, und mit einer zweiten grösseren Parallelkapazität wird die Grundfrequenz ν eingestellt, um welche herum die Modulation gewünscht wird. Mit dieser Methode liessen sich sehr schön die ersten Messungen der Eigenfrequenzen bei konstanter Temperatur machen und gaben so einen guten Einblick in die Resonanzverhältnisse. Die Vielheit der vorhandenen Eigenfrequenzen machte es aber unmöglich, bei verschiedenen Temperaturen, speziell im Curiegebiet, wo offenbar noch eine Harmonieabweichung auftritt, jeweils die entsprechenden wieder herauszufinden, da der „Klick“ für alle denselben Charakter hat. Die akustische Methode musste durch eine optische ersetzt werden in dem Sinne, dass das ganze Spektrum der Eigenfrequenzen im Kathodenstrahloszillographen (KO) sichtbar gemacht wird. Der „Klick“ obiger Methode kann natürlich ohne weiteres im KO betrachtet werden, entweder als modulierte Hochfrequenzband, oder nach der Gleichrichtung als niederfrequentes Schwingungsbild.

Wesentlich ist nur die Synchronisierung von Zeitablenkung und Frequenzänderung. Wir haben dieses Problem gelöst, indem wir ein fertiges Gerät der Firma PHILIPS, den sogenannten Frequenzmodulator als Schaltelement verwendeten. Es ist dies ein Sender mit konstanter Frequenz von 4 MHz. Die Kippspannung des Zeitablenkgerätes im KO wird an das eine Gitter einer Mehrgitterröhre gelegt, dadurch wird die Steilheit dieser Röhre um einen

bestimmten Betrag im Rhythmus der Kippfrequenz geändert. Die so geschaltete Röhre stellt eine variable Selbstinduktion dar, die als Teil der Gesamtselbstinduktion des Senders, dessen Grundfrequenz 4 MHz um einen bestimmten Betrag (± 25 kHz) moduliert²⁰).

Mit diesem Modulator wird ein im Gebiete 4 MHz variierbarer zweiter Sender gekoppelt. Die entstehenden Schwebungen mit der Frequenz ν , entsprechend der Differenz der Schwingung von Modulator und Sender, werden dann ebenfalls synchron mit der Zeitablenkung um ± 25 kHz variiert.

Je nach der Abstimmung des variierbaren Senders kann also jede beliebige Frequenz von Null bis zu beliebig hohen Frequenzen um den Betrag von ± 25 kHz geändert werden. (Praktisch nur bis 1 MHz und nicht höher, da der KO-Verstärker nur bis zu diesem Gebiet konstant verstärkt.)

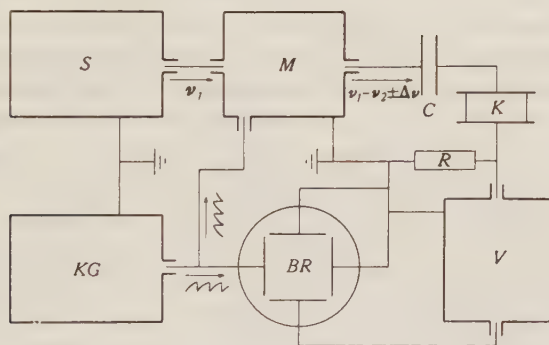


Fig. 5.

S = Sender variabler Frequenz, M = Modulator (liefert $\nu_2 \pm \Delta\nu$), KG = Kippspannungsgerät (steuert Modulator und Zeitablenkung), BR = Braun'sche Röhre, V = Verstärker der Vertikalablenkung, R = Eingangswiderstand des Verstärkers, C = Kopplungskapazität, K = Kristall.

Der Schirmbreite des KO entspricht ein maximales Frequenzband von ca. 40 kHz, doch kann die Modulationsfrequenz verkleinert werden, so dass der untersuchte Vorgang mehr auseinandergezogen wird. Dieses Gerät wurde speziell zur Prüfung der Form von Bandfiltern von Radioapparaten geschaffen, denn es lässt sich damit jede beliebige Resonanzkurve untersuchen.

Ich arbeitete mit der in Fig. 5 skizzierten Schaltung. Die um den Betrag $\Delta\nu$ modulierte Frequenz $\nu_1 - \nu_2$ wurde kapazitiv an den Schwingkreis, bestehend aus Kristall K und Ohmschen Widerstand R , gekoppelt. R ist der Eingangswiderstand des Vertikal-

verstärkers des KO , und der an diesem gemessene Spannungsabfall ist proportional zum Strom durch den Kristall. Ist der Kristall in Resonanz, so erhalten wir auf dem Leuchtschirm seine Resonanzkurve und zwar als Enveloppe des Hochfrequenzbandes, weil auf Gleichrichtung verzichtet wurde. Die Abszisse der Resonanzkurve ist gleichzeitig Zeit- und Frequenzachse. Entsprechend der Kippfrequenz n wird die Resonanzkurve n -mal pro sec. durchlaufen. Solange die Kippfrequenz genügend klein ist, erhält man das gewohnte Bild der Resonanzkurve, wie wenn man dieselbe punktweise durchläuft (Fig. 8). Wird die Kippzeit $1/n$ vergleichbar mit der Abklingzeit $1/\delta$ (oder kleiner), so erhält man als Bild nicht mehr die Resonanzkurve, sondern den oben beschriebenen Cady'schen Schwebungsstoss ($\delta = R/2L =$ Dämpfungskonstante). Für eine Dämpfungskonstante $\delta = 10^3$, wie sie einem elektrischen Kreis entspricht mit den Elementen $C = 5 \cdot 10^{-10} F$, $L = 5 \cdot 10^{-3} H$, $R = 10 \Omega$, liegt die höchst zulässige Kippfrequenz bei ungefähr $2 \cdot 10^2 \text{ sec.}^{-1}$.

Da piezoelektrische Resonatoren normalerweise eine viel geringere Dämpfungskonstante ($\delta = 40$) besitzen²¹⁾, ist die kleinste Kippfrequenz von einigen Hz bereits etwas zu gross, um eine glatte Resonanzkurve zu erhalten; es machen sich bereits Schwebungen bemerkbar. Abgesehen davon, ist es notwendig, die Kippfrequenz mindestens von der Grössenordnung 50 Hz zu wählen, um ein stehendes, nicht flimmerndes Bild zu erhalten. Dieser Umstand war aber weiter nicht störend, da für mich der Ort der Resonanzfrequenz und nicht die Form der Resonanzkurve wesentlich war. Zur Feststellung aller auftretenden Eigenfrequenzen und deren Oberwellen, sowie zur Messung des Temperaturganges der Eigenfrequenz hat sich diese Methode ausgezeichnet bewährt, schon aus dem Grunde, weil die oft nur bei gewissen Temperaturen auftretenden Effekte photographisch festgehalten werden konnten.

Die Figuren 7, 8 und 12 zeigen mit dieser Methode aufgenommene Resonanzkurven.

Die auf allen Bildern links von der Resonanzstelle sichtbare Einschnürung ist die sog. Antiresonanzstelle. Für diese Frequenz wirkt der Kristall wie ein Sperrkreis (el. Schwingkreis in Parallel- oder Stromresonanz), d. h. sein Scheinwiderstand wird sehr gross (∞ für Dämpfung 0), also der Strom sehr klein. Im Gegensatz dazu steht die Resonanzfrequenz (el. Schwingkreis in Serie- oder Spannungsresonanz), wo der Scheinwiderstand sehr klein wird (0 für Dämpfung 0), folglich der Strom sehr gross²⁾¹¹⁾¹⁹⁾. Bei allen Bildern nimmt die Frequenz von links nach rechts ab. Ebenso wurde der Kathodenstrahl von links nach rechts abgelenkt.

b) *Thermostat*. Alle Messungen sollten in Funktion der Temperatur ausgeführt werden und zwar von Zimmertemperatur bis zur Temperatur von flüssigem Stickstoff. Es zeigte sich bald, dass mit einer einfachen Abkühlung in flüssigem Stickstoff mit darauffolgender Erwärmung, infolge der natürlichen Wärmezufuhr durch die elektrischen Zuleitungen und das Abschirmungsrohr, nicht auszukommen war. Die relativ grosse Temperaturzunahme von ca. 6°h erzeugte eine inhomogene Temperaturverteilung in dem Kristallpräparat, was zu verschiedenen Störungen Anlass gab. Es wurde deshalb ein von A. VAN LAMMEREN²²⁾ beschriebener Flüssigkeitskryostat erstellt.

Zwei Dewar-Gefässe sind ineinander geschoben. Das äussere Gefäss enthält die Kühlflüssigkeit, das Innere — ein nicht ausgepumptes, aber an eine Pumpe angeschlossenes Gefäss — enthält ein Pentanbad, sowie einen achsial angeordneten, beidseitig offenen Pressspanzylinder, der auf seiner Aussenseite eine Heizwicklung und an seinem untern Ende einen Rührpropeller trägt. Prinzipiell wird also von aussen gekühlt und im Bad geheizt. Je nach der gewünschten Badtemperatur wird das innere Dewar-Gefäss mit Wasserstoff gefüllt (tiefe Temp.) oder evakuiert (hohe Temp.).

Der Heizstrom wird *kontinuierlich* mittelst Toulon-Schaltung^{23) 24) 25)} verändert, entsprechend dem Galvanometerausschlag, welcher durch ein Thermoclement über eine Kompensationsmessbrücke gesteuert wird. Auf diese Weise kann jede gewünschte Temperatur von 0 bis -170°C auf mindestens $\frac{1}{10}^{\circ}$ beliebig lang konstant gehalten werden. Falls das Messgefäss gegen aussen genügend isoliert ist, was bei mir nicht möglich war, wegen den schon erwähnten elektrischen Zuleitungen, kann man unter Verwendung von flüssigem Stickstoff als Kühlmittel ohne grosse Mühe bis -190°C gelangen. Dabei wird es aber notwendig, dem Pentanbad mindestens 25% Butan — aus Butangasflaschen verflüssigt — beizumischen, da der Rührer bei Temperaturen unter -170°C in reinem Pentan nicht mehr zu bewegen ist. Der Rührerantrieb ist sehr kräftig zu bauen, da auch ein Butanzusatz unter -180°C das Zähwerden des Pentans nicht zu verhindern vermag. Für Temperaturen über -60°C kann natürlich die flüssige Luft durch ein Alkohol-Kohlensäuregemisch ersetzt werden. Bei Temperaturen um -150°C beträgt der Verbrauch an flüssigem Stickstoff ca. $1\frac{1}{6}\text{h}$, bei einem abgekühlten Nutzraum von ca. 500cm^3 . Hingegen ist das Abkühlen des warmen Kryostaten etwas kostspielig. Man braucht dazu 4–5 l flüssigen Stickstoff, was aber leicht verständlich ist, da man zwei Dewar-Gefässe (mittlerer Durchmesser

14 cm, mittlere Höhe 30 cm) und 2 l Pentan nebst Messgefäß aus Kupfer um 200° abkühlen muss.

c) *Kristallhalterung*. Die Lagerung des Kristalls machte anfänglich Schwierigkeiten, da zwei gegensätzliche Forderungen zu erfüllen waren. Die Elektroden wurden prinzipiell im Vakuum aufgedampft (Silber oder Gold), um sicher zu sein, dass kein Spalteffekt die Messresultate fälschen kann. Zwischen diesen Elektroden und der Zuleitung sollte nun ein möglichst guter Kontakt hergestellt werden, was nur mit einem gewissen Druck zu erreichen ist.

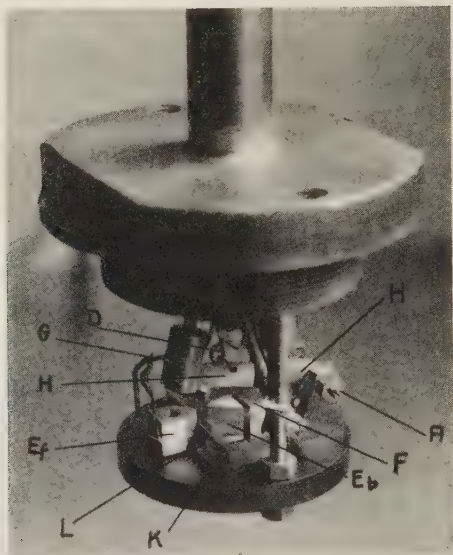


Fig. 6. Kristallhalter.

H = um Achse *A* drehbarer Hebel, verbunden einerseits mit Drahtzug *D* (nach oben führend), anderseits mit beweglicher Elektrodenschneide *E_b* (Silber). *G* = Übergewicht zur Rückführung des Hebels beim Loslassen des Drahtzuges. *F* = Führung der beweglichen Elektrode. *E_f* = feste Elektrodenschneide (Silber). *L* = Lagerschneide aus Cibanit (die 2. liegt hinter den El-Schneiden). *K* = Kristall.

Dieser Druck aber gibt in der Regel eine Störung der Resonanzfrequenzen (Mehrwelligkeit) und führt zu unreproduzierbaren Verhältnissen, oder es macht sich eine starke Dämpfung der Schwingung bemerkbar. Am günstigsten erwies sich ein schneidenförmiger Halter, der am Orte eines Bewegungsknotens der Schwingung leicht an den Kristall gepresst wird. An diesen Stellen kann der Druck genügend gesteigert werden, um einen geringen Übergangswiderstand zu sichern, ohne die Schwingung in im geringsten zu stören.

Die Schneiden sind von aussen bei jeder Temperatur beliebig verstellbar, um einerseits die Druckempfindlichkeit bei tiefen Temperaturen untersuchen zu können (Fig. 6) und um andererseits Druckänderungen zu vermeiden, wie sie bei festen Elektroden, infolge der verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten von Kristall und Kristallhalter, bei grossen Temperaturänderungen auftreten können.

Die Elektrodenschneiden werden seitlich an den Kristall angedrückt, der mit einer der Seitenflächen, die nicht Elektrodenfläche ist, auf zwei andern isolierten Schneiden ruht. Diese beiden Lager schneiden können, wie die Erfahrung zeigte, beliebig angebracht werden, ohne wesentlich zu stören, da der Kristall nur mit seinem Eigengewicht aufliegt. Normalerweise wird man diese auch an Knotenstellen bringen, was aber bei jeder Lage nur für *eine* Eigenfrequenz zutrifft, da nur die Kristallmitte für die Grund- und *alle* ungeraden Oberwellen Schwingungsknoten ist. Die Kristallmitte ist aber aus Stabilitätsgründen nicht zur Lagerung verwendbar.

Der Kristallhalter befindet sich zusammen mit dem Thermolement in einem verschraubbaren Kupfertopf, wie er schon früher beschrieben wurde²²⁾.

Sämtliche Zuleitungen befinden sich in *einem* dünnwandigen Neusilberrohr, das gleichzeitig Topfhalter und Abschirmung der Hochfrequenzzuleitung bildet, denn selbstverständlich müssen alle Hochfrequenzleitungen abgeschirmt werden, um Störungen von aussen zu vermeiden.

6. Messungen.

Es wurde vorerst die Gültigkeit der Formel (6) für Kristallstäbchen, die nicht unendlich dünn sind nachgeprüft. Ausserhalb des Curiegebiets ist die Resonanzfrequenz tatsächlich proportional der Stäbchenlänge und die Harmonie der Oberwellen bleibt gewahrt, solange das Verhältnis von Länge zu Breite des Kristalls nicht kleiner als 10 : 1 wird. Aus diesem Grunde wurden alle Messungen an Stäbchen gemacht, die mindestens 20 mm lang waren und deren Querdimensionen 2 mm nicht überschritten.

Im Curiegebiet (ausgezeichnete Achsenrichtung!) hingegen tritt eine starke Harmonieabweichung auf, falls der Kristall beklebt ist. An den Curiepunkten beträgt die Harmonieabweichung für die 3. Oberwelle 16% und für die 5. Oberwelle 23% der Grundfrequenz. Zwischen den Curiepunkten (an der Stelle der kleinsten Frequenzverschiebung) 2% bzw. 4,5%. Schon 20° über dem oberen und 20° unter dem unteren Curiepunkt ist die Harmonieabweichung verschwunden.

Der isolierte Kristall jedoch verhält sich durchaus normal.

Der Einfluss verschiedener Elektroden wurde sehr eingehend untersucht und es eigneten sich nur die in Abschnitt 5c erwähnten Schneiden. (Flüssigkeitselektroden kommen wegen der tiefen Temperaturen nicht in Frage.)

Eine Vergrößerung des Auflagedruckes der Elektrodenschneiden zieht stets eine verstärkte Dämpfung nach sich. Diese macht sich aber nur bemerkbar, solange der Kristall selbst wenig gedämpft ist. Die Druckvergrößerung an den Elektroden hat zudem immer

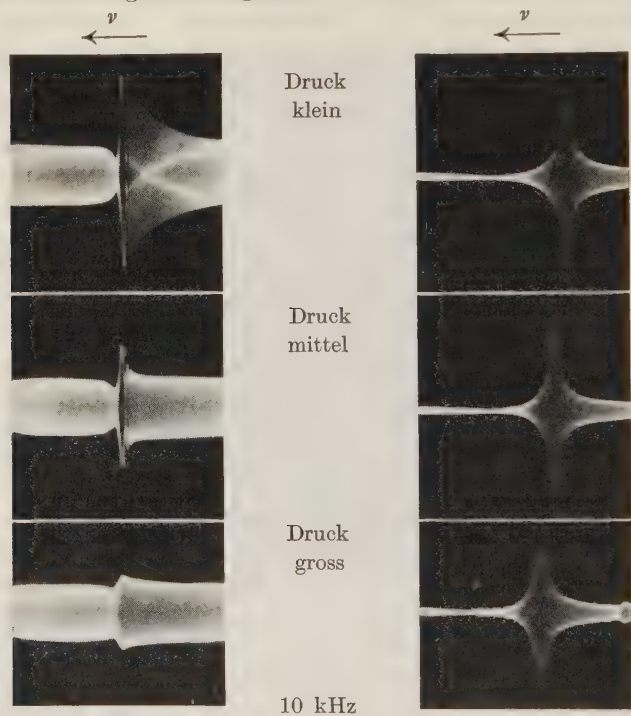


Fig. 7.

KH_2PO_4 , $t = 18^\circ \text{C} \gg \text{Curietemp.}$

Kristall ohne Druck schwach
gedämpft. Elektrodenschneiden im
Bewegungsknoten angepresst.

Fig. 8.

SS, $t = 18^\circ \text{C} \approx \text{Curietemp.}$

Kristall ohne Druck stark gedämpft
Elektrodenschneiden ausserhalb
des Bewegungsknotens angepresst.

eine Verschiebung der Eigenfrequenz gegen grössere Frequenzen zur Folge, falls die Elektrodenschneiden nicht genau in einem Bewegungsknoten der Schwingung angebracht sind. Der Kristall wird scheinbar unter der Vorspannung durch den Elektrodendruck „härter“, somit der Elastizitätsmodul s kleiner ($s \approx 1/E$), also die Resonanzfrequenz grösser. Die Frequenzverschiebung kann nicht die

Folge der auftretenden Dämpfung sein, denn dann müsste eine Verschiebung gegen kleinere Frequenzen stattfinden.

Speziell druckempfindlich ist der Kristall im Curiegebiet. Es treten dann sehr oft neben den Resonanzstellen kleine Zacken auf, speziell wenn die Elektrodenschneiden ausserhalb des Bewegungsknotens drücken. Es handelt sich offenbar um Schwebungen zwischen den Schwingungen des Kristalls und denjenigen der Elektrodenschneiden, denn letztere schwingen natürlich auch, sofern sie

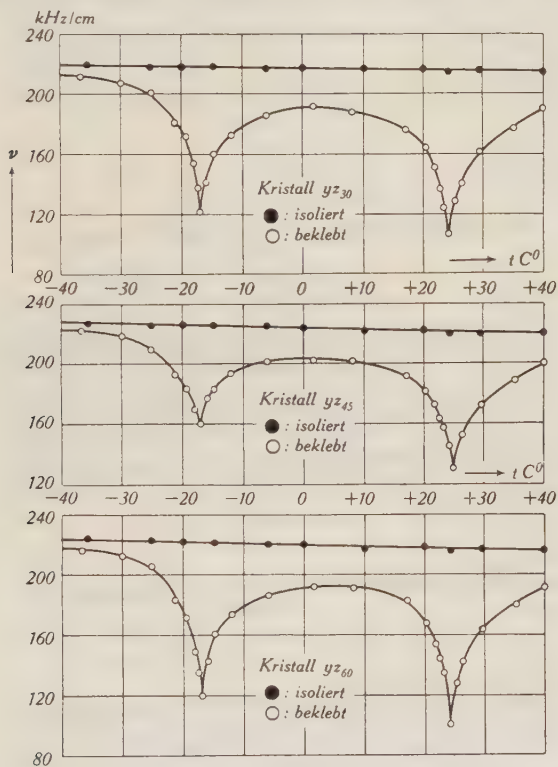


Fig. 9.

Resonanzfrequenzen von Seignettesalz.

nicht in einem Bewegungsknoten angebracht werden. Durch den reziproken Piezoeffekt ist es möglich, dass die Schwingungen auf den Sender zurückwirken und so Schwebungen auftreten müssen. Reproduzierbar sind diese kleinen Zacken nie und sie hängen ganz von der Elektrodeneinstellung ab.

Aus Fig. 7 ist der Einfluss der Drucksteigerung ersichtlich, wobei die Zunahme der Dämpfung sehr deutlich sichtbar wird, da es

sich um Schwingungen geringer Dämpfung handelt, wie sie bei grosser Entfernung der Kristalltemperatur vom Curiegebiet auftreten. Zufolge der geringen Dämpfung ist auf dem Bild nicht die eigentliche Resonanzkurve sichtbar, sondern der „Cady'sche Klick“ (siehe Abschnitt 5a). Eine *Verschiebung* der *Resonanzfrequenz* tritt hier *nicht* auf, da die Elektrodenschneiden in einem Knoten angebracht sind.

Etwas anders liegen die Verhältnisse in Fig. 8, hier kann man die Zunahme der Dämpfung *nicht* sehen, denn nun befindet sich

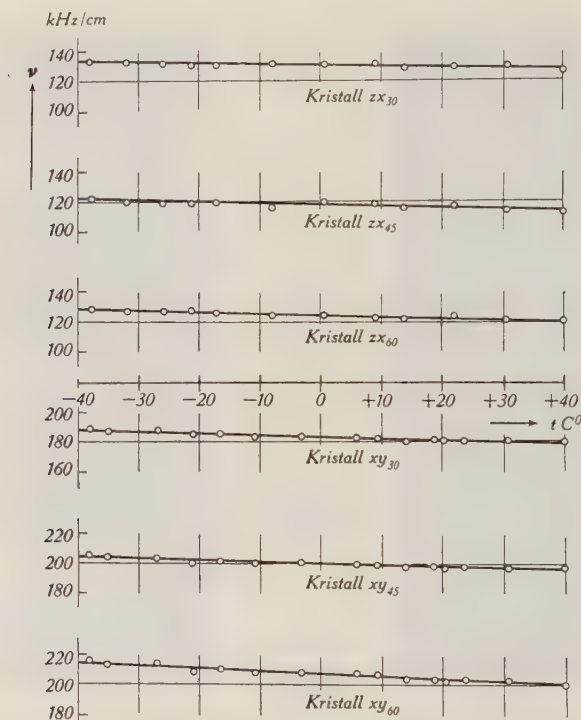


Fig. 10.

Resonanzfrequenzen von Seignettesalz.

der Kristall im Curiegebiet und ist somit auch ohne Elektroden-
druck sehr stark gedämpft*), weshalb wir nun auch das gewohnte
Bild der Resonanzkurve vor uns haben. Weil die Elektrodenschnei-
den ausserhalb eines Knotens angebracht wurden tritt nun eine
starke *Verschiebung* der *Resonanzfrequenzen* auf.

*) Die Messung der anomal grossen Dämpfung wird in einer andern Arbeit
von MATHIAS²⁹⁾ behandelt werden.

Fig. 9 gibt den Temperaturverlauf der Resonanzfrequenzen in der elektrisch ausgezeichneten Achsenrichtung für 3 *beklebte* SS-Kristalle wieder. Diese waren nach yz_{30} , yz_{45} und yz_{60} orientiert. Es ist auch die Änderung der Resonanzfrequenz mit der Temperatur angegeben, falls dieselben Kristalle *isoliert* waren.

Für die beiden *nicht* elektrisch ausgezeichneten Achsen sind die für beklebten und isolierten Kristall identischen Kurven in der Fig. 10 aufgezeichnet.

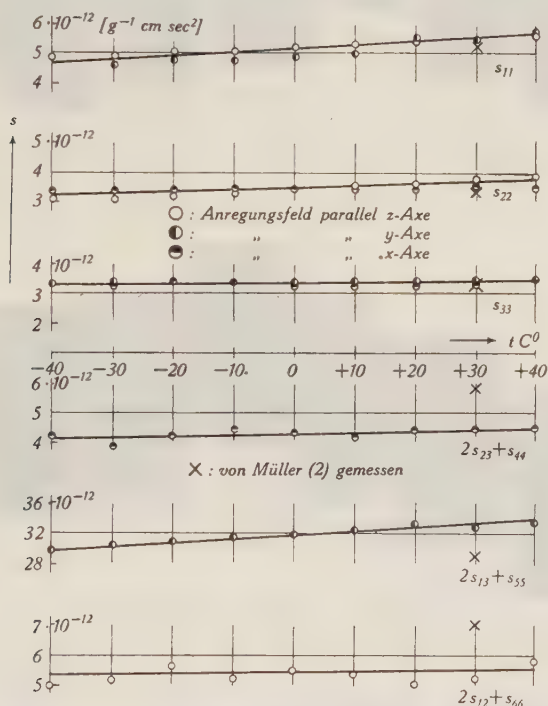


Fig. 11.
Elastizitätsmoduln von Seignettesalz.

Die aus diesen Kurven berechneten Elastizitätsmoduln sind in Fig. 11 dargestellt, dabei wurden von Fig. 9 nur die Kurven für den *isolierten* Kristall benutzt. Messungen in jeweils 2 verschiedenen Feldrichtungen liefern die Moduln s_{11} , s_{22} , s_{33} doppelt, wobei die zusammengehörigen Werte der Moduln gut übereinstimmen.

Aus den 3 Kurven für den *beklebten* Kristall (Fig. 9) lassen sich natürlich auch die auf die Hauptachsen bezogenen Moduln s_{22} , s_{33} und $2s_{23} + s_{44}$ nach Formel (5a) berechnen. Dies führt, wie schon früher auseinandergesetzt, zu „Elastizitätsmoduln“ mit sehr

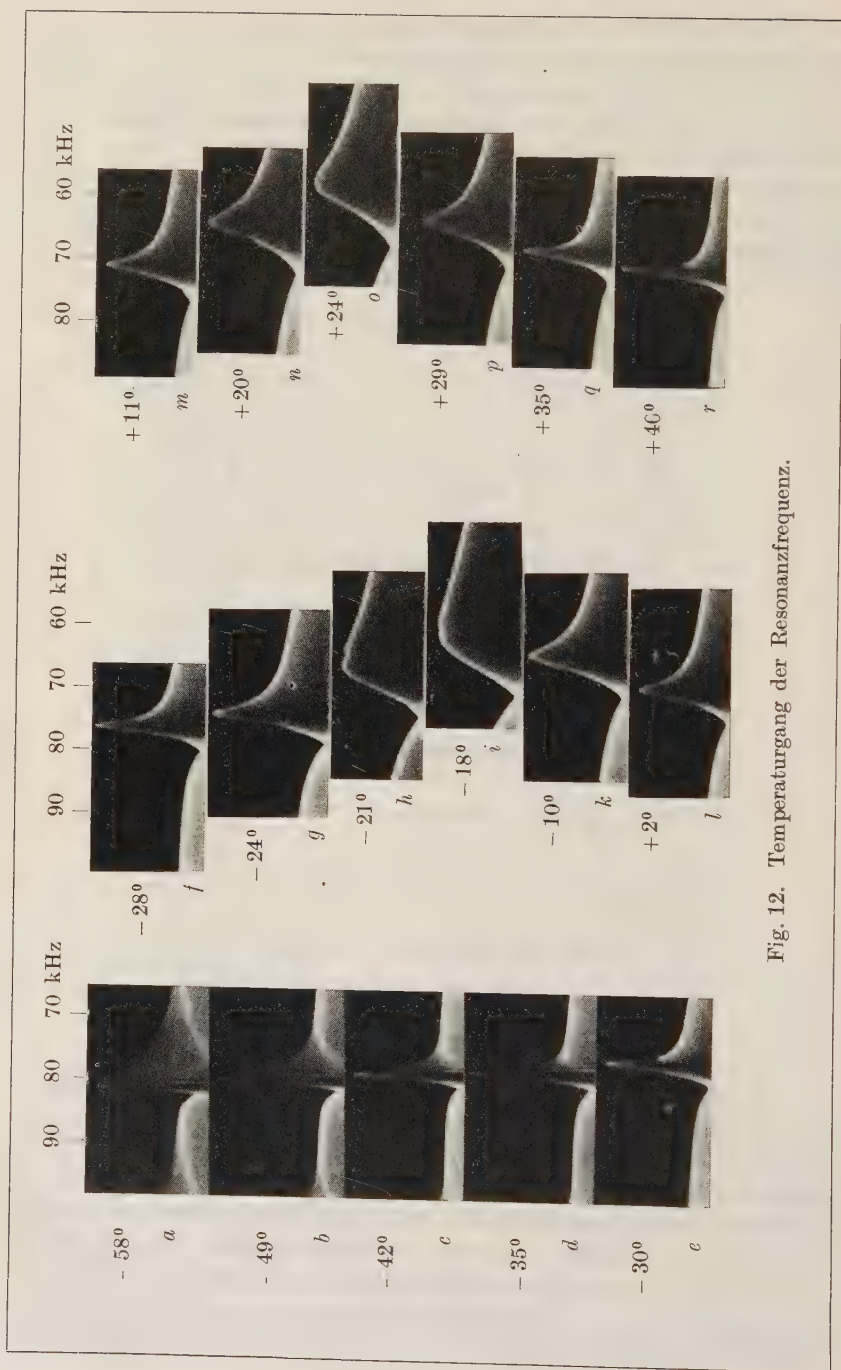


Fig. 12. Temperaturgang der Resonanzfrequenz.

starkem Temperaturgang. Ausserhalb des Curiegebiets stimmen sie mit den Werten des isolierten Kristalls überein, aber im Curiegebiet können sie bis um einen Faktor zwanzig von den „isolierten“ Werten abweichen.

Ein und dasselbe Stäbchen der Orientierung yz_0 hat also verschiedene Elastizitätsmoduln, nämlich s_{22}^X beklebt verschieden von s_{22}^X isoliert, für das Messfeld parallel der x -Achse, und s_{22}^Z beklebt = s_{22}^Z isoliert für das Messfeld parallel der z -Achse, wobei aber die „isolierten“

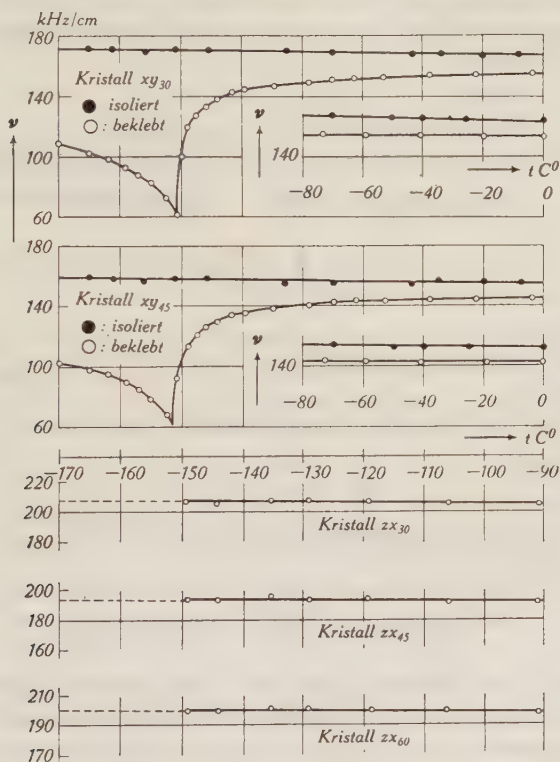


Fig. 13.

Resonanzfrequenzen von Kaliumphosphat.

Werte beider Feldrichtungen übereinstimmen (s_{22}^Z beklebt = s_{22}^Z isoliert = s_{22}^X isoliert), also nur der „beklebte“ Modul (s_{22}^X beklebt) einen andern Wert aufweist.

Der „Pseudoelastizitätsmodul“ s_{22}^X beklebt wird zudem noch ganz verschieden, je nach der Wahl des Orientierungswinkels β der drei Stäbchen $yz\beta$, deren Resonanzfrequenzen zur Berechnung von s_{22}^X beklebt gemessen werden müssen.

Aus Messungen am beklebten Kristall kann man also vorläufig nicht eindeutig die Moduln der Hauptachsen berechnen. Sobald einmal der genaue Verlauf der Piezomoduln und der Dielektrizitätskonstanten, nicht nur in Funktion der Temperatur (was ja für die DK bereits ziemlich gut der Fall ist²⁷⁾²⁸⁾), sondern auch in Funktion der Frequenz bekannt ist, können wir dann mittelst der Formel (10) aus dem isolierten Zustand auf den beklebten schliessen und umgekehrt.

Die Bilderserie der Fig. 12 stellt den charakteristischen Frequenzverlauf, sowie die Abhängigkeit der Dämpfung von der Temperatur an SS dar.

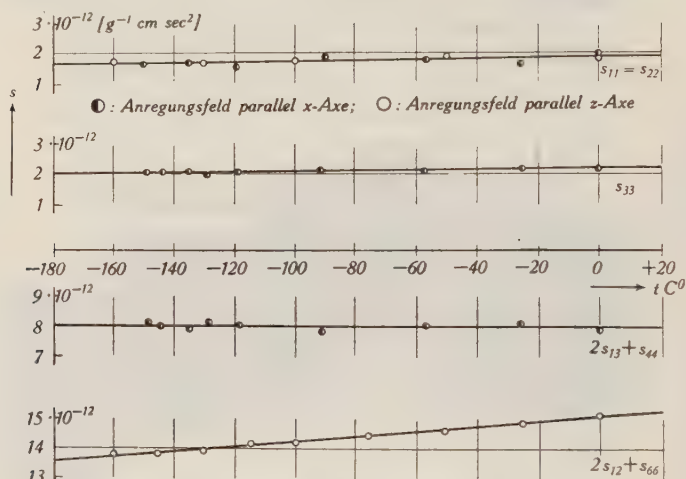


Fig. 14.

Elastizitätsmoduln von Kaliumphosphat.

Für KH_2PO_4 bekommt man einen ähnlichen Verlauf, nur sind die Aufnahmen m bis r wegzudenken. Die Aufnahme a würde dann Zimmertemperatur entsprechen, die Aufnahme i dem oberen Curiepunkt (-152°C) und die Aufnahme l einer Temperatur von ca. -170°C . Der untere Curiepunkt ist mit dieser Apparatur nicht erreichbar, daher können die entsprechenden Aufnahmen nicht gemacht werden. Im Gegensatz zu SS wäre bei KH_2PO_4 zu erwarten, dass am unteren Curiepunkt keinerlei Anomalien der Resonanzfrequenzen auftreten. Im übrigen sind natürlich für die elektrischen und mechanischen Randbedingungen dieselben Überlegungen massgebend wie bei SS.

In Fig. 13 sind die Resonanzfrequenzen und in Fig. 14 die entsprechenden „isolierten“ Moduln für KH_2PO_4 aufgetragen. Für

Stäbchen der Orientierung zx , war unterhalb des oberen Curiepunktes eine Anregung nicht möglich, da offenbar der Piezomodul d_{25} sehr klein wird.

Es wurde auch noch ein einzelner Versuch an einem schweren Kaliumphosphat-Kristall (KD_2PO_4) gemacht und dabei folgendes festgestellt: Die von BANTLE²³⁾ beobachtete Verschiebung des oberen Curiepunktes um ca. 90° gegen höhere Temperatur wird bestätigt. Das Verhalten der Resonanzkurve ist ähnlich demjenigen von KH_2PO_4 . Es ist aber *nur ein Curiepunkt* feststellbar bei ca. $-60^\circ C$. Unterhalb dieses Punktes geht die Frequenzverschiebung wieder zurück und die Dämpfung nimmt rasch ab. Zugleich wird die Schwingung stets schwächer, verschwindet unterhalb $-115^\circ C$ ganz und erscheint bis mindestens $-190^\circ C$ nicht mehr.

Elastizitätsmodulmessungen konnten an KD_2PO_4 keine gemacht werden, da zu wenig Material vorhanden war.

7. Diskussion.

Durch die vorliegenden Messungen ist also festgestellt worden, dass Messungen der Resonanzfrequenzen an isolierten Kristallen mit dem elektrischen Anregungsfeld parallel der ausgezeichneten Achse, sowie Messungen in den beiden andern Achsen für beklebte und isolierte Kristalle zu Elastizitätsmoduln führen mit konstantem gleichmässigem Temperaturgang ohne Unstetigkeiten an den Curiepunkten und Größenordnungen wie sie auch bei mechanischen Messungen erhalten werden. Die Moduln der beklebten Kristalle mit dem Anregungsfeld parallel zur ausgezeichneten Achse müssen für jeden Orientierungswinkel β gesondert bestimmt werden, doch sind diese Messungen höchstens für die Technik von Interesse, da sie uns nicht direkt die Möglichkeit geben, das Verhalten in irgendeiner andern Richtung zu berechnen.

Eine eindeutige Zuordnung zwischen „beklebten“ und „isolierten“ Moduln und damit auch eine eindeutige Beschreibung des elektroelastischen Verhaltens dieser Kristalle ist erst möglich, wenn auch noch die Piezomoduln und die Dielektrizitätskonstanten als Funktion der Temperatur und Feldstärke genau bekannt sind. Dabei ist natürlich auch wiederum der Spalteffekt genügend zu berücksichtigen.

Ob die Dielektrizitätskonstante oder der Piezomodul am Curiepunkt ein anomales Temperaturverhalten zeigen, oder im Sinne MÜLLER's beide „normal“ sind, kann heute noch nicht gesagt werden.

Das *elastische* Verhalten hingegen möchte ich auf alle Fälle als normal bezeichnen, was man sicherlich tun kann, wenn man die „isolierten“ Moduln als charakteristisch für den elastischen Zustand betrachtet.

Dazu ist man berechtigt durch ihr Übereinstimmen mit den aus gewöhnlichen statischen mechanischen Messungen gewonnenen Moduln.

Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER bin ich ausserordentlich dankbar für seine vielseitigen Anregungen und Ratschläge bei der Durchführung dieser Arbeit, ebenso danke ich Herrn Dr. W. BANTLE für sehr viele befruchtende Diskussionen. Ferner danke ich dem Jubiläumsfonds der E.T.H. für die Überlassung von Mitteln zur Anschaffung von Apparaten.

Zürich, Phys. Institut der E.T.H.

Literaturverzeichnis.

- 1) MÜLLER, H. Phys. Rev. **47**, 175, 1935.
- 2) MÜLLER, H. Phys. Rev. **57**, 829, 1940.
- 3) MÜLLER, H. Phys. Rev. **58**, 565, 1940.
- 4) MÜLLER, H. Phys. Rev. **58**, 805, 1940.
- 5) VOIGT, W. Lehrbuch der Kristallphysik.
- 6) CADY, W. Phys. Rev. **33**, 278, 1929.
- 7) KURTSCHATOW, J. Z.S. f. Phys. **66**, 192, 1930.
- 8) JAFFÉ, H. v. R. Phys. Rev. **51**, 43, 1937.
- 9) SLATER, J. C. Journ. Chem. Physics **9**, 16, 1941.
- 10) BECHMANN, R. Z.S. f. Phys. **118**, 515, 1942.
- 11) MASON, W. P. Phys. Rev. **55**, 775, 39.
- 12) BECKER-DÖRING. Ferromagnetismus.
- 13) BECKER, R. Theorie d. Elektrizität, Bd. I, S. 135.
- 14) HINZ, H. Z.S. f. Phys. **111**, 617, 1938.
- 15) MANDELL, W. Proc. Roy. Soc., A, **116**, 623, 1927.
- 16) SCHWARTZ, E. E.N.T. **9**, 481, 1932.
- 17) BUSCH, G. Helv. phys. Acta **11**, 269, 1932.
- 18) EWALD, M. Die optische Werkstatt.
- 19) SCHEIBE, A. Piezoelektrizität des Quarzes.
- 20) v. SUCHTELEN, H. Philips techn. Rundschau **4**, 90, 1939.
- 21) BOSSHARD, W. Z.S. f. Phys. **108**, 195, 1938.
- 22) v. LAMMEREN, A. Technik der tiefen Temperaturen.
- 23) BANTLE, W. Helv. phys. Acta **15**, 373, 1942.
- 24) KLUGE und BRIEBRECHER, E.T.Z. **731**, 1935.
- 25) ZABEL und HANCOX, Rev. sc. instr. **5**, 28, 1934.
- 26) LÜDY, W. Z.S. f. Phys. **113**, 302, 1939.
- 27) BUSCH, G. Helv. phys. Acta **6**, 315, 1933.
- 28) HABLÜTZEL, J. Helv. phys. Acta **12**, 489, 1939.
- 29) MATHIAS, B. Helv. phys. Acta, demnächst.

Théorie de l'influence des vibrations thermiques sur la réflexion des rayons X par les cristaux

par **Konrad Bleuler et Jean Weigle.**

(6. VI. 1942.)

1. Introduction.

Dans un travail précédent¹⁾, nous avons donné une théorie, basée sur le réseau de FOURIER, de l'influence des mouvements thermiques sur la diffraction des rayons X par les cristaux. Nous nous étions attachés alors à l'explication des maxima diffus dont l'expérience avait montré l'existence en dehors de l'angle de BRAGG et nous avons négligé, dans cette première approximation, l'effet d'interaction des très nombreuses ondes thermiques. Dans un second travail²⁾, nous avons pu montrer que les perturbations apportées au réseau de FOURIER d'un cristal parcouru simultanément par deux ondes ne sont pas simplement données par la superposition des perturbations dues séparément aux deux ondes. L'introduction de cet effet dans la théorie des ondes thermiques constitue le sujet de cet article. Il donne la théorie complète de l'influence des mouvements thermiques sur la diffraction des rayons X. Cette théorie a déjà été donnée par différents auteurs et leurs résultats les plus importants peuvent se résumer ainsi:

DEBYE³⁾, le premier, donne une théorie basée sur les vibrations des atomes analogue à la théorie d'EINSTEIN sur les chaleurs spécifiques. Les atomes vibrent indépendamment les uns des autres; l'augmentation de température produit alors un fond continu dont l'intensité augmente régulièrement avec l'angle de diffraction, mais ne montre aucune discontinuité ou même aucun maximum dans les directions de réflexion sur les plans réticulaires. Nous donnerons à ces directions ou à ces réflexions le nom de LAUE, car l'intensité des rayons X diffractés se sépare nettement en deux parties: le fond continu et les réflexions de LAUE. Avec l'augmentation de température ces réflexions de LAUE voient,

¹⁾ WEIGLE, *Helv. Phys. Acta* **15**, 162, 1942.

²⁾ WEIGLE et BLEULER, *Helv. Phys. Acta* **15**, 445, 1942.

³⁾ DEBYE, *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.* **15**, 678, 1913.

elles, leurs intensités diminuer, mais leurs largeurs restent constantes; il n'y a aucun étalement des réflexions. DEBYE¹⁾ corrige ensuite cette première théorie en introduisant à la place des mouvements indépendants des atomes les ondes thermiques, au moyen desquelles il avait expliqué les chaleurs spécifiques des cristaux. Toutefois, DEBYE remarque lui-même que, dans ses nouveaux calculs, il introduit une moyenne qui revient à admettre que les atomes se meuvent d'une façon indépendante. Il n'est pas étonnant alors que sa seconde théorie donne les mêmes résultats que la théorie élémentaire. FAXEN²⁾, dans un travail fondamental, évite cette erreur et montre en première approximation, comment l'introduction du couplage des vibrations atomiques produit, dans le fond continu, des maxima étalés dans les directions de LAUE. Les réflexions de LAUE diminuent d'intensité avec l'augmentation de température comme dans la théorie de DEBYE; mais, si l'on tient compte des maxima du fond continu, on trouve qu'il est possible que la largeur des réflexions augmente avec l'augmentation de température et que, à hautes températures, les réflexions de LAUE se fondent dans le fond continu. FAXEN interprète cette théorie dans le réseau réciproque et indique qu'on doit pouvoir obtenir, en dehors de l'angle de BRAGG, des réflexions diffuses près des réflexions de LAUE, réflexions diffuses qui proviennent des maxima étalés du fond continu. C'est l'observation expérimentale, par LAVAL³⁾, RAMAN⁴⁾, PRESTON⁵⁾, ZACHARIASEN⁶⁾, LONSDALE⁷⁾, de ces maxima diffus qui a remis la question à l'ordre du jour. ZACHARIASEN⁸⁾, puis SMITH⁹⁾ et l'un de nous ont donné des calculs de première approximation qui, par des méthodes différentes, arrivent exactement aux résultats déjà anciens de FAXEN. C'est WALLER¹⁰⁾ le premier qui, se basant sur les travaux de FAXEN, a traité le problème entièrement. Il retrouve la première approximation de FAXEN, mais donne, en plus, les approximations supérieures. Il corrige en outre une autre erreur de DEBYE concernant le nombre des vibrations du cristal. Enfin, LAUE¹¹⁾, partant de

¹⁾ DEBYE, Ann. der Phys. **43**, 49, 1914.

²⁾ FAXEN, Ann. der Phys. **54**, 614, 1918 et Z. f. Phys. **17**, 266, 1923.

³⁾ LAVAL, Bull. Soc. Min. de France. **62**, 137, 1939.

⁴⁾ RAMAN, Ind. Acad. Sc. **11**, 379, 1940.

⁵⁾ PRESTON, Proc. Roy. Soc. **179**, 69, 1941.

⁶⁾ ZACHARIASEN, Phys. Rev. **57**, 597, 1940 et **59**, 860, 1941.

⁷⁾ LONSDALE, Proc. Roy. Soc. **179**, 8, 1941.

⁸⁾ ZACHARIASEN, loc. cit.

⁹⁾ WEIGLE et SMITH, Phys. Rev. **61**, 23, 1942.

¹⁰⁾ WALLER, Diss. Uppsala, 1925.

¹¹⁾ LAUE, Ann. der Phys. **81**, 877, 1926.

l'idée que les rayons X subissent un effet DÖPPLER en se réfléchissant sur les ondes thermiques, reprend de ce point de vue toute la théorie pour aboutir exactement aux résultats de WALLER.

La théorie qu'on trouvera ici retrouve en principe les mêmes résultats. Les formules de WALLER étaient d'une complication extrême et il nous semble que les nôtres sont plus simples et, en tous cas, sont d'une interprétation facile dans le réseau réciproque (réseau de FOURIER), car, en effet, c'est celui-ci qui sert de base à toutes nos considérations.

2. Réseau de Fourier d'un cristal perturbé par plusieurs ondes.

Pour obtenir les facteurs de structure et la structure du réseau de FOURIER, il est nécessaire d'étendre la densité électronique $F(\mathbf{a})$ du cristal en intégrale de FOURIER. On a tout d'abord :

$$F(\mathbf{a}) = \sum_l f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l - \boldsymbol{\eta}_l) \quad (1)$$

où $f(\mathbf{a})$ est la densité électronique d'un atome. Les points $\mathbf{a}_{l_1 l_2 l_3} = \mathbf{a}_l$ sont occupés par les atomes (tous semblables) en l'absence d'ondes. Les ondes déplacent l'atome l de sa position d'équilibre \mathbf{a}_l d'une distance $\boldsymbol{\eta}_l$. Supposons $f(\mathbf{a})$ donné; sa transformée de FOURIER est alors connue, car on a :

$$f(\mathbf{a}) = \int \varphi(\mathbf{b}) e^{2\pi i(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} d\mathbf{v}_b \quad \varphi(\mathbf{b}) = \int f(\mathbf{a}) e^{-2\pi i(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} d\mathbf{v}_a \quad (2)$$

On trouve alors, pour l'intégrale de FOURIER de $F(\mathbf{a})$:

$$F(\mathbf{a}) = \int \Phi(\mathbf{b}) e^{2\pi i(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} d\mathbf{v}_b$$

$$\Phi(\mathbf{b}) = \int \sum_l f(\mathbf{a} - \mathbf{a}_l - \boldsymbol{\eta}_l) e^{-2\pi i(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})} d\mathbf{v}_a = \sum_l \varphi(\mathbf{b}) e^{-2\pi i \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}_l + \boldsymbol{\eta}_l)} \quad (3)$$

Ecrivons maintenant que $\boldsymbol{\eta}_l$ est dû à un certain nombre M d'ondes de vecteurs \mathbf{k}_j et de fréquences ν_j :

$$\boldsymbol{\eta}_l = \sum_{j=1}^M \xi_j \sin 2\pi (\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{a}_l - \nu_j t) \quad (4)$$

En tenant compte de la formule

$$e^{ix \sin y} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} J_h(x) e^{ihn y}$$

J_n étant la fonction de BESSEL de première espèce d'ordre n , on trouve, pour le facteur contenant η_i

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i (\mathbf{b} \eta_i)} &= \prod_j \sum_{n_j=-\infty}^{+\infty} J_{n_j}(2\pi (\mathbf{b} \xi_j)) e^{-2\pi i n_j (\mathbf{k}_j \mathbf{a}_i - v_j t)} \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_j, \dots} e^{2\pi i \sum_j n_j (\mathbf{k}_j \mathbf{a}_i)} e^{2\pi i \sum_j n_j v_j t} \prod_j J_{n_j}(2\pi (\mathbf{b} \xi_j)) \end{aligned}$$

En introduisant cette expression dans (3), on trouve

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_j, \dots} \int \sum_l e^{-2\pi i (\mathbf{b}' \mathbf{a}_l)} H(\mathbf{b}') dv_b$$

avec

$$H(\mathbf{b}') = \varphi(\mathbf{b}' - \sum_j n_j \mathbf{k}_j) e^{2\pi i \sum_j n_j v_j t} \prod_j J_{n_j}(2\pi (\mathbf{b}' - \sum_j n_j \mathbf{k}_j) \xi_j)$$

et

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \sum_j n_j \mathbf{k}_j$$

Par un raisonnement semblable à celui que nous avons déjà employé¹⁾, on transforme l'intégration en une somme et l'on a

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}) &= \sum_h \sum_{n_1, \dots} v_b \varphi(\mathbf{b}_h - \sum_j n_j \mathbf{k}_j) e^{2\pi i \sum_j n_j v_j t} \\ &\quad \left(\prod_j J_{n_j}(2\pi (\mathbf{b}_h - \sum_j n_j \mathbf{k}_j) \xi_j) \right) e^{2\pi i (\mathbf{b}_h - \sum_j n_j \mathbf{k}_j) \mathbf{a}} \end{aligned} \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{b}_h = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3 \quad (h = \text{entiers})$$

les \mathbf{b}_i étant les vecteurs réciproques des \mathbf{a}_i et $v_b = (\mathbf{b}_1[\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3])$.

Cette expression a la forme d'une série de FOURIER et l'on voit donc que le réseau de FOURIER est formé de points définis par les vecteurs

$$\mathbf{b}_h - \sum_j n_j \mathbf{k}_j \quad (6)$$

Pour bien comprendre la structure de ce réseau, il est nécessaire de spécifier quels sont les vecteurs \mathbf{k}_j des ondes thermiques permises par la structure du cristal.

¹⁾ Helv. Phys. Acta 15, 445, 1942, Appendice.

3. Ondes thermiques.

Nous admettons les conditions aux limites de BORN KARMAN, qui supposent que le système des ondes contenues dans un bloc du cristal de dimensions $N_1 \mathbf{a}_1$, $N_2 \mathbf{a}_2$, $N_3 \mathbf{a}_3$ se répète semblable à lui-même dans les autres blocs. On sait alors que les seules ondes permises sont celles dont les vecteurs \mathbf{k}_j sont donnés par

$$\mathbf{k}_j = \frac{j_1}{N_1} \mathbf{b}_1 + \frac{j_2}{N_2} \mathbf{b}_2 + \frac{j_3}{N_3} \mathbf{b}_3 \quad (j_i = \text{entiers}) \quad (7)$$

En plus, on sait que les ondes de vecteurs $\mathbf{b}_h + \mathbf{k}_j$ donnent des déplacements des atomes exactement équivalents à ceux donnés par les ondes \mathbf{k}_j . Il suffit donc, pour avoir tous les vecteurs d'onde possibles, de choisir les j_i entre $-\frac{N_i}{2}$ et $+\frac{N_i}{2}$. Lorsqu'on trace, dans le réseau de FOURIER, les points auxquels aboutissent tous les \mathbf{k}_j permis, on obtient donc des points répartis d'une façon uniforme. Nous appellerons maille fondamentale l'espace rempli par ces points et nous conserverons l'indice j pour les vecteurs \mathbf{k}_j contenus dans celle-ci. Il faut remarquer qu'à chaque vecteur \mathbf{k}_j plusieurs ondes correspondent, dont les fréquences sont différentes. Il y a tout d'abord les trois ondes acoustiques, l'une « longitudinale » et les deux autres « transversales ». Puis, si la maille élémentaire du cristal contient plusieurs atomes, il y a les ondes optiques, dont les fréquences sont en général beaucoup plus grandes que celles des ondes acoustiques. On retrouve ainsi $3nN_1N_2N_3 = 3N$ ondes différentes correspondant aux $3N$ degrés de liberté des N atomes (n est le nombre des atomes contenus dans la maille du cristal). L'expression (6) définit la structure du réseau de FOURIER perturbé par les ondes. Elle fait intervenir autour de chaque point \mathbf{b}_h tout d'abord tous les points de la maille fondamentale centrée cette fois sur \mathbf{b}_h et non plus sur l'origine du réseau. En plus, il y a tous les points en dehors de cette maille fondamentale, qui sont atteints par une combinaison quelconque des \mathbf{k}_j ou des multiples de ceux-ci. Ainsi, à partir d'un point \mathbf{b}_h , il s'étend sur tout le réseau non perturbé un voile plus fin, dont la maille est faite de $\frac{\mathbf{b}_1}{N_1}$, $\frac{\mathbf{b}_2}{N_2}$ et $\frac{\mathbf{b}_3}{N_3}$ de la formule (7). Et cela est vrai pour chaque point \mathbf{b}_h ; mais, comme on le voit, ces réseaux fins se recouvrent exactement et le nouveau réseau de FOURIER est simplement recouvert d'une façon homogène de points nouveaux.

Il faut chercher maintenant quel est le facteur de structure d'un point quelconque de ce nouveau réseau de FOURIER. On voit qu'un nombre infini de combinaisons des h et des n_j laisse $\mathbf{b}_h - \sum_j n_j \mathbf{k}_j$ invariant. Ces combinaisons sont faites de tous les chemins qui mènent de l'origine du réseau de FOURIER au point considéré, en passant par les points du réseau. A chacun de ces chemins, c'est-à-dire à chacune de ces combinaisons des h et des n_j correspond un terme dans l'expression (6). Mais ces termes ont en général des fréquences $\sum_j n_j \nu_j$ différentes. Cela veut dire

que lorsque les rayons X seront diffractés dans la direction du point considéré dans le réseau de FOURIER, ils seront modulés par ces fréquences (effet DÖPPLER). Ces différentes ondes de rayons X diffractés dans la même direction ne pourront pas interférer puisqu'elles auront ainsi des fréquences différentes et, par conséquent, pour obtenir le facteur de structure du point, il faudra non pas additionner simplement les contributions des différentes combinaisons mais additionner les carrés de ces contributions. Il sera donc plus simple de calculer directement le carré du facteur de structure.

Pour simplifier les calculs, nous supposerons qu'une seule onde thermique est attachée à chaque vecteur \mathbf{k}_j , mais nous donnerons plus loin les résultats complets faisant intervenir toutes les ondes. Ensuite, nous ordonnerons les différentes contributions apportées par les différents chemins de la façon suivante:

Nous prendrons tout d'abord celles qui sont associées à un \mathbf{b}_h donné; nous poserons alors

$$\sum_j n_j \mathbf{k}_j = \mathbf{K}_p$$

\mathbf{K}_p étant le vecteur dont on s'est déplacé à partir de \mathbf{b}_h . Il aboutit au point P pour lequel on désire calculer le facteur de structure. Parmi les contributions associées à un \mathbf{b}_h , nous choisirons ensuite celles qui satisfont à

$$|n_1| + |n_2| + \dots + |n_j| + \dots = 1$$

Il y en a deux seulement, qui sont celles apportées par $|n_p| = 1$ et qui donnent donc $\mathbf{K}_p = \mathbf{k}_p$ (les symboles \mathbf{k} étant, comme nous l'avons dit, réservés aux ondes thermiques permises, c'est-à-dire aux vecteurs ne sortant pas de la maille fondamentale alors que, d'une façon générale, \mathbf{K} peut en sortir).

Ensuite, nous prendrons les combinaisons

$$\sum |n_j| = 2$$

Ces combinaisons sont celles qui, par deux pas, dont les grandeurs ne dépassent pas les dimensions de la maille fondamentale, mènent de \mathbf{b}_h à P . On peut choisir ces pas de différentes façons, chacune apportant sa contribution au facteur de structure.

Il y aura ensuite les chemins de trois pas, de quatre pas, etc., pour lesquels la somme des $|n_j|$ vaudra 3, 4, etc. On trouve ainsi, à partir de (5), pour le carré du facteur de structure du point P provenant d'un point \mathbf{b}_h , que nous dénotons par

$$I_h^2(\mathbf{b}_h, \mathbf{K}_p) = I_h^2\left(\frac{\mathbf{K}}{2\pi}\right)$$

en posant

$$2\pi(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}_p) = \mathbf{K}$$

$$\begin{aligned} I_h^2\left(\frac{\mathbf{K}}{2\pi}\right) v_b^{-2} \left| \varphi\left(\frac{\mathbf{K}}{2\pi}\right) \right|^{-2} \\ = J_1^2(\mathbf{K}\xi_{i'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i'}}^N J_0(\mathbf{K}\xi_j) + J_{-1}^2(\mathbf{K}\xi_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (J_0^2 \mathbf{K}\xi_j) \\ + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{r \\ k_r + k_s = \mathbf{K}_p}} \left\{ J_1^2(\mathbf{K}\xi_{r'}) J_1^2(\mathbf{K}\xi_{s'}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r' \\ j \neq s'}}^N J_0^2(\mathbf{K}\xi_j) \right. \\ \left. + J_{-1}^2(\mathbf{K}\xi_r) J_1^2(\mathbf{K}\xi_s) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r \\ j \neq s}}^N J_0^2(\mathbf{K}\xi_j) \right. \\ \left. + J_1^2 J_{-1}^2 \prod J_0^2 + J_{-1}^2 J_{-1}^2 \prod J_0^2 \right\} + J_2^2(\mathbf{K}\xi_{i'}) \prod_{\substack{j \neq i'}} J_0^2(\mathbf{K}\xi_j) \\ - J_{-2}^2(\mathbf{K}\xi_i) \prod_{j \neq i} J_0^2(\mathbf{K}\xi_j) \\ + \frac{1}{3!} \sum_{\substack{r, s \\ k_r + k_s + k_t = \mathbf{K}_p}} \left\{ J_1^2(\mathbf{K}\xi_{r'}) J_1^2(\mathbf{K}\xi_{r'}) J_1^2(\mathbf{K}\xi_{t'}) \prod_{\substack{j \neq r' \\ j \neq t' \\ j \neq r'}} J_0^2(\mathbf{K}\xi_j) + \dots \right\} \\ + J_2^2 J_1^2 \prod J_0^2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

ξ_i' signifie l'amplitude de l'onde attachée au vecteur $-\mathbf{k}_i$.

Pour $\mathbf{K}_p = 0$, le premier terme doit être remplacé par

$$\prod_{j=1}^N J_0^2(2\pi \mathbf{b}_h \xi_j) \quad (9)$$

Les arguments qui figurent dans les fonctions de BESSEL sont toujours extrêmement petits à cause de la présence des ξ qui sont de l'ordre de $1/\sqrt{N}$ comme nous le verrons. Ainsi, on peut développer ces fonctions en puissance de l'argument et l'on a

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \\ J_1^2(x) &= J_{-1}^2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ J_n^2(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2|n|} \left(\frac{1}{|n|!}\right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Pour aller plus loin, il faut exprimer les amplitudes des ondes en fonction de la température et des constantes du cristal. Dans ce qui suit, nous supposons que les calculs sur la dynamique du cristal ont donné la loi de dispersion des ondes, c'est-à-dire leurs vitesses v_j en fonction de leurs longueurs d'onde

$$v_j(\mathbf{k}_j) = \frac{v_j}{k_j} \quad (11)$$

En plus, nous supposons que ces mêmes calculs ont fourni la direction de vibration $\xi_j^0 = \xi_j / |\xi_j|$. Dans ces conditions, la loi de répartition de l'énergie donne

$$\xi_j^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{2\pi^2 m v_j^2 k_j^2} \left(\frac{h v_j}{e^{\frac{h v_j}{\kappa T}} - 1} + \frac{h v_j}{2} \right) \quad (12)$$

κ étant la constante de BOLTZMANN, T la température absolue, et m la masse des atomes. Si la température est suffisamment haute, cette expression dégénère en équipartition

$$\xi_j^2 = \frac{1}{N} \frac{\kappa T}{2\pi^2 m v_j^2 k_j^2} \quad (13)$$

Pour ne pas alourdir nos formules, c'est cette dernière expression que nous introduirons et nous indiquerons plus loin les formules exactes obtenues avec (12). Il intervient dans (10) des termes de la forme

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \pi^2 (\mathbf{b}_n + \mathbf{K}_p) \xi_j^2 = \frac{((\mathbf{b}_n + \mathbf{K}_p) \xi_j^0)^2 \kappa T}{2 N m v_j^2 k_j^2}$$

que nous écrirons sous forme d'une fonction

$$f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}_p, \mathbf{k}_j) = \frac{((\mathbf{b}_h + \mathbf{K}_p) \cdot \boldsymbol{\xi}_j^0)^2 \propto T_0}{2 m v_j^2 k_j^2} = f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}_p, \mathbf{k}_{j'}) \quad (14)$$

$$\mathbf{k}_{j'} = -\mathbf{k}_j$$

T_0 est une température constante caractéristique que nous choisirons égale à peu près à $m \bar{v}^2$. Nous introduirons alors une température relative $t = T/T_0$.

Si \mathbf{k}_m est un vecteur qui dépasse la maille fondamentale, il faut prendre

$$f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}_p, \mathbf{k}_m) \equiv 0$$

et, dans (8), les sommes et les produits peuvent maintenant être formellement étendus à tous les points du réseau de FOURIER. On trouve alors, en introduisant ces simplifications dans (8):

$$\begin{aligned} & I_h^2 v_b^{-2} |\varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{K})|^{-2} \\ &= \frac{t}{N} \left\{ \left[f(\mathbf{b}_h - \mathbf{K}, \mathbf{k}_{i'}) + \frac{1}{N} \cdots \right] \prod_{j \neq i'} \left(1 - \frac{t}{N} f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{k}_j) + \frac{t^2}{N^2} \cdots \right)^2 \right. \\ &+ \left[f(\mathbf{b}_h - \mathbf{K}, \mathbf{k}_i) + \frac{1}{N} \cdots \right] \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{1}{N} f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{k}_j) - \frac{t^2}{N^2} \cdots \right)^2 \Big\} \\ &+ \frac{t^2}{2! N^2} \left\{ \sum_r \left(\left[f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{k}_r) \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{N} \cdots \right] \left[f(\mathbf{b}_h - \mathbf{K}, \mathbf{K} - \mathbf{k}_r) + \frac{1}{N} \cdots \right] \prod_{j \neq r} (\cdots)^2 + \cdots \right\} \\ &+ \cdots \end{aligned} \quad (15)$$

Pour pouvoir effectuer ces opérations, nous supposons que les points du réseau de FOURIER sont si rapprochés les uns des autres qu'ils forment une distribution continue. Cela revient à supposer le cristal infiniment grand et donc à passer à la limite $N \rightarrow \infty$. Nous séparerons alors le problème en deux parties distinctes: l'une, dans laquelle nous étudierons l'effet de la température sur le facteur de structure d'un point de Laue $\mathbf{b}_h(\mathbf{K}_p = 0)$, puis une seconde, dans laquelle nous considérerons le fond continu.

4. Effet de la température sur un point de Laue.

Si l'on pose $\mathbf{K}_p = 0$, on trouve, pour le premier terme de (15), selon (9)

$$I_h^2 = v_b^2 |\varphi(\mathbf{b}_h)|^2 \prod_j \left(1 - \frac{t}{N} f(\mathbf{b}_h, \mathbf{k}_j) + \frac{t^2}{N^2} \dots \right)^2$$

d'où l'on tire

$$\log \frac{I_h}{v_b |\varphi(\mathbf{b}_h)|} = \sum_j \log \left(1 - \frac{t}{N} f(\mathbf{b}_h, \mathbf{k}_j) + \dots \right)$$

En développant le logarithme, on a

$$\log \frac{I_h}{v_b |\varphi(\mathbf{b}_h)|} = -\frac{t}{N} \sum_j f(\mathbf{b}_h, \mathbf{k}_j) + \frac{t^2}{N^2} \dots \quad (16)$$

Pour passer à la limite $N \rightarrow \infty$, nous introduirons la fonction continue

$$f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') = \frac{\kappa T_0 ((\mathbf{b}_h + \mathbf{K}) \cdot \xi^0(\mathbf{K}'))^2}{2 m v^2(\mathbf{K}') K'^2} \delta(\mathbf{K}')$$

avec

$$\delta(\mathbf{K}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{K}' \text{ sort de la maille fondamentale} \\ 1 & \text{si } \mathbf{K}' \text{ est contenu dans la maille fondamentale.} \end{cases}$$

Nous remplacerons alors la somme de (16) par une intégrale en posant

$$\frac{1}{N} \rightarrow \frac{dv_{K'}}{v_b}$$

où $dv_{K'}$ est l'élément de volume dans l'espace de Fourier et v_b le volume de la maille fondamentale. Il vient alors

$$\log \frac{I_h(\mathbf{b}_h)}{v_b |\varphi(\mathbf{b}_h)|} = -t \int f(\mathbf{b}_h, \mathbf{K}') \frac{dv_{K'}}{v_b} + \frac{t^2}{N^2} \int \dots$$

L'intégrale est formellement étendue à tout l'espace de FOURIER grâce à l'introduction de la fonction δ ci-dessus. Comme $N \rightarrow \infty$ tous les termes supérieurs disparaissent à la limite et l'on trouve alors

$$I_h^2(\mathbf{b}_h) = v_b^2 |\varphi(\mathbf{b}_h)|^2 e^{-2t \int f(\mathbf{b}_h, \mathbf{K}') \frac{dv_{K'}}{v_b}} \quad (17)$$

On peut démontrer que tous les autres termes de (15) disparaissent aussi à la limite $N \rightarrow \infty$ et par conséquent l'expression (17) donne la valeur complète du facteur de structure (nous avons donc écrit ${}_1I_h = I_h$). Pour $t \rightarrow 0$, on retrouve bien le facteur de structure du cristal non perturbé. On sait, d'autre part, que le facteur exponentiel a reçu le nom de facteur de DEBYE et qu'on le distingue par la lettre M .

$$M = t \int f(\mathbf{b}_h, \mathbf{K}') \frac{d v_{K'}}{v_b} \quad (18)$$

Cette expression donne la valeur exacte de M . On peut calculer celui-ci en introduisant différentes suppositions pour comparer notre résultat avec celui de DEBYE ou de WALLER. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, DEBYE obtient par erreur un facteur e^{-M} marquant l'effet de la température, tandis que WALLER donne e^{-2M} , qui est exact. L'erreur de DEBYE vient du fait qu'il a compté comme une seule onde l'onde stationnaire avec laquelle il représente le mouvement des atomes. Toutefois, dans son premier travail, dans lequel il décrit les mouvements thermiques par des oscillations indépendantes (de fréquence ν_0) des atomes, cette erreur n'apparaît pas. Nous allons montrer que notre expression (18) contient comme cas particuliers les vibrations indépendantes ou les ondes. On peut donner le résultat du premier travail de DEBYE sous la forme

$$e^{-\frac{4 \pi^2 \kappa T}{f} b_h^2} \quad (19)$$

où f est la constante élastique des oscillateurs atomiques ($m \ddot{u} = -fu$) dont la fréquence est

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}}$$

Pour exprimer cela dans notre théorie, il faut tout d'abord admettre qu'à chaque vecteur d'onde \mathbf{k}_j correspondent trois ondes dont les directions de vibration sont mutuellement perpendiculaires

$$({}^p \xi^0 \quad {}^q \xi^0) = \delta_{pq} \quad (p, q = 1, 2, 3) \quad (20)$$

En plus, la loi de dispersion (exprimant que la fréquence est constante) devient

$$\nu_V(\mathbf{k}) = \frac{\nu_0}{k}$$

Nous trouvons alors

$$2 t \int f(\mathbf{b}_h, \mathbf{K}') \frac{dv_{K'}}{v_b} = \int \frac{\kappa T}{m v_0^2} \sum_p (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{\xi}^0(\mathbf{k}))^2 \frac{dv_k}{v_b} \\ = \frac{\kappa T}{m v_0^2} \mathbf{b}_h^2 = \frac{\kappa T 4 \pi^2}{f} \mathbf{b}_h^2$$

car, en vertu de (20), on a

$$\sum_p (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{\xi}^0(\mathbf{k}))^2 = \mathbf{b}_h^2$$

Cela est bien le résultat cité ci-dessus.

Si l'on veut, par contre, introduire le résultat du second travail de DEBYE, on doit, comme lui, trouver

$$M = \frac{3 \mathbf{b}_h^2}{2 m v_{\max}^3} \int_0^{v_{\max}} \left(\frac{h v}{e^{h v / \kappa T} - 1} + \frac{h v}{2} \right) dv \quad (21)$$

où v_{\max} est définie par la condition que le cristal contienne en tout $3 N$ ondes thermiques.

Notre formule (18) devient, dans le cas quantique,

$$M = \int \sum_p \frac{(\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{\xi}^0(\mathbf{k}))^2}{2 m v^2(\mathbf{k}) k^2} \left(\frac{h^p v}{e^{h^p v / \kappa T} - 1} + \frac{h^p v}{2} \right) \frac{dv_k}{v_b} \quad (22)$$

Nous supposons¹⁾ que la vitesse est constante et indépendante de $\mathbf{\xi}^0$.

La fréquence correspondant au vecteur d'onde \mathbf{k} devient alors

$$v_p(\mathbf{k}) = k v = v(k)$$

Si l'on suppose, en plus, un milieu isotrope, on a

$$(\mathbf{\xi}^0 \cdot \mathbf{\xi}^0) = \delta_{pq}$$

Il faut maintenant, pour suivre DEBYE, intégrer non pas sur la maille fondamentale, mais sur une sphère de même volume, dont le rayon

$$k_{\max} = \frac{v_{\max}}{v}$$

¹⁾ DEBYE en réalité suppose des vitesses différentes pour les ondes transversales et longitudinales respectivement, mais pour ne pas allonger cette comparaison, nous prendrons une seule vitesse.

est déterminé par

$$\frac{4\pi}{3} (k_{\max})^3 = v_b$$

d'où l'on tire

$$v_{\max} = v \sqrt[3]{\frac{3 v_b}{4 \pi}}$$

Ainsi (22) devient

$$\begin{aligned} M &= \frac{2 \pi b_h^2}{m v_b v^3} \int_0^{v_{\max}} \left(\frac{h v}{e^{h v / \kappa T} - 1} + \frac{h v}{2} \right) d v \\ &= \frac{3 b_h^2}{2 m v_{\max}^3} \int_0^{v_{\max}} \left(\frac{h v}{e^{h v / \kappa T} - 1} + \frac{h v}{2} \right) d v \end{aligned}$$

C'est bien là l'expression (21) de DEBYE si notre v_{\max} correspond à celui qu'il a choisi. Il prend en effet (V étant le volume du cristal)

$$3 N = V \frac{v_{\max}^3}{v^3} 4 \pi \quad v_{\max} = v \sqrt[3]{\frac{3 N}{4 \pi V}} = v \sqrt[3]{\frac{3 v_b}{4 \pi}}$$

car V/N est le volume de la maille fondamentale et l'on a $v_b = N/V$.

Remarquons, pour terminer, que notre facteur est toutefois e^{-2M} et non pas e^{-M} comme pour DEBYE.

5. Fond continu.

Pour calculer le facteur de structure des points du réseau de FOURIER en dehors des points de LAUE, il faut revenir à la formule (15). Si $N \rightarrow \infty$, le nombre des points contenus dans la maille fondamentale augmente indéfiniment, mais l'amplitude de chaque onde diminue de façon à laisser la densité d'énergie constante. Il sera commode d'introduire alors la densité du carré du facteur de structure

$$i^2 (\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) = \frac{N}{v_b} I_h^2 (\mathbf{b}_h + \mathbf{K})$$

Pour $N \rightarrow \infty$, la formule (17) nous donne des termes finis, car chacun d'entre eux possède un facteur $\frac{1}{N}$ ou $\frac{1}{N^2}$, etc. On voit aussi que les produits sont égaux, car ils ne diffèrent entre eux que d'un nombre fini de facteurs J_0^2 qui tendent vers l'unité lors-

que $N \rightarrow \infty$. On peut donc les calculer comme au paragraphe précédent et, en posant encore une fois $\frac{1}{N} = \frac{dv_K}{v_b}$, on trouve

$$\begin{aligned} i_h^2(\mathbf{b}_h + \mathbf{k}) = v_b \left| \varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}) \right|^2 e^{-2t \int f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') \frac{dv_{K'}}{v_b}} & \left\{ 2t f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}) \right. \\ & + \frac{t^2}{2!} 2^2 \int_{\mathbf{K}'} f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K} - \mathbf{K}') \frac{dv_{K'}}{v_b} \\ & + \frac{t^3}{3!} 2^3 \int_{\mathbf{K}'} \int_{\mathbf{K}''} f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}'') \\ & \quad \left. f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K} - \mathbf{K}' - \mathbf{K}'') \frac{dv_{K'}}{v_b^2} \frac{dv_{K''}}{v_b} \right. \\ & \left. + \dots \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

On peut mettre ce résultat sous une forme plus condensée en définissant les fonctions itérées suivantes

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') &= f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') \\ f_n(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') &= \int f_{n-1}(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}'') f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}' - \mathbf{K}'') \frac{dv_{K''}}{v_b} \quad (24) \end{aligned}$$

et, par substitution, on voit que (23) prend alors la forme

$$\begin{aligned} i_h^2(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}) &= v_b \left| \varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}) \right|^2 e^{-2t \int f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') \frac{dv_{K'}}{v_b}} \\ & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n f_n(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}) \quad (25) \end{aligned}$$

La somme infinie apparaissant dans cette expression est convergente. En effet, quoique la fonction f ait une singularité en $\frac{1}{|\mathbf{K}'|^2}$ au point $\mathbf{K}' = 0$, elle est intégrable, autrement dit la grandeur

$$C(\mathbf{K}) = \int_{v_b} f(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') \frac{dv_{K'}}{v_b}$$

est finie. Pour $n > 4$, on trouve alors les inégalités

$$f_n(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}') \leq c(\mathbf{K}) f_{n-1}(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}'_{\max})$$

où \mathbf{K}'_{\max} est la valeur de \mathbf{K}' , qui donne à la fonction f_{n-1} sa valeur la plus grande. On peut donc écrire

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n f^n \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n (c(K))^n < e^{2c(K)t}$$

ce qui montre bien la convergence de la somme infinie.

Remarquons encore qu'on peut montrer que f_2 et f_3 ont des singularités au point $\mathbf{K}' = 0$ en $1/|\mathbf{K}'|$ et $\log |\mathbf{K}'|$ respectivement. Mais, comme f , ces fonctions sont intégrables. Nous trouvons donc finalement que le fond continu est constitué par différents termes, qui ont tous un maximum dans le point de LAUE. Mais ces maxima sont de plus en plus petits, les fonctions sont de plus en plus plates à mesure que l'ordre des termes s'élève. Enfin, pour avoir une représentation complète du phénomène, il faudrait connaître la valeur de chacun de ces termes relativement au terme d'ordre zéro, c'est-à-dire relativement à la valeur du facteur de structure au point de LAUE.

Pour cela on pourrait introduire le facteur de LORENTZ ou plus simplement encore supposer que le cristal est fini. Pour obtenir l'ordre de grandeur des différents termes, c'est ainsi que nous procéderons en supposant que le cristal est un cube de côté l contenant N atomes, la constante réticulaire valant $a = lN^{-1/3}$. Il faut alors introduire la fonction de LAUE qui, comme on le sait, a un fort maximum l^3 (largeur $\sim \frac{2}{l}$), entouré de chaque côté par des maxima beaucoup plus petits. Pour faciliter nos calculs approximatifs nous supposerons plutôt que chaque point du réseau de FOURIER est étalé sur une sphère de rayon $\frac{1}{l}$; à l'intérieur de la sphère il faut multiplier le facteur de structure carré par l^3 , à l'extérieur par 0. Calculons ainsi la valeur intégrée de tous les points du réseau de FOURIER, donnant une contribution en b_h pour le premier terme du fond continu. Nous écrirons approximativement

$$t \sum_p \frac{((b_h + k)^p \xi)^2 \propto T_0}{m^p v^2 k^2} \cong t \frac{b_h^2}{k_2} \quad (T_0 \cong \overline{m^p v^2})$$

La valeur intégrée en $k = 0$ devient

$$t l^3 \int_0^{1/l} \frac{b_h^2}{k_2} 4 \pi k^2 dk = 4 \pi t b_h^2 l^2 = 4 \pi t (b_h a)^2 N^{2/3}$$

Pour le deuxième terme du fond continu (singularité en $\frac{1}{k}$ pour $k = 0$) on a par un calcul semblable approximativement

$$\sim 2 \pi t^2 (b_h a)^4 N^{1/3}$$

et l'on peut alors comparer les contributions à l'endroit du point de LAUE des différents termes:

$$\begin{aligned} \text{réflexion de LAUE} & \quad v_b \varphi^2 e^{-2M} N \\ \text{1er terme du fond continu} & \quad \sim 4 \pi t v_b \varphi^2 e^{-2M} (b_h a)^2 N^{2/3} \\ \text{2ème terme du fond continu} & \quad \sim 2 \pi t^2 v_b \varphi^2 e^{-2M} (b_h a)^4 N^{1/3} \end{aligned} \quad (26)$$

Remarquons tout d'abord que $(b_h a)^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ pour un réseau cubique; $(b_h \cdot a)$ est donc en quelque sorte l'ordre de la réflexion.

On voit que l'effet du fond continu est d'autant plus marqué que l'ordre est élevé. En plus le facteur e^{-2M} produit une diminution de l'intensité de réflexion lorsque la température augmente; mais les termes du fond continu étant multipliés par t, t^2 , etc., cette diminution due au facteur e^{-2M} est en partie compensée. On peut donc concevoir que, dans un certain intervalle de température, le fond varie très peu d'intensité. RAMAN¹⁾ a remarqué que les réflexions diffuses en dehors de l'angle de BRAGG qu'il observait ne changeaient que très peu avec la température. Il a cru pouvoir en déduire que ces réflexions ne pouvaient pas être dues aux ondes thermiques. Nos résultats montrent que cet argument n'a pas de valeur.

Si on compare entre eux les différents termes (26), on voit que leurs valeurs diminuent par un facteur $N^{1/3}$. Cela n'est vrai évidemment qu'au point de LAUE; il est possible que si l'on est assez loin de celui-ci, le deuxième terme devienne du même ordre de grandeur que le premier. Toutefois, dans le voisinage immédiat du point de LAUE et pour des températures et des ordres pas trop élevés seul le premier terme est important. Cela justifie les calculs de FAXEN, ZACHARIASEN et WEIGLE et SMITH dans les travaux que nous avons cité plus haut. Cela revient à admettre que dans le voisinage du point de LAUE seules les ondes thermiques de grandes longueurs d'onde et de petites fréquences déterminent les facteurs de structure et donc l'intensité de la diffraction des rayons X. On peut donc calculer celle-ci à partir des constantes élastiques macroscopiques du cristal.

¹⁾ RAMAN, loc. cit.

Remarquons enfin que pour le fond continu on n'obtient pas une intensité intégrée indépendante de la largeur du faisceau employé comme le donne le facteur de LORENTZ pour un point de LAUE.

Nous reviendrons sur ces questions dans un article suivant.

6. Généralisations et conclusions.

Jusqu'ici, nous avons admis, pour ne pas alourdir nos formules, qu'à chaque vecteur d'onde k , une seule onde était associée et qu'en plus l'énergie était distribuée parmi ces ondes d'après la loi de l'équipartition. Il nous faut maintenant nous libérer de ces deux suppositions.

Il y a, dans le cristal simple que nous avons considéré, trois ondes attachées à chaque vecteur d'onde et leurs amplitude sont données par (12). Ainsi il est nécessaire de définir une nouvelle fonction G qui remplacera (14)

$$G(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}', T) = \sum_{p=1,2,3} \frac{((\mathbf{b}_h + \mathbf{K})^p \xi^0(\mathbf{K}'))^2}{2 m^p v^2(\mathbf{K}') |\mathbf{K}'|^2} \delta(\mathbf{K}') \left(\frac{h_p v}{e^{h_p v/kT} - 1} + \frac{h_p v}{2} \right)$$

Les calculs se poursuivent alors exactement comme précédemment et l'on obtient

a) Pour le facteur de DEBYE

$$e^{-2M} = e^{-2 \int_0^\infty G' \frac{dv_{K'}}{v_b}}$$

c'est du reste ce que nous avons calculé au § 3.

b) Pour le fond continu

$$i_h^2(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}) = v_b^2 |\varphi(\mathbf{b}_h + \mathbf{K})|^2 e^{-2M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2}{n!} G_n(\mathbf{b}_h + \mathbf{K}, \mathbf{K}, T)$$

et, finalement, pour le fond continu total

$$i^2(\mathbf{b}) = \sum_h i_h^2(\mathbf{b}_h + \mathbf{K})$$

Il est intéressant de montrer que la moyenne du facteur de structure pour chaque maille fondamentale a la valeur trouvée par DEBYE. On a en effet

$$\overline{i^2(\mathbf{b}_h)} = \frac{1}{v_b} \sum_{\text{maille}} \int i_h^2(\mathbf{b}) dv_b \cong \frac{1}{v_b} \int_{\text{infini}} i_h^2(\mathbf{b}) dv_b$$

et l'on peut poser, en vertu de (25)

$$i^2(\mathbf{b}_h) \cong |\varphi(\mathbf{b}_h)|^2 e^{-2M} \sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^n \int_{\text{infini}} f_h(\mathbf{b}_h, \mathbf{K}) \frac{dv_K}{v_b}$$

car il est permis de remplacer \mathbf{b} par sa valeur moyenne \mathbf{b}_h sauf dans le dernier facteur.

On obtient alors, pour l'intégrale, en utilisant (24)

$$\left\{ \int f(\mathbf{b}_h, \mathbf{K}) \frac{dv_K}{v_b} \right\}^n$$

et, donc finalement,

$$i^2(\mathbf{b}_h) \cong v_b e^{-2M} \{e^{2M} - 1\} = |\varphi(\mathbf{b}_h)|^2 \{1 - e^{-2M}\} v_b \quad (27)$$

ce qui est le résultat de DEBYE.

Les singularités de f_1, f_2, f_3 font qu'au voisinage d'un point de LAUE, la valeur de i_h^2 diffère grandement de sa valeur moyenne. Cet effet provient donc du couplage entre les atomes dont nous avons tenu compte en représentant les vibrations de ceux-ci comme des ondes. DEBYE, pour obtenir le résultat (27) non pas sous forme d'une moyenne, mais comme valeur du facteur de structure du fond continu, avait supposé les vibrations des atomes, soit indépendantes, soit données par des ondes de différentes phases dont il prenait la valeur moyenne. Ces singularités autour de \mathbf{b}_h sont surtout dues aux ondes de grandes longueurs d'ondes (petits \mathbf{k}) qui déplacent rigidement en quelque sorte de petites parties du cristal; ces déplacements sans déformation n'ont donc que peu d'influence sur la diffraction de LAUE.

La formule (27) nous permet en outre de montrer qu'il y a conservation de l'intensité totale diffractée car, en effet, en ajoutant (17) et (26), il vient

$$I^2(\mathbf{b}_h) + \int i_h^2(\mathbf{b}) dv_b = v_b^2 \{e^{-2M} + 1 - e^{-2M}\} |\varphi(\mathbf{b}_h)|^2 = v_b^2 |\varphi(\mathbf{b}_h)|^2$$

Dans un travail suivant, nous montrerons comment on peut calculer explicitement la diffusion des rayons X par la température pour les cristaux dont on connaît le spectre de vibration comme NaCl ou KCl.

Laboratoire de Physique de l'Université.

Genève, Mai 1942.

Über den Mechanismus spannungsabhängiger Widerstände

von A. Braun und G. Busch, Zürich.

(4. VII. 1942.)

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, dass zur Erklärung der nichtlinearen Strom-Spannungs-Charakteristik, insbesondere der Hysteresis-Schleife von spannungsabhängigen Widerständen aus körnigem Karborund zwei verschiedene Effekte nötig sind, nämlich: 1. Durchgang von Elektronen an Stellen hoher elektrischer Feldstärken durch die auf den Karborundkörnern sitzenden Fremdschichten, und 2. Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit der Fremdschichten. Diese Tatsachen werden durch verschiedenartige Experimente nachgewiesen und dienen als Grundlage für eine phänomenologische Theorie der Strom-Spannungs-Charakteristik.

I. Einleitung und Übersicht.

1. Allgemeines.

Spannungsabhängige Widerstände, d. h. Leiter mit nicht linearer Strom-Spannungs-Charakteristik sind sowohl vom physikalischen als auch vom technischen Standpunkt aus von grossem Interesse. Besondere Bedeutung haben in den letzten Jahren Widerstandsmaterialien erlangt, die als wesentlichen Bestandteil körnigen Karborund enthalten. Diese zeigen die Eigenart, dass ihre elektrische Leitfähigkeit mit wachsender Stärke des Stromes, der sie durchfliesst, ansteigt. Diese Zunahme der Leitfähigkeit ist so ausgeprägt, dass die am Widerstand herrschende Spannung trotz wachsender Stromstärke von einem bestimmten Betrage an nur noch wenig ansteigt oder sogar zu fallen beginnt. Es ist verständlich, dass Widerstände mit dieser Eigenschaft sich vortrefflich als Spannungsbegrenzer eignen und dementsprechend auch Verwendung in der Hochspannungstechnik, speziell für den Bau von Überspannungs-Schutzgeräten gefunden haben. Sowohl von technischer als auch von wissenschaftlicher Seite her wurde schon seit mehr als zehn Jahren einerseits an der Entwicklung von hochbelastbaren und dauerhaften Widerstandsmaterialien, andererseits an der Aufklärung des Leitungsmechanismus, der die starke Spannungsabhängigkeit der Karborund-Widerstände zur Folge hat, gearbeitet. Während das erste, technische Problem heute auf verschiedene Arten vollständig befriedigend gelöst ist, bleibt an der zweiten Aufgabe noch sehr vieles zu tun übrig. Vermutungen und Hinweise

auf die Erklärungsmöglichkeiten sind zwar an verschiedenen Orten¹⁾ anzutreffen, doch sind die massgebenden Vorgänge bis jetzt weder qualitativ noch quantitativ untersucht und befriedigend erklärt worden. Die Ausfüllung einiger dieser Lücken ist das Ziel dieser Arbeit.

2. Die elektrischen Eigenschaften des Karborunds.

Das Siliciumcarbid bzw. das technische Produkt Karborund verhält sich, wie sich später zeigen wird, in elektrischer Hinsicht je nach den Entstehungsbedingungen im Elektroofen sehr verschiedenartig. Rein äusserlich ist schon die mannigfaltige Färbung der oft sehr schön ausgebildeten Kristalle auffällig, die von leicht gelblichem Ton bis zu tiefschwarzem Glanz variieren kann. Unsere Untersuchungen wurden ausschliesslich an Karborundproben durchgeführt, die in den Gotthard-Werken in Bodio hergestellt wurden. Die Art der Herstellung und die Aussonderung der Proben wurde jedoch absichtlich verschieden gewählt, was in mancher Hinsicht sehr aufschlussreich war.

Jedoch wirkt sich der Umstand, dass über die chemische Zusammensetzung des Karborunds bis heute keine genauen Kenntnisse vorliegen, auf die Experimente und namentlich auf quantitative Schlussfolgerungen sehr erschwerend aus. Reines Siliciumcarbid ist farblos; bei Zimmertemperatur liegt die langwellige Absorptionsgrenze des Ultraviolett-Gebietes in der Gegend von 4000 Å. Die verschiedenartige Färbung wird wahrscheinlich durch Einschlüsse verursacht, welche sich schon als Verunreinigungen in den zur Herstellung verwendeten Ausgangsprodukten, Quarz und Kohle, befinden; wahrscheinlich durch Fe, Al, dann aber auch durch überschüssiges C oder Si. In welchen Mengen und namentlich in welcher Art diese Stoffe im SiC-Gitter eingelagert sind, ist jedoch bis jetzt nicht mit Sicherheit bekannt.

Für das volle Verständnis der Elektrizitätsleitung in Karborund-Kristallen ist aber gerade die Kenntnis dieser Daten von grundlegender Bedeutung. Zwar wird Karborund allgemein als Elektronen-Halbleiter angesehen, jedoch war die Einreihung in eine der speziellen Kategorien bis jetzt nicht zuverlässig möglich. Gute Messungen der Leitfähigkeit und ihres Temperaturkoeffizienten liegen einzig von HENNINGER²⁾ vor, die jedoch nur an wenigen, nicht näher definierten Karborundkristallen durchgeführt

¹⁾ K. B. MC. EACHRON, Gen. El. Rev. **33**, 350 (1930); J. SLEPIAN, R. KRAUSE und R. TANBERG, J. Am. Inst. El. Eng. **33**, 361 (1930); D. MÜLLER-HILLEBRAND, ETZ. **55**, 733, 765, 782 (1934).

²⁾ F. HENNINGER, Ann. d. Phys. **28**, 245 (1937).

worden sind. HENNINGER findet einen spezifischen Widerstand von ca. 2 Ohmcm und einen für Halbleiter sehr kleinen negativen Temperaturkoeffizienten von $0,7\text{‰}$ pro Grad. Grössenordnungsmässig stimmt damit auch die Angabe von KURTSCHATOW, KOSTINA und RUSINOW¹⁾ überein, welche durch Messung der Wirbelstromverluste die Leitfähigkeit bestimmten. Im Temperaturgang der Leitfähigkeit ist jedoch, wie schon Kurtschatow und Mitarbeiter gezeigt haben und hier in einem späteren Abschnitt bestätigt wird, mit einer Anomalie zu rechnen. Eine genaue Untersuchung dieser Erscheinung ist in Vorbereitung.

Alle Messungen, welche darauf abzielten, die wirkliche Leitfähigkeit des Karborunds zu ermitteln, wurden stets durch eine Erscheinung empfindlich gestört, die Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden ist. Es handelt sich um die besonders von CLAUS²⁾ und LOSSEW³⁾ untersuchten Gleichrichter- und Leuchteffekte, welche an Karborund-Einkristallen beobachtet werden können. Nach den Arbeiten von Claus ist jeder Karborund-Kristall von einer isolierenden Quarzschicht bedeckt, deren Dicke auf der Kristalloberfläche stark schwankt und im Mittel etwa $6 \cdot 10^{-6}$ cm messen soll. Dieser Wert wurde aus der Durchschlags-Spannung dieser sog. *Sperrschichten* (im Sinne SCHOTTKY's⁴⁾ wohl eher als *Fremdschichten* zu bezeichnen) ermittelt. Dazu wurde allerdings die wohl nicht sehr zutreffenden Annahme gemacht, dass es sich hierbei um eine kompakte SiO_2 -Schicht handle, für welche dieselbe elektrische Festigkeit angenommen werden kann wie für eine makroskopische Quarzschicht.

HEINE und SCHERRER⁵⁾ haben mittels Elektronenbeugung die Oberfläche von Karborund-Körnern untersucht, die durch äusserst feines Pulverisieren von grösseren Kristallstücken entstanden sind. Die erhaltenen diffusen Interferenzen zeigen, dass auf der Oberfläche der Kristalle eine gitterfremde Schicht sitzt, deren Dicke nicht mehr als etwa 10^{-7} cm betragen kann. Durch Glühen des Pulvers in oxydierender Atmosphäre lässt sich jedoch auf der Oberfläche der Körner eine zu scharfen Elektronen-Interferenzen Anlass gebende *Cristobalit-Schicht* erzeugen, welche je nach der Dauer des Glühprozesses in verschiedener Dicke entsteht.

¹⁾ I. V. KURTSCHATOW, T. Z. KOSTINA, W. L. RUSINOW, Phys. Zs. Sow. Union **7**, 129 (1935).

²⁾ B. CLAUS, Ann. d. Phys. **11**, 333 (1931); **14**, 644 (1932).

³⁾ O. LOSSEW, Phil. Mag. **6**, 1024 (1928); Phys. Zs. **30**, 920 (1929); **32**, 692 (1931); **34**, 397 (1933).

⁴⁾ W. SCHOTTKY, Zs. f. Phys. **14**, 397 (1923).

⁵⁾ H. G. HEINE und P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **13**, 489 (1940).

Es ist nun anzunehmen, dass sich die relativ dicken Quarzschichten, welche die grossen, gutausgebildeten Karborundkristalle bedecken, bei der Abkühlung des Elektroofens durch den Zutritt des Luftsauerstoffes bilden. Offenbar verläuft dieser Oxydationsprozess aber auch schon bei Zimmertemperatur mit grosser Schnelligkeit; denn es zeigt sich, dass frische Bruchflächen an grossen Kristallen momentan Sperrschicht-Eigenschaften annehmen. Die geringe Dicke der bei Zimmertemperatur entstehenden Schichten ist offenbar lediglich der geringen Diffusionsgeschwindigkeit der Si- bzw. C-Atome aus dem SiC-Gitter zuzuschreiben, sodass der Oxydationsprozess früh zum Stehen kommt. Die Versuche von HEINE und SCHERRER weisen jedenfalls in dieser Richtung.

Die von LOSSEW¹⁾ beobachteten Leuchterscheinungen haben ihren Sitz in Oberflächengebieten von bedeutend grösserer Dicke, nämlich bis zu 10^{-3} cm. In ihren Eigenschaften entsprechen diese sog. *aktiven* Schichten offenbar viel mehr den *Sperrschichten* in Schottky'schem Sinne, wie sie zum Beispiel für die Erklärung des Gleichrichtereffektes des Cu_2O -Gleichrichters herangezogen wurden. Es scheint uns, dass auch die aktiven Schichten ihre Existenz der Entstehungsgeschichte im Elektroofen zu verdanken haben, und auf einem Konzentrationsgefälle der Störstellen im Kristall von innen nach aussen beruhen. Der Umstand, dass die Leuchterscheinungen nicht allgemein, sondern nur an bestimmten Kristallen beobachtet werden, deutet darauf hin, dass die Entstehungsbedingungen die Hauptrolle spielen müssen.

3. Bau und Stromspannungs-Charakteristik von Karborund-Widerständen.

Die Herstellung von technisch verwendbaren spannungsabhängigen Widerständen erfolgt in der Regel durch Zusammenbrennen von körnigem Karborund mit geeigneten keramischen Bindemitteln und evtl. chemischen Zusätzen. Prinzipiell gleiche Eigenschaften und Erscheinungen sind aber auch an körnigem Karborund ohne jedes Bindemittel zu beobachten, wenn das zu untersuchende Material in eine Hülse aus Isolierstoff locker eingefüllt wird und als Elektroden beidseitig Metallstempel eingeführt werden. Auf diese Weise ist es möglich, das eingefüllte Material unter verschiedenen Bedingungen, wie mechanischem Druck, Gasdruck und Temperatur zu untersuchen.

¹⁾ O. LOSSEW, loc. cit.

Von praktischer Bedeutung ist das Verhalten des Widerstandsmaterials beim Durchgang von kurzzeitigen, 10—50 μsec dauernden Stromstößen, wie dies etwa dem zeitlichen Verlauf der in Leitungsnetzen, z. B. bei Gewittern auftretenden Überspannungswellen entspricht. Im Abschnitt III/2. wird eine Apparatur beschrieben, welche Stromstöße dieser Art von 0,1—1000 Amp. Maximalwert erzeugt und oscillographische Aufnahme der Strom-Spannungs-

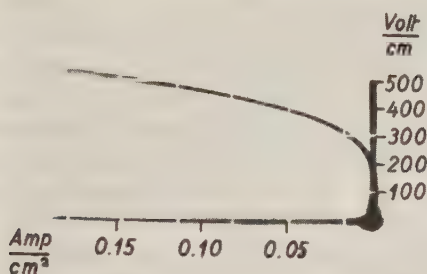


Fig. 1a.

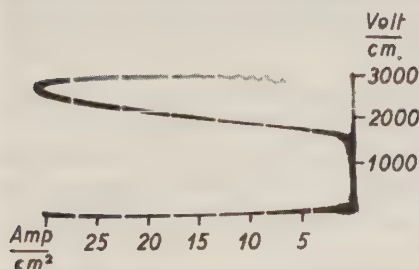


Fig. 1b.

Strom-Spannungs-Charakteristiken.

Charakteristik ermöglicht. Zur Veranschaulichung und zur Verdeutlichung der Problemstellung sind in den Fig. 1a und 1b je ein Strom-Spannungs-Oscillogramm an ein und derselben Karborundprobe gezeigt, und zwar einmal für kleine, einmal für grosse Stromstärken. Während im ersten Fall eine eindeutige Beziehung zwischen Strom und Spannung besteht, trifft dies im zweiten Falle offensichtlich nicht mehr zu; vielmehr springt eine ausgesprochene *Hysteresis-Schleife* in die Augen. Es erhebt sich nun die Frage, durch welche Effekte diese erheblichen Abweichungen vom Ohmschen Gesetz verursacht werden. Im nächsten Abschnitt sollen

die bisherigen Hinweise auf Erklärungsmöglichkeiten und Ansätze diskutiert werden, soweit dies nicht schon an anderer Stelle geschehen ist.

4. Die bisherigen Erklärungen.

KURTSCHATOW und Mitarbeiter¹⁾ haben bereits eine Übersicht über die bisherigen Theorien von Mc EACHRON²⁾, SLEPIAN³⁾ und GÜNTHERSCHULZE⁴⁾ gegeben, so dass es sich erübrigt, auf diese nochmals einzugehen. Die Annahme von Funkenübergängen zwischen den Körnern ist von den erstgenannten Autoren als unzutreffend dargestellt worden. Es ist jedoch zu sagen, dass der Beweis lediglich durch Abpumpen der Luft nicht streng erbracht werden kann. Dies gilt auch für Versuche, welche darauf abzielen, die Hohlräume zwischen den Karborundkörnern durch Isolationsmaterial auszustopfen. Wir werden später noch auf diesen Punkt zurückkommen.

MÜLLER-HILLEBRAND⁵⁾ zieht unseres Wissens zum erstenmal die Emission von Elektronen aus den Karborundkörnern unter der Wirkung von hohen elektrischen Feldstärken zur Erklärung heran unter Verweisung auf die Arbeiten von CLAUS.

KURTSCHATOW und Mitarbeiter⁶⁾ haben das Problem erstmals theoretisch bearbeitet, und zwar gestützt auf folgende Ansichten und Voraussetzungen:

1. Der Übergang des Stromes von einem Korn zu einem benachbarten beruht auf dem Tunneleffekt.

2. Die „aktiven Schichten“ von LOSSEW fallen für die Erklärung ausser Betracht, da dieselben nur auf schwarzen Kristallen beobachtet werden, Spannungsabhängigkeit aber in jedem Falle gefunden wird.

3. Gegen das Zustandekommen der Spannungsabhängigkeit infolge der von CLAUS untersuchten Quarzschichten wird der Einwand erhoben, dass diese Schichten mittels Fluss-Säure abgeätzt werden können, wodurch die Spannungsabhängigkeit zum Verschwinden gebracht werden sollte. Da dies nicht der Fall ist, kommen diese Quarzschichten für die Erklärung ebenfalls nicht in Frage. — Hierzu möchten wir bemerken, dass nach den Überlegungen des 2. Abschnittes diese Schlussweise nicht stichhaltig scheint.

¹⁾ loc. cit.

²⁾ loc. cit.

³⁾ loc. cit.

⁴⁾ A. GÜNTHERSCHULZE und M. FRICKE, Zs. f. Phys. **86**, 451 (1933).

⁵⁾ D. MÜLLER-HILLEBRAND, E.T.Z. **55**, 733, 765, 782 (1934).

⁶⁾ loc. cit.

4. Es wird angenommen, dass zwischen aneinandergrenzenden Karborundkörnern, deren spezifischer Widerstand zu 0,5 Ohm cm bestimmt wird, ein Zwischenraum von der Grössenordnung 10^{-7} cm existiert.

5. Die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Körnern herrschende Potentialdifferenz sei kleiner oder höchstens gleich dem 0,5—0,6-fachen Betrag der Austrittsarbeit in eV für das Siliciumcarbid.

6. Die Gesamtheit der Elektronen des Siliciumcarbids wird als *nicht-entartetes* Gas mit Maxwell'scher Energieverteilung behandelt, was infolge der im Vergleich zu Metallen geringen Leitfähigkeit des Karborunds gerechtfertigt erscheint.

7. Die Grösse der Kontaktstellen wird zu $0,001 \text{ cm}^2$ angenommen. — Dieser Betrag ist bei einem Korndurchmesser von nur $0,025 \text{ cm}$ sicher viel zu gross.

Die auf wellenmechanischer Grundlage und unter Berücksichtigung der Bildkraft entwickelte Theorie liefert als Strom-Spannungs-Gesetz für eine Kontaktstelle:

$$j_k = A \cdot e^{-\alpha + \beta u_k} \left(1 - e^{-\frac{e \cdot u_k}{kT}} \right) \quad (1)$$

wo j_k die Stromdichte und u_k die Potentialdifferenz an der Kontaktstelle bedeuten. Die Konstanten A , α und β stehen für folgende Ausdrücke:

$$A = \frac{3kT}{4el} \sigma_0 \quad \gamma = \frac{4\pi}{h} \sqrt{2m}$$

$$\beta = \frac{1}{4} \gamma \Delta_k e w^{-\frac{1}{2}} \quad \alpha = -\gamma \Delta_k w^{\frac{1}{2}}$$

e, m = Ladung und Masse des Elektrons.

w = Austrittsarbeit.

Δ_k = Breite des Kontaktzwischenraumes.

σ_0 = Leitfähigkeit des Kornmaterials.

k = Boltzmann'sche Konstante.

h = Planck'sche Konstante.

T = absolute Temperatur.

\bar{l} = mittlere freie Weglänge der Elektronen.

Eine zahlenmässige Überprüfung der Theorie konnte von den Autoren nicht gegeben werden, da die Austrittsarbeit w der Elektronen des SiC-Gitters bisher nicht bekannt war. Nachdem nun aber BRAUN¹⁾ dieselbe aus vorläufigen Messungen der thermischen Elektronenemission an Karborundkristallen im Mittel zu

¹⁾ A. BRAUN, erscheint später.

$w = 4,5$ eV bestimmt hat, kann die Nachprüfung erfolgen. Wir berechnen zunächst die Konstanten A , α und β unter folgenden Annahmen: Nach HENNINGER ist $\sigma_0 = 0,5 \text{ Ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Die Kontaktbreite A_k ist nach Angabe der Autoren 10^{-7} cm ; für solche Abstände besitzt die Theorie Gültigkeit¹⁾. Die mittlere freie Weglänge ist für Halbleiter und Metalle ungefähr von gleicher Grösse, d. h. $\bar{l} \sim 10^{-6} \text{ cm}$.

Für die in Frage kommenden Potentialdifferenzen $u_k < 3$ Volt und für Raumtemperatur $T \sim 300^\circ$ ist der Faktor $\left(1 - e^{-\frac{e u_k}{k T}}\right)$ praktisch gleich 1, so dass schliesslich die Formel entsteht:

$$j_k = 1,3 \cdot 10^{-6} \cdot e^{1,21 \cdot u_k} \text{ Amp/cm}^2 \quad (2)$$

Für eine Potentialdifferenz $u_k = 2,5$ Volt ergibt sich so beispielsweise eine Stromdichte j_k von $3 \cdot 10^{-5} \text{ Amp/cm}^2$.

Der gesamte von einem Korn zum benachbarten fliessende Strom i_k ergibt sich durch Multiplikation mit der wirksamen Kontaktfläche f_k , also

$$i_k = f_k \cdot j_k$$

Rechnet man, wie die Autoren offenbar irrtümlicherweise angeben, mit einer Kontaktfläche $f_k = 10^{-3} \text{ cm}^2$, so würde

$$i_k = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Amp.}$$

Dies ist aber ca. 10000mal mehr, als experimentell gefunden wird. Mit einer Fläche $f_k \sim 10^{-8} \text{ cm}^2$, wie sie sich weiter unten experimentell ergeben wird, ist die Übereinstimmung jedoch recht befriedigend.

Es ist nun zu erwarten, dass auch für Potentialdifferenzen, welche grösser als die der Austrittsarbeit äquivalenten Spannung w sind, die Theorie der Kontakte die Vorgänge richtig zu erklären vermag. Selbstverständlich verläuft das Potential unter diesen Umständen zwischen zwei benachbarten Körnern in anderer Weise. Dieser Fall wird in einem späteren Abschnitt zusammen mit den zugehörigen Experimenten behandelt werden.

5. Abgrenzung der Untersuchungsgebiete.

Im Verlaufe der Arbeit hat es sich als notwendig erwiesen, die Untersuchungen zunächst in drei Abschnitte zu gliedern, und zwar nach der Grösse der Potentialdifferenzen, welche an der Kontaktstelle

¹⁾ Siehe Artikel SOMMERFELD und BETHE, Hdb. Phys. 24/2, 446.

zweier in Serie liegenden Karborundkörnern herrscht bzw. nach der Grösse der Energie, welche an der Kontaktstelle vernichtet wird.

Das 1. Gebiet umfasst *sehr kleine* Spannungen, d. h. Potentialdifferenzen bis ca. 0,5 Volt bzw. Ströme bis ca. 10^{-11} Amp pro Kontaktstelle. Das 2. Gebiet mit *kleinen* Spannungen bis zum 0,5—0,6-fachen Betrag der Austrittsarbeit ist ausführlich von KURTSCHATOW und Mitarbeitern behandelt worden. Daran schliesst das 3. Gebiet mit *mittleren* Spannungen von der Grösse der Austrittsarbeit und Vielfache davon, bzw. Strömen bis zu 10^{-3} Amp pro Korn, oder ca. 2 Amp/cm² bezogen auf die makroskopische Fläche eines Widerstandskörpers. In diesen drei Gebieten können Strom-Spannungs-Messungen mit hinreichend kurzzeitigen Stromstössen durchgeführt werden, ohne dass die Messungen durch thermische Effekte stark beeinflusst werden. Selbstverständlich ist eine Temperaturerhöhung der Kontaktstellen infolge der Stromwärme prinzipiell unvermeidlich, weshalb sehr exakte Messungen des Strom-Spannungs-Gesetzes im Falle der hier vorliegenden Halbleiterkontakte auf erhebliche experimentelle Schwierigkeiten stossen. Theoretisch müsste mit Stromstössen von verschwindend kleiner Zeitdauer gemessen werden.

Vom technischen Standpunkt aus ist aber gerade der Fall endlicher Stosszeiten bei hohen Spannungen bis 50 Volt pro Kontakt von Bedeutung. Die von den Kontaktstellen aufzunehmende Energie wird dabei so gross, dass, wie sich zeigen wird, gerade die thermischen Effekte die Hauptrolle spielen.

II. 1. Gebiet: Sehr kleine Spannungen.

1. Gleichstromcharakteristiken verschiedener Karborundsorten.

Die Hypothese der schlechtleitenden Fremdschichten, welche die Karborundkörner bedecken, soll nun schrittweise geprüft werden. Zunächst wurde die Leitfähigkeit einiger Karborundproben von gleicher Korngrösse und Vorbehandlung, aber verschiedener chemischer Beschaffenheit untersucht. Da bis heute die genaue chemische Zusammensetzung des technischen Karborunds nicht bekannt ist, seien die verschiedenen Sorten willkürlich nach steigendem Leitvermögen mit 1—5 bezeichnet. Die Sorten 1 und 2 sind Vertreter des *grünen*, die Sorten 3, 4 und 5 des *schwarzen* Karborunds.

Das zu untersuchende Material von 0,16—0,2 mm mittlerem Korndurchmesser wurde in eine Hartgummihülse mit einer Bohrung von 3 cm² Fläche zwischen passende Messingstempel eingefüllt und durch Schütteln dafür gesorgt, dass sich die einzelnen

Körner möglichst dicht lagerten. Auf den Stempeln lastete ein Druck von 10 kg/cm^2 der sich auf die Karborundkörner überträgt. Bei der verwendeten Korngrösse liegen ca. 50 Körner pro cm übereinander und ca. 2500 Körner pro cm^2 in einer Ebene. Die Messung der Leitfähigkeit geschah durch Messung des Stromes bei bekannter Spannung. Die angelegte Gleichspannung betrug im Maximum 0,1 Volt pro Kontakt und der hierbei in allen Körnern fließende Strom ist so klein, dass er mit einem Galvanometer von $5 \cdot 10^{-10}$ Amp. Empfindlichkeit gemessen werden musste. Der maximale Strom pro Kontakt betrug etwa $3 \cdot 10^{-12}$ Amp. In Fig. 2 ist das

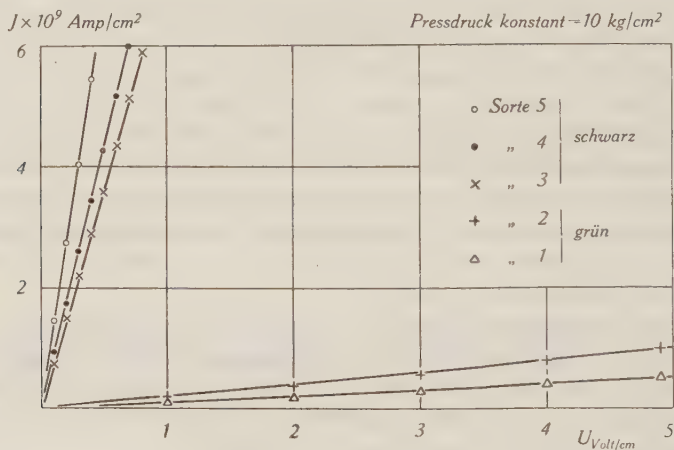


Fig. 2.

Pressdruck konstant = 10 kg/cm^2 .

Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes für kleine Spannungen.

Ergebnis der Messungen dargestellt; es zeigt sich, dass bei so kleinen Spannungen das *Ohm'sche Gesetz* exakt erfüllt ist. Aus der Steilheit der Geraden ist es möglich, die mittleren Widerstandswerte einer Kontaktstelle von zwei Körnern grössenordnungsmässig abzuschätzen. Es ergibt sich dafür folgende Tabelle:

Tabelle 1.

Sorte	1	2	3	4	5
Widerstand pro Kontakt in Ohm	$5,0 \cdot 10^{11}$	$2,5 \cdot 10^{11}$	$7,0 \cdot 10^9$	$5,9 \cdot 10^9$	$3,8 \cdot 10^9$

Diese Werte sind ausserordentlich hoch und zeigen schon, dass sich die gutleitenden Karborundkörner sicher nicht direkt berühren können. Der Umstand, dass die angegebenen Wider-

standswerte einen Bereich von mehr als 2 Zehnerpotenzen überdecken, deutet auch darauf hin, dass sich an den Kontaktstellen Schichten verschiedener Dicke oder verschiedener spezifischer Widerstände berühren müssen. Da bei so niedrigen Spannungen kein Übergang von Elektronen in merklicher Anzahl unter dem Einfluss des elektrischen Feldes zu erwarten ist, misst man auf diese Weise im wesentlichen die Leitfähigkeit der auf den Kristalliten sitzenden Fremdschichten.

Ein weiteres Kriterium für den Kontaktcharakter der Stromleitung ergibt sich aus Fig. 3. Sie zeigt die Leitfähigkeit von zwei

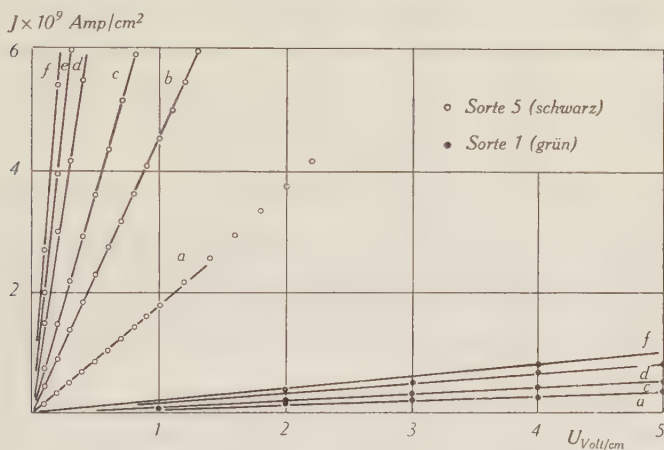


Fig. 3.

Pressdruck variabel: a: 3,3; b: 6,6; c: 10; d: 13,3; e: 16,6; f: 20 kg/cm².

Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes für kleine Spannungen.

Karborundsorten bei verschiedenen mechanischen Drücken, die so niedrig gehalten wurden, dass keine Verlagerung oder Zerkleinerung der Körner zu befürchten war. Die starke Zunahme der Leitfähigkeit mit steigendem Druck entspricht der Erwartung; ein einfacher mathematischer Zusammenhang kann indessen nicht angegeben werden. Dieser Befund deckt sich mit den bei viel höheren Drücken ausgeführten Messungen von KURTSCHATOW und Mitarbeitern; überdies ist nach HOLM¹⁾ ein exaktes Gesetz auch gar nicht zu erwarten. Es ist lediglich plausibel, dass die Steigerung des Berührungsdruckes der Körner mit einer Vergrößerung der Berührungsfläche und damit mit einer Abnahme des Kontaktwiderstandes Hand in Hand geht.

¹⁾ R. HOLM, Technische Physik der Kontakte 1941, S. 163.

2. Einfluss der Temperatur auf die Leitfähigkeit der Fremdschichten.

Die starke Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit des Karborunds wird in älteren Arbeiten mehrfach hervorgehoben. GUDDEN¹⁾ hat darauf hingewiesen, dass der starke Temperaturgang wahrscheinlich nicht dem Siliciumcarbid selbst zukomme, sondern die Folge des Vorhandenseins von Fremdschichten sei. Während

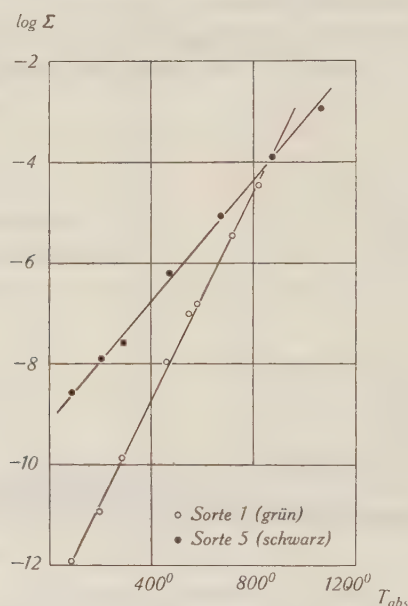


Fig. 4.

Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit der Fremdschichten

die früheren Arbeiten darauf abzielten, die Leitfähigkeit des Rumpfmateriales der Karborundkristalle zu messen und dabei durch die Fremdschichten gestört wurden, soll hier gerade umgekehrt nach den Eigenschaften der Fremdschichten gefragt werden.

Dies ist, wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, möglich, wenn mit sehr kleinen Spannungen gearbeitet wird. An der grünen Karborundsorte 1 und an der schwarzen 5 wurden Messungen der Leitfähigkeit als Funktion der Temperatur vorgenommen. Das Material wurde hierzu in Hülsen aus Porzellan, Aluminiumoxyd oder Zirkonoxyd eingefüllt und unter konstant gehaltenem Pressdruck in einem Röhrenofen erhitzt bzw. in einem Flüssigluft- oder Kohlensäure-Alkohol-Bad abgekühlt. Zum Schutz

¹⁾ B. GUDDEN, siehe F. HENNINGER, loc. cit.

gegen Oxydation wurde die Messung bei hohen Temperaturen in einer Stickstoff-Atmosphäre vorgenommen. Es zeigte sich im Laufe der Untersuchung, dass die Temperatur nicht über 800° C getrieben werden durfte, ohne dass sich irreversible Veränderungen des Materiales, offenbar durch Beginn einer Sinterung, bemerkbar machten. Das Resultat der Messungen bei einer Spannung von 0,01 Volt pro Kontakt ist in Fig. 4 dargestellt. Die Leitfähigkeit bezogen auf 1 cm³ körnigen Materiales ist mit Σ bezeichnet und wird durch das Gesetz

$$\Sigma = \Sigma_0 \cdot e^{\lambda T} \quad (3)$$

gut wiedergegeben. Für einen Pressdruck von 10 kg/cm² gelten die Konstanten:

Grüner Karborund Sorte 1: $\Sigma_0 = 1,6 \cdot 10^{-13}$, $\lambda = 2,37 \cdot 10^{-2}$

Schwarzer Karborund Sorte 5: $\Sigma_0 = 6,3 \cdot 10^{-10}$, $\lambda = 1,38 \cdot 10^{-2}$

Der gefundene Zusammenhang steht mit dem für Halbleiter im allgemeinen gültigen Gesetz $\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{x}{T}}$ nicht im Einklang; auch kann eine theoretische Deutung des empirischen Gesetzes (3) heute noch nicht gegeben werden, da man über die chemische und physikalische Beschaffenheit der Fremdschichten nichts genügend Sicheres weiss.

Es muss an dieser Stelle hervorgehoben werden, dass die gefundene Temperaturabhängigkeit nichts, oder zum mindesten nur wenig mit dem Temperaturgang der Leitfähigkeit des Rumpfmateriales der Karborundkörner zu tun hat. Nach den sorgfältigen Messungen von HENNINGER¹⁾, bei welchen der störende Einfluss der Fremdschichten wohl weitgehend ausgeschaltet wurde, besitzt der spezifische Widerstand des Karborunds einen relativ kleinen mittleren Temperaturkoeffizienten von $-0,7\%$ pro Grad. Dieser ist somit um viele Größenordnungen zu klein, um die gefundene Erscheinung zu deuten.

3. Abschätzung der Dicke der Fremdschichten.

Für die qualitative, besonders aber für die quantitative Prüfung der Feldemissions-Hypothese ist die Kenntnis der Dicke der Fremdschichten von grösster Bedeutung. KURTSCHATOW und Mitarbeiter haben hierzu einen Weg gewiesen, indem von ihnen die Kapazität von Karborundpulver unter verschiedenem Druck ge-

¹⁾ F. HENNINGER, loc. cit.

messen wurde. Hierbei kamen aber ausserordentlich hohe Pressdrücke zur Anwendung, bei denen unfehlbar Kornzerkleinerung eintritt, was nicht ohne Einfluss auf die Messergebnisse sein kann. Da die Methode der Kapazitätsmessung sehr einfach ist, trotzdem aber grössenordnungsmässig richtige Angaben liefern kann, wurde sie ebenfalls angewendet, jedoch bei viel kleineren Pressdrücken.

Die Messung erfolgte mit einer früher¹⁾ beschriebenen Kapazitätsmessbrücke bei einer Frequenz von 10000 Hertz und einer Spannung von 0,01 Volt eff. pro Kontakt. Der Verlustwinkel ist

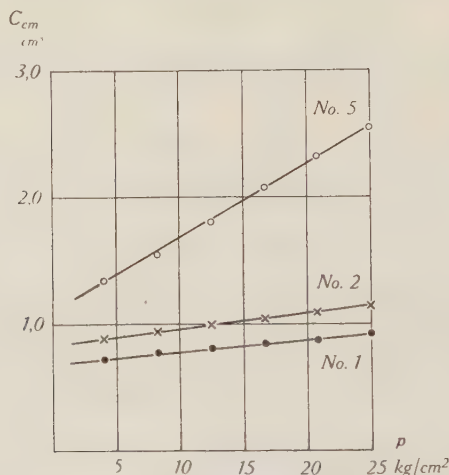


Fig. 5.

Einfluss des Pressdrucks auf die Kapazität der Kontakte.

bei diesen Spannungswerten infolge der hohen Widerstände der Berührungsstellen der Körner sehr klein, so dass eine einwandfreie Messung möglich ist. Das Messergebnis an drei verschiedenen Karborundsorten ist aus Fig. 5 ersichtlich. Zunächst zeigt sich, dass zwischen Druck und Kapazität ein genau *linearer* Zusammenhang besteht, was sich mit dem Befund von KURTSCHATOW und Mitarbeitern deckt. Sodann ergibt sich aus Fig. 5 das bemerkenswerte Resultat, dass die Kapazität stark von der Beschaffenheit des Materials abhängig ist. Der höheren Kapazität der schwarzen Sorte Nr. 5 gegenüber den grünen Sorten 1 und 2 entspricht offenbar eine geringere Dicke der Fremdschichten oder einer grösseren Dielektrizitätskonstanten derselben. Da die Korngrösse, sowie die Kornform bei allen Proben dieselbe ist, kommt eine andere Erklärung kaum in Betracht.

¹⁾ G. BUSCH, Helv. Phys. Acta 11, 269 (1938).

Aus der starken Druckabhängigkeit der Kapazität und infolge der erwartungsmässig sehr geringen Dicke der Fremdschichten kann der Schluss gezogen werden, dass sich die durch die Körner des Karborundpulvers gebildete Kapazität im wesentlichen aus den Kapazitäten C_k der Kontaktstellen zusammensetzt, welche infolge der isolierenden Zwischenschicht als kleine Kondensatoren wirken. Bezeichnet man mit ε die Dielektrizitätskonstante der Fremdschichten und mit δ_k ihre mittlere Dicke, mit f_k die mittlere Grösse der Berührungsflächen und mit z_f , bzw. z_h die Zahl der in einer Ebene pro cm^2 bzw. pro cm übereinanderliegenden Körner, so folgt für die Kapazität von 1 cm^3 Körnern angenähert, d. h. unter der Annahme ebener Berührungsflächen und Vernachlässigung der gegenseitigen Kapazität der Körner, die sich nicht berühren:

$$C_k = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{f_k}{4\pi \delta_k} \frac{z_f}{z_h} \quad (4)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, dass mit δ_k die einfache Dicke der Fremdschicht eingesetzt wurde; die Dicke des Dielektrikums ist also $2 \delta_k$. Mit Ausnahme von ε , f_k und δ_k sind die Grössen bekannt oder messbar. Um zu einer rohen Angabe für δ_k zu kommen, wird folgender Weg eingeschlagen. Die Dielektrizitätskonstante ε der Fremdschicht soll, da es sich wahrscheinlich um einen quarzähnlichen Körper handelt, zu 5 angenommen werden, und die Grösse von f_k kann auf Grund der Theorie der Härte von HERTZ¹⁾ grössenordnungsmässig abgeschätzt werden.

Danach gilt für den Radius a_k der Berührungsfläche zweier gleichgrosser Kugeln aus gleichem Stoff

$$a_k = \sqrt[3]{\frac{3 m P r_k}{16 E}} \quad (5)$$

wo P die Kraft, mit welcher die Kugeln aufeinander gedrückt werden, r_k den Radius der Kugeln, E den Elastizitätsmodul und m die Poisson'sche Zahl bedeuten. m hat für die meisten Körper etwa den Wert $10/3$.

Der handelsübliche gemahlene Karborund besteht nun aber aus sehr unregelmässig geformten, scharfe Spitzen und Kanten besitzenden Körnern, die von der Kugelgestalt so stark abweichen, dass Formel (5) nicht angewendet werden darf. Um die Rechnung zu ermöglichen, wurden die Körner mittels eines später zu beschreibenden Verfahrens in möglichst kugelige Gestalt geschliffen. Die

¹⁾ H. HERTZ, Ges. Abh. I, 155.

Fig. 8a und 8b zeigen Mikroaufnahmen der normalen und der rundgeschliffenen Körner. Von einer Probe aus derartigem Material wurde bei einem Druck von 10 kg/cm^2 die Kapazität $C = 1,4 \text{ cm pro cm}^3$ gemessen. Der Durchmesser der Körner betrug $0,01 \text{ cm}$.

Zur Berechnung des Radius a_k der Berührungsflächen ist noch die Kenntnis des Elastizitätsmoduls E des Karborunds nötig. Leider liegen hierüber keinerlei Angaben vor. Setzt man für Karborund schätzungsweise $E = 6 \cdot 10^{12} \text{ CGS}$, so ergibt sich mit $z_f = 10^4$ und $P = 1 \text{ g}$ pro Korn für den Berührungsradius

$$a_k \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ cm.}$$

Damit ergibt sich für die Dicke der Fremdschicht auf einem Kristallit aus (4):

$$\delta_k \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ cm.}$$

Dieser Wert stellt eine *obere Grenze* der Dicke dar, da infolge der nicht vollständigen Kugelgestalt der Körner der Krümmungsradius derselben eher kleiner als $0,005 \text{ cm}$ ist, d. h. dass der Radius der Berührungsflächen eher kleiner angenommen werden muss. Es ist aber bemerkenswert, dass sich für δ_k ein Wert ergibt, der in guter Übereinstimmung mit den Angaben von KURTSCHATOW und Mitarbeitern und von HEINE und SCHERRER¹⁾ steht.

Es ist nun sicher, dass isolierende Schichten so geringer Dicke von den Leitungselektronen durchdrungen werden, sobald eine Potentialdifferenz von einigen Volt an den Berührungsstellen zweier Körner aufrechterhalten wird. Der Durchtritt der Elektronen erfolgt unter der Wirkung der starken äusseren Felder ähnlich, wie die autoelektronische Emission von Metallelektronen ins Vakuum.

III. 3. Gebiet: Mittlere Spannungen.

1. Strom durch die Kontaktstelle zweier identischer Halbleiter.

Wie der eine von uns²⁾ theoretisch gezeigt hat, gilt für die Stromdichte j_k an der Kontaktstelle zweier identischer Halbleiter von der Leitfähigkeit σ_H das Gesetz

$$j_k = \frac{3}{4} \frac{k T}{e \bar{l}} \cdot \sigma_H \cdot e^{-\frac{4 \sqrt{2 m}}{3 e \hbar} \frac{W_0^{3/2}}{F}} \varphi(y_0) \quad (6)$$

¹⁾ loc. cit.

²⁾ G. BUSCH, Habilitationsschrift E.T.H. 1942.

unter der Voraussetzung, dass die am Kontakt liegende Potentialdifferenz gleich gross oder grösser ist, als die der Austrittsarbeit äquivalente Spannung.

Darin bedeuten k die Boltzmann'sche Konstante, T die absolute Temperatur, e und m Ladung und Masse des Elektrons, W_0 und \bar{l} Austrittsarbeit und mittlere freie Weglänge der Elektronen, F die elektrische Feldstärke und $\varphi(y_0)$ eine von NORDHEIM¹⁾ angegebene Funktion, welche die Erniedrigung der Austrittsarbeit infolge der Wirkung des elektrischen Feldes berücksichtigt. In den folgenden Abschnitten soll nun die dargelegte Auffassung der Feldemission sowohl qualitativ als auch quantitativ geprüft und gestützt werden. Da bei den in Frage kommenden Spannungen schon erhebliche Ströme fliessen, sind nur noch Messungen mit sehr kurzzeitigen Stromstössen möglich, wenn thermische Störeffekte vermieden werden sollen.

2. Messapparatur.

Die verwendete Messapparatur ist in Fig. 6 schematisch dargestellt. Sie besteht im wesentlichen aus drei Hauptteilen, dem Stosskreis St , dem Kathodenstrahl-Oscillographen KO und einer Vorrichtung zur automatischen Strahlauslösung des Oscillographen A .

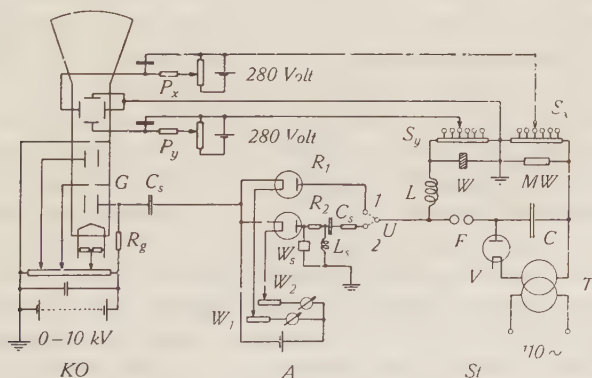


Fig. 6.

Messapparatur

Der Kondensator C des Stosskreises besteht aus 12 Teilkapazitäten zu $0,36 \mu F$, welche wahlweise parallel oder in Serie geschaltet werden können, und je eine Spannung von 15 kV halten. Durch den Transformator T wird der Kondensator über die Ventil-

¹⁾ L. NORDHEIM, Proc. Roy. Soc. **121**, 626 (1928).

röhre V und einen Schutzwiderstand aufgeladen, bis die Zündspannung der messbar veränderlichen Funkenstrecke F erreicht wird. Die Entladung erfolgt über die Selbstinduktion L , den zu untersuchenden spannungsabhängigen Widerstand W in Form einer Karborundprobe und den Messwiderstand mit kleiner Selbstinduktion MW . Die Schaltelemente werden so gewählt, dass im Stosskreis eine gerade aperiodische Stromschwingung entsteht. An den hochohmigen Spannungsteilern S_x und S_y können passende Teilspannungen an die Ablenkplatten des Oscillographen gelegt werden, so dass auf dem Leuchtschirm gleichzeitig horizontal die Stromstärke und vertikal die am Versuchswiderstand liegende Spannung geschrieben wird. Der KO arbeitet bei 6 kV Anodenspannung mit einer Empfindlichkeit von 94,5 Volt/cm in der y - und von 109 Volt/cm in der x -Richtung. Die kleinsten bequem messbaren Ströme betrugen 0,01 Amp., die grössten ca. 1000 Amp. Die Regelung der Empfindlichkeit geschah durch passende Wahl des Messwiderstandes MW und der Spannungsteilung. Die Potentiometer P_x und P_y dienen zur Verschiebung des Strahl-Nullpunktes.

Um die auf dem Leuchtschirm als einmalige und kurzzeitige Vorgänge erscheinenden Strom-Spannungs-Charakteristiken bequem und sauber photographieren zu können, wurde der KO in gebräuchlicher Weise mit einer automatischen Strahlauslösung ausgerüstet. Das Gitter G der KO -Röhre wird im Ruhezustand auf einem so stark negativen Potential gehalten, dass der Elektronenstrahl völlig abgeriegelt wird. Sowie im Stosskreis die Entladung einsetzt, erhält das Gitter über die Diode R_1 einen positiven Spannungsschoss, welcher den Elektronenstrahl freigibt. Die Höhe der Gitterspannung und damit die Helligkeit des Leuchtfleckes wird durch Regulieren des Heizstromes der Röhre R_1 mit Hilfe des Widerstandes W_1 eingestellt. Dieses Verfahren ist brauchbar, solange die Spannung des Stosskondensators nicht höher als 2000 Volt ist. Bei Spannungen von einigen 10 kV, wie sie zur Erzeugung von starken Stromimpulsen nötig werden, müssen einige Vorsichtsmassregeln getroffen werden, damit die Hochspannung nicht auf das Gitter des KO übertritt. Zu diesem Zweck erfolgt die Ankoppelung des Stosskreises mittels der Röhre R_2 über hohe Widerstände und die hochspannungsfeste Kapazität C_s . Überdies ist die Anode der Röhre über einen spannungsabhängigen Karborundwiderstand W_s zur Erde abgeleitet, so dass grössere Spannungen als etwa 3000 Volt an der Anode überhaupt nicht auftreten können.

Da der absteigende Teil der Stosselle bedeutend langsamer als der aufsteigende Teil verläuft, wurde anfänglich das Ende des Vorganges auf dem Leuchtschirm in zu grosser Helligkeit gegen-

über dem Anfang gezeichnet und gab Anlass zu Überbelichtungen. Diesem Übelstande wurde dadurch abgeholfen, dass zur Röhre R_2 ein induktiver Nebenschluss L_s gelegt wurde, der im langsam verlaufenden Teil des Stromstosses die Anodenspannung der Röhre vermindert.

Zur Aufnahme der Oscillogramme diente eine normale Plattenkamera mit doppeltem Auszug und einem Zeiss-Tessar-Objektiv 1:4,5. Unter diesen Umständen musste allerdings hochempfindliches Plattenmaterial und ein äusserst intensiv arbeitender Entwickler verwendet werden, um eine genügende Plattenschwärzung zu erzielen.

3. Einfluss der Kornform auf die Leitfähigkeit von Karborundpulver.

Die Richtigkeit der Auffassung, dass der Stromdurchgang von Korn zu Korn an Stellen sehr hoher elektrischer Feldstärken vor sich geht, konnte durch einen sehr einfachen Versuch gezeigt werden.

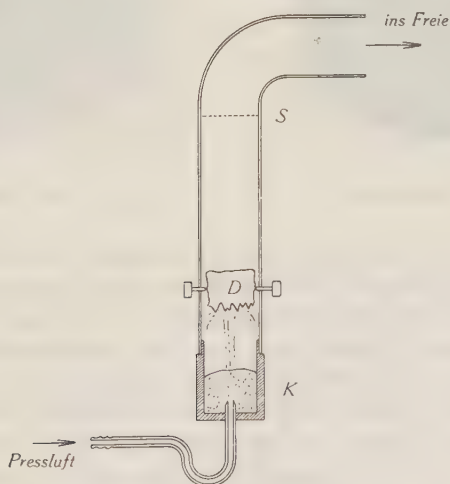


Fig. 7.
Abschleif-Apparat.

Die hohen Felder sind an den Berührungsstellen der Körner zu suchen, d. h. dort, wo das gutleitende Rumpfmateriale der Körner nur noch einen Abstand von der Grösse der Dicke der Fremdschicht besitzt. Andererseits ist aber auch zu erwarten, dass an den sehr scharfen Spitzen und Kanten der Karborundkörner infolge der starken Krümmung der Oberfläche hohe Felder entstehen, die zu

Elektronenaustritt führen. Ist dies der Fall, dann muss die Leitfähigkeit des Karborundpulvers von der Form der Körner in der Weise abhängen, dass Material mit scharfkantigen und spitzen Körnern die höhere Leitfähigkeit besitzt als solches, bei denen die Spitzen und Kanten abgeschliffen worden sind. Dieses Abschleifen wurde in einfachster Weise mittels der in Fig. 7 schematisch dargestellten Vorrichtung besorgt. Das Karborundpulver *K* wurde nach Art eines Sandstrahlgebläses durch Pressluft mit hoher Geschwindigkeit gegen ein kompaktes Stück einer Karborunddruse *D*, wie sie im Elektroofen entsteht, geblasen. Das obere Ende des Rohres war durch ein feines Sieb *S* verschlossen, durch welches

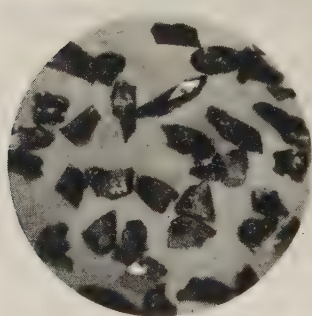


Fig. 8a. Spitzkorn.

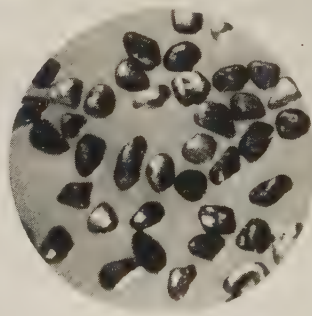


Fig. 8b. Rundkorn.

wohl der beim Abschleifprozess entstehende Staub, nicht aber die abgeschliffenen Körner ins Freie entweichen konnten. Nach etwa 12-stündigem Betrieb wurde eine genügende Menge Karborund mit rundgeschliffenen Körnern erhalten. Die Mikroaufnahme 8a zeigt das Material vor dem Abschleifen, die Aufnahme 8b nachher. Von beiden Produkten wurde eine einheitliche Korngrösse von 0,1 mm Durchmesser ausgesiebt und zur Messung verwendet. Die Fig. 9 zeigt je eine Strom-Spannungs-Charakteristik bei einem Pressdruck von 10 kg/cm². In der Tat fliesst im rundgeschliffenen Material bei gleicher angelegter Spannung nur etwa der 70. Teil des Stromes gegenüber dem kantigen Material. Dies bedeutet, dass durch das Abschleifen tatsächlich eine grosse Zahl von Stellen entfernt worden sind, welche dem Austritt der Elektronen dienten. Um diese Schlussfolgerung noch zu erhärten, wurde an beiden Proben wiederum unter gleichen Bedingungen die Gleichstrom-Charakteristik bei sehr kleinen Spannungen (siehe Abschnitt II/1) aufgenommen, mit dem Resultat, das aus Fig. 10 hervorgeht. Hier zeigt

sich somit das entgegengesetzte Verhalten, d. h. die runden Körner leiten besser als die kantigen; offenbar infolge der grösseren Berührungsflächen der runden Körner. Wären durch das Abschleifen die Fremdschichten teilweise abgetragen oder ganz entfernt worden, so hätte die Leitfähigkeit in jedem Spannungsbereich grösser

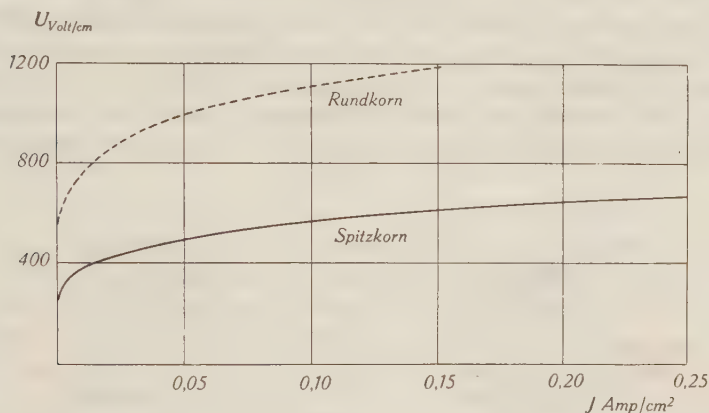


Fig. 9.
Einfluss der Kornform.

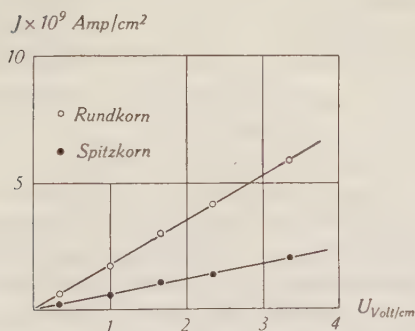


Fig. 10.
Einfluss der Kornform.

werden müssen. Da dies nicht der Fall ist, wird rückwärts die Vermutung gestützt, dass sich die Fremdschichten auch bei Zimmertemperatur momentan ausbilden. Jedoch ist das Resultat dieser Versuche in anderer Hinsicht noch bedeutungsvoller, denn sie zeigen, dass die Grösse der Felder an der *Oberfläche* der Körner für die Leitfähigkeit von ausschlaggebender Bedeutung sind. Damit ist ein starker qualitativer Beweis für die Richtigkeit der Theorie erbracht.

4. Verstärkung der Fremdschichten durch Oxydation.

Der Einfluss der Fremdschichten auf den Stromtransport konnte weiter auf folgende Weise gezeigt werden. Normales, schwarzes Karborundpulver von 0,2 mm Korndurchmesser wurde in einem elektrischen Ofen unter Luftzutritt während 3 Stunden geglüht; eine erste Probe bei 1000° , eine zweite bei 1210° und eine dritte bei 1500° C, wobei sich auf den Körnern der am höchsten erhitzten Probe bereits Anlauffarben zu zeigen begannen. Von jeder Probe wurde bei Zimmertemperatur ein Strom-Spannungs-Diagramm aufgenommen und in Fig. 11 gemeinsam dargestellt.

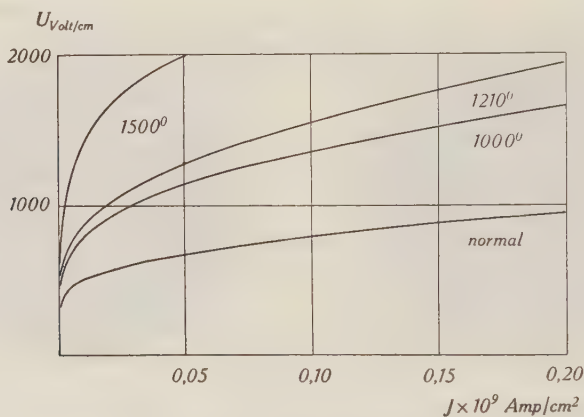


Fig. 11.
Oxydation der Fremdschichten.

Hier zeigt sich, dass mit zunehmender Oxydationstemperatur die Leitfähigkeit ausserordentlich stark abnimmt. Nach den Versuchen von HEINE und SCHERRER ist es sicher, dass durch die Behandlung in oxydierender Atmosphäre die Dicke der Fremdschichten zugenommen hat. Bei gleichen an die Proben gelegten Spannungen sind daher die Feldstärken an den Oberflächen der Körner kleiner und damit auch in erheblichem Masse die fliessenden Ströme.

Zusammen mit dem Ergebnis des vorangehenden Abschnittes ergibt sich hieraus mit Sicherheit der Beweis, dass für die Grösse des fliessenden Stromes nicht die Spannung über der Kontaktstelle, sondern die *Feldstärke* an der Oberfläche der Karborundkörner massgebend ist. Daraus folgt weiter, dass die Grundlagen, auf welchen die Theorie des Leitungsmechanismus aufgebaut ist, richtig sind. Es erhebt sich nun noch die Frage, ob auch die aus der Theorie zu ziehenden Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen.

5. Qualitative und quantitative Prüfung der Theorie.

Der Vergleich der Formel (6) mit dem Experiment ist mit einigen Schwierigkeiten verbunden, da von der Theorie nur der Zusammenhang zwischen der Stromdichte j_k und der Feldstärke F_k , die an einem einzelnen Kontakt herrschen, geliefert wird. Diese beiden Grössen sind jedoch einer direkten Messung nicht zugänglich. Unmittelbar messbar sind nur die zu j_k und F_k proportionalen Grössen i_k , d. h. der Gesamtstrom, der durch eine Kontaktstelle fliesst, und die Spannung $u_k = F_k \cdot \Delta_k$ am Kontakt. Die Kenntnis von Δ_k ist daher vor allem von Bedeutung, da der absolute Wert der Feldstärke F_k in die Exponentialfunktion der Formel (6) einerseits direkt, andererseits durch die Funktion $\varphi(y_0)$ eingeht.

Als weitere Komplikation kommt hinzu, dass die Aufnahme der Strom-Spannungs-Charakteristik eines Einzelkontaktes bei den in Frage kommenden kleinen Strömen und Spannungen nicht ohne weiteres möglich ist. Die Messungen mussten daher an einer grossen Zahl von parallel und in Serie liegenden Kontakten vorgenommen werden. Experimentell wurde also der Zusammenhang zwischen I und U , d. h. dem Strom, der durch 1 cm^2 körniges Material fliesst, und der Spannung, die pro cm Schichthöhe angelegt wird, ermittelt. Es ist nun fraglich, in welchem Zusammenhang I und j_k , bzw. U und F_k stehen.

Theoretisch lässt sich zeigen¹⁾, dass in beiden Fällen Proportionalität besteht, sofern die Schwankungen der Dicke δ_k der Fremdschichten um einen Mittelwert δ_k über die Gesamtzahl der Kontaktstellen hinreichend klein sind. Es ist auch ohne Rechnung sofort einzusehen, dass zwischen I und U durchaus nicht derselbe Zusammenhang wie zwischen j_k und F_k zu bestehen braucht, falls die oben genannte Bedingung nicht erfüllt ist. Es kommt daher vor allem darauf an, einzusehen, dass die Werte für δ_k über viele Kontakte bei einheitlichem Kornmaterial wirklich nur sehr wenig streuen. Es hält leider schwer, hierfür einen direkten Beweis, etwa durch unmittelbare Dickenmessung, zu erbringen; es sprechen aber folgende Beobachtungen dafür. Einmal zeigt sich, dass verschiedene Karborundproben ein und desselben Materials unter gleichen äusseren Bedingungen innerhalb der Messgenauigkeit reproduzierbare Resultate ergeben. Ferner zeigt sich, dass die Stromstärke, die bei konstanter Spannung durch das körnige Material fliesst, genau proportional zum Querschnitt des stromdurchflossenen Widerstandes ist. Ebenso herrscht Proportionalität

¹⁾ KURTSCHATOW und Mitarbeiter, loc. cit.

zwischen Spannung und Länge des Widerstandes bei konstantem Strom. Wenn die Fremdschicht-Dicke δ_k und damit die Feldstärken von Kontakt zu Kontakt stark schwanken würden, müssten sich hier Abweichungen zeigen. Es darf daher angenommen werden, dass zwischen I und U derselbe funktionale Zusammenhang besteht, wie zwischen j_k und u_k . Das bedeutet, dass man die am Einzelkontakt wirksame Feldstärke aus der mittleren Spannung u_k pro Kontakt und einer mittleren Kontaktbreite $\Delta_k = 2\delta_k$ berechnen kann. Es gilt in diesem Falle

$$F_k = u_k \cdot \frac{1}{\Delta_k} = \frac{U}{z_h} \cdot \frac{1}{\Delta_k} \quad (7)$$

wo z_h die Zahl der Körner pro cm Schichtdicke bedeutet. In ähnlicher Weise kann angenommen werden, dass die mittlere Stromdichte j_k berechnet werden kann aus

$$j_k = \frac{i_k}{f_k} = \frac{I}{z_f} \cdot \frac{1}{f_k} \quad (8)$$

wobei mit f_k die mittlere Grösse der Kontaktfläche und mit z_f die Zahl der Körner pro cm^2 bezeichnet wird.

Nach diesen Voraussetzungen ist zu erwarten, dass zwischen der nach (7) berechneten Feldstärke F_k und der gemessenen Stromstärke I der zu (6) analoge Zusammenhang besteht:

$$I = A^* \cdot e^{-B \frac{W_0^{3/2}}{F_k}} \varphi(y_0)$$

Darin hat B die frühere Bedeutung, nämlich

$$B = \frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar e}$$

während A^* für den Ausdruck

$$A^* = z_f \cdot f_k \cdot \frac{3}{4} \frac{kT}{e\bar{l}} \sigma_0 = z_f \cdot f_k \cdot A$$

steht.

Zur Veranschaulichung wird $\log I$ in Funktion von $\frac{\varphi(y_0)}{F_k}$ aufgetragen. Als Ergebnis ist eine Gerade zu erwarten, aus deren Steilheit die Austrittsarbeit W und aus deren vertikalem Achsenabschnitt die Grösse A^* berechnet werden kann. In Fig. 12 ist das Resultat der Auswertung von Aufnahmen an zwei verschiedenen Proben aus gleichem Material bei einem Druck von 10 kg/cm^2

dargestellt. Damit die Feldstärke F_k nach Formel (7) berechnet werden darf, wurde zur Messung das früher beschriebene, rundgeschliffene Kornmaterial verwendet. Grosse Abweichungen infolge von Spitzen und Kanten sind daher nicht zu erwarten.

Es zeigt sich nun ganz allgemein, dass $\log I$ als Funktion von $1/F$ aufgetragen, schon in guter Näherung eine Gerade liefert. Dieser Umstand spricht bereits für die Richtigkeit des aufgestellten

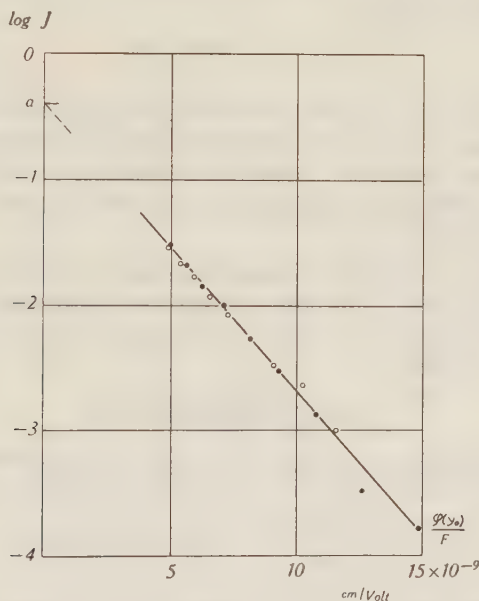


Fig. 12.

$$\text{Strom-Spannungs-Gesetz} \quad J = A^* e^{-B \frac{W_0^{3/2}}{F} \varphi(y_0)}$$

Gesetzes, da $\varphi(y_0)$ nur relativ schwach von F abhängt. In dieser Funktion steckt aber noch die Austrittsarbeit W . Diese ergibt sich aus der Steilheit der Geraden natürlich nur dann richtig, wenn die Absolutwerte der Feldstärken bekannt sind. W berechnet sich aus zwei Kurvenpunkten leicht nach der Formel

$$W_{eV} = 1,08 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{\log I_1 - \log I_2}{\frac{\varphi(y_2)}{F_2} - \frac{\varphi(y_1)}{F_1}} \right)^{2/3}$$

Es muss betont werden, dass dies kein expliziter Ausdruck für W ist, da die Grösse, wie bereits erwähnt, auch noch in den Funktionen $\varphi(y_1)$ und $\varphi(y_2)$ enthalten ist. Eine elementare Auflösung ist daher nicht möglich. Folgender Weg führt jedoch zum

Ziel. Für W wird zunächst der experimentell gefundene Wert 4,5 eV gesetzt und die Feldstärken F , sowie die Funktionswerte von $\varphi(y_0)$ für eine bestimmte Fremdschichtdicke Δ_k berechnet. Aus der graphischen Darstellung von $\log I \left(\frac{\varphi(y_0)}{F} \right)$ ergibt sich sodann ein Wert für W . Die beste Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert für W ergibt sich unter Benutzung des vollständigen Gesetzes (6), wenn zur Berechnung der Feldstärke nach (7) eine Fremdschichtdicke

$$\delta_k = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$$

zugrunde gelegt wird. Dieser Wert liegt tiefer als der in Abschnitt II/3 angegebene; er darf jedoch als wahrscheinlicher betrachtet werden. Unter Annahme dieser Schichtdicke ist die Darstellung der Fig. 12 entstanden. Es ergibt sich aus ihr für die Austrittsarbeit $W = 4,1 \text{ eV}$.

Aus dem vertikalen Achsenabschnitt ergibt sich ferner $A^* = 0,44 \text{ Amp/cm}^2$. Mit Benützung der Kornzahl $z_f = 10^4/\text{cm}^2$ und der Kontaktfläche $f_k = 10^{-8} \text{ cm}^2$ erhält man so für die Konstante A den Wert

$$A = 4,4 \cdot 10^3 \text{ Amp/cm}^2$$

Dieser ist tatsächlich mit dem theoretischen Wert

$$A_{\text{theor.}} = \frac{3 k T \sigma_0}{4 e \bar{l}} = 3,9 \cdot 10^3 \text{ Amp/cm}^2$$

in guter Übereinstimmung. Es muss jedoch gesagt werden, dass diese Übereinstimmung mehr zufällig ist, da in $A_{\text{theor.}}$ die nicht sicher bekannte Leitfähigkeit σ_0 des Materiales eingeht. Dasselbe gilt auch für die mittlere freie Weglänge der Elektronen im Siliziumkarbid, welche ebenfalls nur grössenordnungsmässig bekannt ist. Mit Abweichungen von einem Faktor 10 nach unten oder oben muss heute noch unbedingt gerechnet werden.

Im ganzen kann jedoch festgestellt werden, dass die Experimente die Richtigkeit der Theorie weitgehend bestätigen.

6. Einfluss des Pressdrucks auf die Strom-Spannungs-Charakteristik.

Je höher der mechanische Druck ist, unter welchem die Karborundkörner aufeinandergepresst werden, um so mehr steigt die Leitfähigkeit, d. h. die Spannung pro cm körnigen Materials wird für einen konstanten Stromwert niedriger. In Fig. 13 ist das Re-

sultat an drei verschiedenen Karborundsorten von 0,2 mm Korn-durchmesser dargestellt. Es erhebt sich nun die Frage, ob dieses Ergebnis durch die Kompression der Fremdschichten gedeutet werden kann. Eine Abnahme der Fremdschichtdicke δ_k hat bei gegebener Spannung u_k an der Kontaktstelle eine Erhöhung der Feldstärke F und damit des Stromes i_k zur Folge.

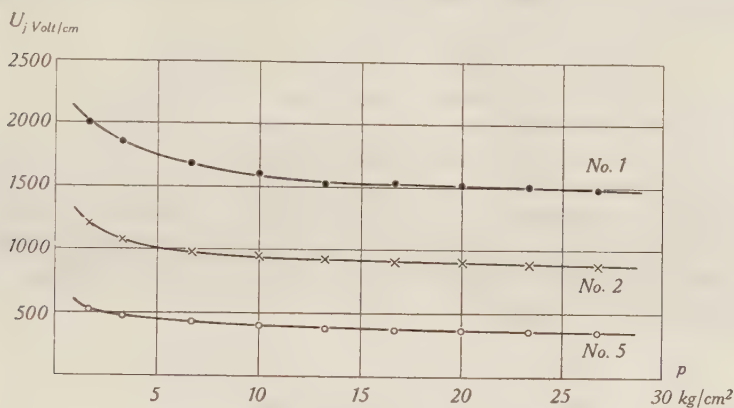


Fig. 13.
Druck-Einfluss.

Der Gang von δ_k mit dem Pressdruck p ist formal nicht ohne weiteres in einen Zusammenhang zu bringen; wir besitzen aber die Möglichkeit, die Druckabhängigkeit von δ_k aus den Kapazitätsmessungen des Abschnittes II/3 zu ermitteln.

Für die Kapazität C_k eines cm³ körnigen Karborunds setzten wir nach (4)

$$C_k = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{z_f}{z_h} \frac{f_k}{\delta_k}$$

und fanden experimentell

$$C_k = \text{const} \cdot p$$

d. h. die Kapazität verläuft zum Pressdruck proportional. Da sich die Teilchenzahl mit dem Pressdruck nicht ändert, gilt offenbar

$$\frac{f_k}{\delta_k} = \text{const} \cdot p$$

und da nach der Theorie von HERTZ die Berührungsfläche

$$f_k = \text{const} \cdot p^{2/3}$$

gilt, wird

$$\delta_k = \text{const} \cdot p^{-1/3}$$

Nun gilt für konstanten Strom bei fester Temperatur näherungsweise

$$j_k = \text{const} = A \cdot f_k \cdot e^{-B/F_k}$$

worin A und B konstante Werte bedeuten. Da die Änderung von f_k mit dem Druck nur langsam erfolgt und gegen den Exponentialfaktor nicht ins Gewicht fällt, muss die Feldstärke F_k konstant sein. Nun ist

$$F_k = \frac{u_k}{2 \delta_k} = \frac{U_j}{2 z_h} \cdot \frac{1}{\delta_k} = \text{const},$$

d. h.

$$\underline{U_j = \text{const} \cdot \delta_k = \text{const} \cdot p^{-1/3}} \quad (9)$$

wo U_j die Spannung pro cm Material bei konstantem Strom bezeichnet. Aus Fig. 14 geht hervor, dass dieses Gesetz tatsächlich mit guter Näherung erfüllt ist und somit im Einklang mit der gegebenen Theorie steht.

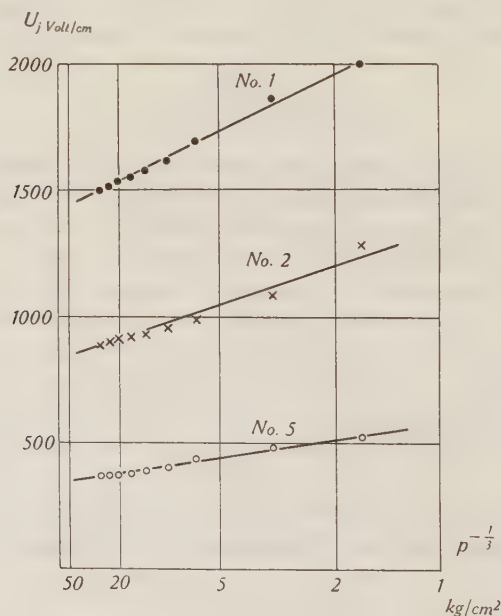


Fig. 14.

Druck-Einfluss. $p^{-1/3}$ — Gesetz.

Für sehr hohe Drücke, 100—1000 kg/cm², wie sie von KURT-SCHATOW und Mitarbeitern angewendet wurden, scheint ein ganz anderes Gesetz zu gelten. Es ist aber damit zu rechnen, dass bei

so hohen Druckkräften die Fremdschichten infolge der grossen Härte des Materials teilweise zerstört und durchstossen werden. Ein Vergleich mit jenen Messungen ist daher nicht möglich; dagegen ist es von Interesse, dass HOLM¹⁾ für die Druckabhängigkeit des Widerstandes metallischer Kontakte genau dasselbe Gesetz findet, wie wir.

7. Temperaturabhängigkeit der Kontaktleitfähigkeit.

Während bei reinen Metallen die autoelektronische Emission, sowie die Leitfähigkeit von genügend weiten Metallkontakten von der Temperatur unabhängig ist, ergibt sich aus Gleichung (6) eine wesentliche Temperaturabhängigkeit des Stromes bei gegebener Feldstärke. Dies ist deshalb zu erwarten, weil die Leitfähigkeit σ_0 des Karborunds von der Temperatur deutlich abhängt und zwar mit steigender Temperatur zunimmt. Wie Fig. 15 zeigt, hängt der

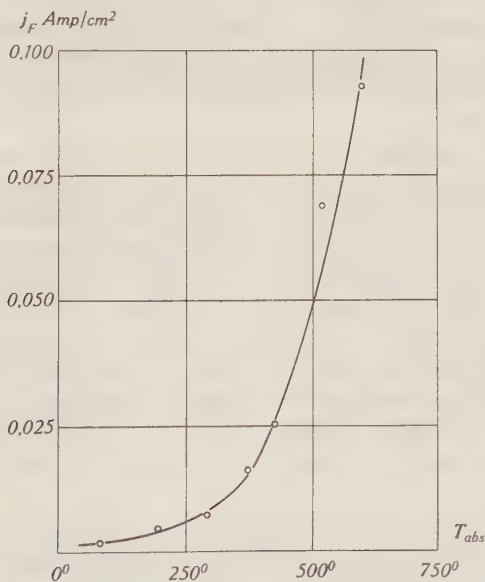


Fig. 15.

Temperaturabhängigkeit der Kontakt-Leitfähigkeit.

bei konstanter Spannung gemessene Strom stark von der Temperatur ab, jedoch grössenordnungsmässig schwächer als die Leitfähigkeit der Fremdschichten, wie im Abschnitt II/2 beschrieben

¹⁾ R. HOLM, loc. cit.

wurde. Der Temperaturgang in Fig. 15 ist in linearen Masstäben aufgetragen, da es sich zeigte, dass weder ein Gesetz von der Form $e^{\lambda T}$, noch der Art $e^{-\kappa/T}$ den experimentellen Befund richtig wiedergibt. Unterhalb Zimmertemperatur ist die Leitfähigkeit relativ schwach, bei höheren Temperaturen aber um so stärker temperaturabhängig. Nach KURTSCHATOW und Mitarbeiter soll die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit der Rumpfschubstanz des Karborunds einen im ganzen ähnlichen Verlauf zeigen.

IV. 4. Gebiet: Hysteresis.

1. Strom-Spannungs-Charakteristiken für verschiedene Stromstärken.

Während bei sehr kleinen Spannungen der Leitungsvorgang unabhängig von der Dauer des Stromflusses war, zeigte es sich bereits bei den Versuchen mit mittleren Spannungen im letzten Abschnitt, dass das Strom-Spannungs-Gesetz um so genauer geprüft werden kann, je kürzer die Zeitdauer des Stromstosses gewählt wird. Es war sehr naheliegend, thermische Effekte an den Kontaktstellen in Betracht zu ziehen, welche die Form der Charakteristik beeinflussen.

In der Tat zeigen sich bei Versuchen mit hohen Spannungs- und Stromwerten bis 50 Volt und 0,5 Amp. pro Kontaktstelle bei Stossdauern von 10—50 μsec völlig neue Erscheinungen. Da Stromstösse dieser Grösse und Dauer gerade für die Technik von besonderer Bedeutung sind, wurden unsere Untersuchungen auch auf dieses Gebiet ausgedehnt. Dies schien um so mehr gerechtfertigt, als sich die im Abschnitt I erwähnten Erklärungsversuche namentlich auf die Vorgänge bei hohen Energien bezogen. Insbesondere gilt es zu zeigen, dass Gasentladungen in den zwischen den Körnern befindlichen Hohlräumen nur als sekundäre Erscheinung auftreten und für den Mechanismus der Stromleitung von untergeordneter Bedeutung sind.

Zunächst geht aus den drei Strom-Spannungs-Diagrammen in Fig. 16 hervor, dass zwischen Strom und Spannung keine eindeutige Beziehung mehr besteht; die Charakteristiken zeigen vielmehr stark ausgeprägte *Hysteresis-Schleifen*, die beim Durchgang eines einmaligen Stromstosses zeitlich in der Richtung der eingezeichneten Pfeile durchlaufen werden. Der Teil der Kurve, der bei konstantem Strom der höheren Spannung entspricht, wird zuerst durchlaufen und soll als *aufsteigender Ast*, der tiefere Teil der Kurve als *rückkehrender Ast* bezeichnet werden. Die Kurven erinnern im übrigen etwas an die dynamische Charakteristik eines Lichtbogens.

Die Aufnahmen wurden an schwarzem Karborund Sorte 5 mit kantigen Körnern von 0,2 mm Durchmesser unter einem Druck von 10 kg/cm² gewonnen und liefern für die Maximalwerte von Strom- und Spannung im Mittel pro Kontaktstelle: 13, 27 und 40 mA, bzw. 18, 24 und 29,5 Volt. Die Halbwertsdauer des Stromstosses betrug 40 μ sec und die von den Kontaktstellen im Mittel aufgenommenen Energien betragen 3,0, 8,0 bzw. $43 \cdot 10^{-6}$ Wattsec. Diese Energiewerte wurden auf Grund der folgenden Überlegung berechnet: Der Kondensator C der Stossapparatur (siehe Abschnitt

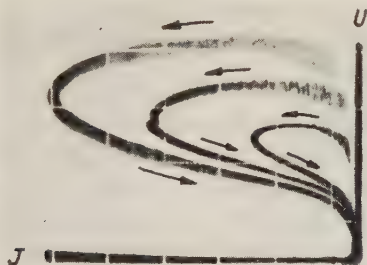


Fig. 16.

III/2, Fig. 6) entlädt sich praktisch vollständig über den spannungsabhängigen Widerstand W und den Messwiderstand MW . Selbstinduktion und Widerstände sind so gewählt, dass der Stromstoss durch den Ausdruck

$$J = \alpha \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$

genügend genau beschrieben wird. Damit ist es möglich, die im Messwiderstand vernichtete Energie zu berechnen. Eine einfache Rechnung ergibt hierfür

$$Q_{MW} = \frac{e}{4} \cdot C \cdot U_c \cdot R \cdot I_{\max}$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen, C und U_c Kapazität und Aufladespannung des Stosskondensators, R die Grösse des Messwiderstandes und I_{\max} das Maximum der Stromamplitude bedeuten. C und R sind bekannt, U_c wird an Hand der Schlagweite der Entladungsfunkstrecke und I_{\max} aus dem Oscillogramm ermittelt.

Die im spannungsabhängigen Widerstand vernichtete Energie ist somit

$$Q_s = \frac{C}{2} U_c^2 - \frac{e}{4} C U_c R I_{\max} . \quad (10)$$

Es zeigt sich, dass die Leitfähigkeit des Widerstandsmaterialies nicht nur von der Spannung, sondern auch von der hineingesteckten Energie abhängig ist. Zur Ausbildung einer gerade erkennbaren Hysteresis-Schleife braucht es bei etwa $40 \mu\text{sec}$ Halbwertsdauer des Stosses bei Verwendung des obenerwähnten Materials ca. $5 \cdot 10^{-7}$ Wattsec pro Kontakt.

Das geschilderte Verhalten deutet darauf hin, dass thermische Effekte eine bedeutende Rolle spielen und in den folgenden Abschnitten soll diese Frage weiter untersucht werden.

2. Irreversible Veränderung der Charakteristik infolge der Belastung.

Der Durchgang starker Stromstösse hat eine bleibende Veränderung der Strom-Spannungs-Charakteristik zur Folge. Dies tritt sowohl bei Versuchen mit Pulvern ein, die ohne jede Beimengung in einer Hülse mit zwei Stempeln unter einem bestimmten Druck untersucht werden, wie auch an Widerstandskörpern, die durch Verwendung keramischer Bindemittel aus Karborundpulver hergestellt worden sind. Die Veränderungen gehen in beiden Fällen jedoch in entgegengesetztem Sinne. Die Leitfähigkeit des unter Druck stehenden Pulvers nimmt von Stoss zu Stoss bis zu einem bestimmten Betrage fortwährend zu, beim keramischen Körper jedoch ab. Die erste Erscheinung ist als *Fritten* oder *Zusammensintern* der Kontaktstellen der Körner zu erklären, wodurch die isolierenden Fremdschichten allmählich durchbrochen werden und die Kerne der Körner immer mehr zur direkten Berührung kommen. Im zweiten Fall handelt es sich offenbar darum, dass sich die Kontaktstellen beim Stromdurchgang so stark erhitzen, dass *Verdampfung* des Karborunds und damit Verminderung der Zahl der Kontaktstellen oder vermehrte *Oxydation* der heissen Stellen unter Einwirkung des Luftsauerstoffes eintritt.

Dass es sich um einen Effekt dieser Art handeln muss, konnte durch einen sehr einfachen Versuch gezeigt werden. Von zwei gleichen Widerständen, insbesondere mit gleicher Vorgeschichte, wurde je ein Strom-Spannungs-Oscillogramm bei gleichen Stössen hoher Energie aufgenommen. Sodann wurde der eine Widerstand 10 weiteren gleichen Stössen ausgesetzt und der 12. Stoss wieder aufgenommen. Der zweite Widerstand erhielt die 10 Stösse, während er sich auf der Temperatur der flüssigen Luft befand. Der 12. Stoss wurde wiederum bei Zimmertemperatur aufgenommen. Während sich die Maximalspannung des ersten Widerstandes um ca. 20% erhöhte, hatte sich der gekühlte Widerstand praktisch

kaum verändert, da infolge der intensiven Kühlung weniger hohe Maximaltemperaturen an den Kontaktstellen und daher geringere Verdampfung auftraten.

3. Einfluss der Temperatur auf die Charakteristik.

Um die Bedeutung der Temperatureffekte weiter zu verfolgen, wurden Charakteristiken bei verschiedenen Temperaturen aufgenommen. Die Fig. 17a—d zeigen Aufnahmen bei -190 , -75 ,

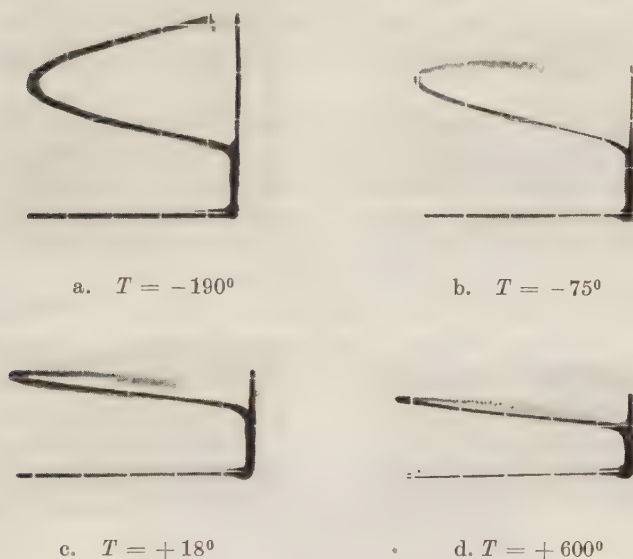


Fig. 17.

Einfluss der Temperatur auf die Stoss-Charakteristik.

20 und 600° C mit Stromstößen, welche bei Zimmertemperatur nur eine relativ enge Hysteresis-Schleife und keine bleibenden Veränderungen der Widerstände verursacht. In der Tat zeigt sich ein sehr grosser Einfluss und zwar namentlich bei tiefen Temperaturen. Bei der Temperatur der flüssigen Luft ist die am Widerstand maximal auftretende Spannung rund doppelt so hoch wie bei Zimmertemperatur; die Hysteresis-Schleife selber besitzt dort ungefähr die 8-fache „Weite“. Die Erhöhung der Temperatur hat eine Verengung der Schleife und eine allgemeine Zunahme der Leitfähigkeit des Materials zur Folge, wie zu erwarten war. Jedoch ist die Charakteristik auf Temperatursenkung bedeutend empfind-

licher als auf Temperaturerhöhung. Diese Tatsache weist darauf hin, dass bei den hier zur Anwendung kommenden Energien die Kontaktstellen infolge der Joule'schen Wärme so stark erhitzt werden, dass ihre Leitfähigkeit in hohem Masse zunimmt.

4. Versuche mit gedämpften Stromschwingungen.

Es stellt sich nun die Frage, in welcher Weise die Erwärmung der Kontaktstellen mit der Zunahme der Leitfähigkeit des ganzen Widerstandes zusammenhängt. Folgende Fälle sind denkbar:

a) Durch die Erwärmung der Kontakte steigt die Leitfähigkeit der Fremdschichten, wie in Abschnitt II/2 gezeigt wurde. Damit geht der Feldemissionsstrom in einen normalen Leitungsstrom über.

b) Da an den Kontaktstellen hohe Temperaturen und hohe elektrische Felder gleichzeitig auftreten, wird der Leitungsvorgang nicht mehr durch die Formel (6) beschrieben. Feldstärken von der Grösse 10^8 Volt/cm, wie sie in unserem Falle wirksam werden, erniedrigen die Austrittsarbeit bereits um einige Volt, so dass Elektronen schon infolge ihrer thermischen Energie von einem Kristallit zum andern übertreten können (Schottky-Effekt).

c) Die heissen Stellen der Kristalloberflächen, namentlich Spitzen und Kanten beginnen nach Art einer Glühkathode thermisch zu emittieren.

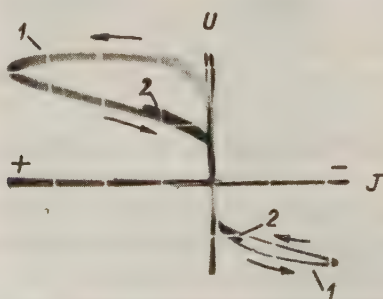


Fig. 18.

In den ersten zwei Fällen ist eine im Bezug auf die Stromrichtung symmetrische Erwärmung der Kontaktstellen, im dritten Fall eher eine asymmetrische zu erwarten. Schickt man also durch einen Widerstand zwei Stromstösse unmittelbar nacheinander in umgekehrter Richtung, so ist in den beiden ersten Fällen zu er-

warten, dass beim Durchgang des zweiten Stosses die Kontaktstellen vom ersten her noch heiss sind und gut leiten. Der zweite Stoss müsste in diesem Falle eine viel engere Hysteresis-Schleife erzeugen. Im dritten Falle wäre anzunehmen, dass die beim ersten Stoss als heisse Kathoden wirkenden Stellen beim entgegengesetzten Stoss als relativ kalte Anoden funktionieren und umgekehrt. Der Widerstand müsste sich also dem zweiten Stoss gegenüber im wesentlichen so verhalten, wie wenn nichts vorher passiert wäre.

Der Versuch wurde mit einer Stromschwingung von $100\ \mu\text{sec}$ Schwingungsdauer ausgeführt, die nach je zwei positiven und zwei negativen Ausschlägen abgeklungen war. Die dabei beschriebene Strom-Spannungs-Kurve ist aus Fig. 18 ersichtlich. Die Kurve wurde im Sinne der eingezeichneten Pfeile durchlaufen. Es zeigt sich tatsächlich, dass nach dem Durchgang des ersten positiven Stosses der erste negative bereits eine sehr viel engere Hysteresis-Schleife erzeugt und dass der zweite positive und der zweite negative Stoss schon vollständig in die rückkehrenden Äste der vorangegangenen Stösse fallen.

Damit ist zugunsten einer der beiden ersten Fälle entschieden und die dritte Möglichkeit fällt ausser Betracht. Auf die Entscheidung zwischen den Fällen a und b kommen wir später noch zurück.

5. Untersuchung der Abkühlungsgeschwindigkeit.

Es ist plausibel, dass nach Durchgang eines starken Stromstosses eine gewisse Zeit verstreichen muss, bis die Temperatur der Kontaktstellen wieder auf den ursprünglichen Wert der Umgebungstemperatur abgeklungen ist; jedoch ist eine quantitative Aussage sehr erwünscht. Diese Untersuchung erforderte in erster Linie eine Erweiterung und vorübergehende Änderung der im Abschnitt III/2 beschriebenen Messapparatur. Aus Fig. 19 ist das Prinzip der neuen Anordnung ersichtlich, der folgender Gedanke zugrunde liegt.

Die beiden gleich grossen Kapazitäten C_1 und C_2 werden über gleiche Widerstände $R_1 = R_2 = 5 \cdot 10^6$ Ohm bis knapp unter die Zündspannung der beiden gleich eingestellten Funkenstrecken F_1 und F_2 positiv aufgeladen. Die linksstehenden Kugeln der beiden Funkenstrecken befinden sich zunächst auf Erdpotential. Gleichzeitig wurde die in ihrer Grösse veränderliche Hilfskapazität C_h mit Hilfe eines separaten Gleichrichters auf 2—3000 Volt aufgeladen. Im geeigneten Moment wird der Umschalter S betätigt, wodurch C_h über die veränderliche Selbstinduktion L_h entladen wird und in diesem Kreise die Eigenschwingung anregt. Die links-

stehende Kugel der Funkenstrecke F_1 erhält dadurch über die Schutzwiderstände R_h und R_s z. B. einen so starken negativen Spannungsschoss, dass die Funkenstrecke F_1 und die obere der Hilfsfunkenstrecken F_h sofort ansprechen und den ersten Stoss aus der Kapazität C_1 auslösen. Wenn die Schwingungsdauer des Hilfskreises $T = 2\pi \sqrt{L_h C_h}$ grösser als die doppelte Dauer des Stromstosses ist, so bleibt während der Entladung von C_1 die linke Kugel von F_2 auf positivem Potential, bis die Hilfsschwingung ihr Vorzeichen wechselt. C_2 kann sich also erst entladen, d. h. der zweite Stromstoss kann erst dann folgen, wenn die Funkenstrecke F_2 zum Ansprechen gebracht worden ist. Durch Wahl von L_h und C_h hat man es so in der Hand, das Zeitintervall zwischen den

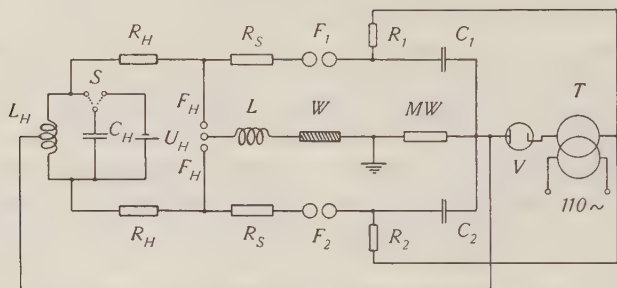


Fig. 19.
Doppelstoss-Apparatur.

aufeinander folgenden Stromstössen in weiten Grenzen zu variieren. Auf einem ersten Oscillographen wurden die beiden kurz nacheinander geschriebenen Strom-Spannungs-Kurven aufgezeichnet und auf einem zweiten der Stromverlauf im Messwiderstand MW als Funktion der Zeit. Die Leuchtschirme der beiden Oscillographen wurden senkrecht zueinander angeordnet und mit Hilfe eines halbdurchlässigen Spiegels gleichzeitig auf ein und dieselbe Photoplatte aufgenommen. Zur Eichung der Zeitablenkung wurde noch eine tonfrequente Schwingung bekannter Frequenz auf den einen Oscillographen gegeben und nachträglich auf dieselbe Platte photographiert. Das Ergebnis dieser etwas schwierigen Messung ist in Fig. 20 dargestellt. Als Mass für den Regenerationsgrad wurde das Verhältnis q der Spannung des rückkehrenden zur Spannung des aufsteigenden Astes des zweiten Stosses an der Stelle $I = \frac{1}{2} I_{max}$ genommen, d. h.

$$q = \left(\frac{U_{\text{rückkehrend}}}{U_{\text{aufsteigend}}} \right) \quad I = \frac{1}{2} I_{max}$$

q nähert sich für verschwindende Zeitdifferenz dem Werte 1, d. h. der aufsteigende und der rückkehrende Ast fallen zusammen. Für sehr lange Wartezeit zwischen den Stößen nimmt q den für jeden Widerstand charakteristischen Wert q_{∞} , in unserem Falle den Wert $q_{\infty} = 0,575$ an. Aus der Figur ist ersichtlich, dass sich die Regeneration in zwei Stufen vollzieht. Nach einem Zeitintervall von ca. $5 \cdot 10^{-4}$ sec haben sich die Kontaktstellen offenbar vorwiegend durch Abstrahlung soweit abgekühlt, dass sich der Widerstand fast wieder in seinem ursprünglichen Zustand befindet. Dann folgt ein verhältnismässig langsames Abklingen infolge der allmählichen Wärmeableitung.

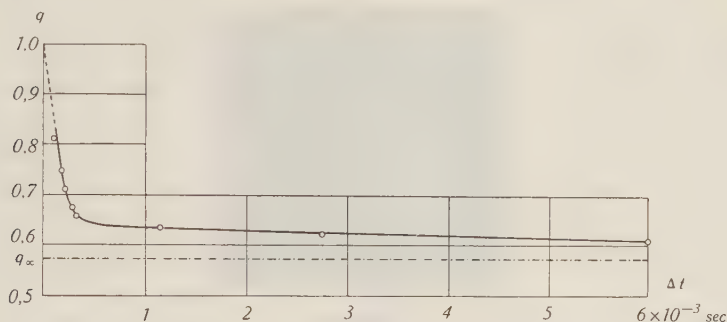


Fig. 20.

Abkling-Vorgang (Regenerations-Kurve).

Im letzten Teil dieses Abschnittes wird dieses Resultat weiter verwertet werden.

6. Optische Erscheinungen.

Um die oben entwickelte *thermische* Theorie der Hysteresis-Schleife weiter zu prüfen, wurde das Innere eines Karborundwiderstandes während des Stromdurchganges „photographiert“. Eine Photoplatte von ca. 1 cm^2 Fläche wurde auf der Schichtseite mit einem Mikroskop-Deckglas bedeckt und parallel zur Richtung des Stromflusses in die Karborundkörner eingebettet. Dann wurde ein Stromstoß durchgeschickt und die Platte entwickelt. Das Deckglas sollte die Schwärzung der Photoplatte durch direkt auffallende Elektronen oder allfällige chemische Reaktionsprodukte verhindern. In Fig. 21 ist eine Aufnahme in 5-facher Vergrößerung wiedergegeben. Die hellen Flecken sind nichts anderes als die „Abbildungen“ der beim Stromdurchgang lichtaussendenden Kontaktstellen. Diese Lichtpunkte sind an keramisch gebrannten Widerständen an der Oberfläche sehr schön zu sehen und können

als Zeichen für die hohen Temperaturen, die an den Kontaktstellen auftreten, angesehen werden. Dies ist aber nur dann zutreffend, wenn sich das Spektrum des ausgesandten Lichtes als kontinuierlich erweist.

Obschon zum vornherein wenig Aussicht bestand, die schwachen und nur einige $\frac{1}{10\,000}$ sec dauernden Lichtblitze spektroskopisch zu untersuchen, wurde der Versuch zur Aufnahme von Spektren unternommen. Die Aufgabe war allerdings nur mit einem extrem lichtstarken Spektrographen möglich, der mangels eines fertigen Instrumentes für diesen Zweck improvisiert wurde.

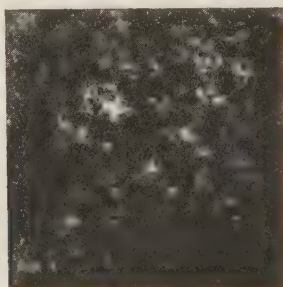


Fig. 21.

Das Öffnungsverhältnis betrug nahezu 1 : 1. Die Versuche ergaben folgendes Resultat: Das Spektrum des ausgesandten Lichtes besitzt 1. einen kontinuierlichen Anteil, der von den hochoerhitzten, glühenden Kontaktstellen herrührt und 2. eine Reihe von Linien, die mit Sicherheit als Linien des Spektrums erkannt wurden, das bei der Erzeugung eines stark kondensierten Funkens zwischen Elektroden aus Karborundkristallen beobachtet wird.

Für das Verständnis des Mechanismus der spannungsabhängigen Widerstände sind die beiden obengenannten Feststellungen von grösster Bedeutung. Aus dem Auftreten des genannten Linienspektrums muss geschlossen werden, dass die Kontaktstellen infolge der Stromwärme tatsächlich so hoch erhitzt werden, dass Verdampfung des Siliciumcarbids eintritt. Da der Sublimationspunkt für SiC nach älteren Angaben bei 2500° abs. liegt, muss angenommen werden, dass lokal Temperaturen in dieser Höhe erreicht werden. Da bei den angewandten Stoßströmen an den Kontaktstellen Spannungen bis zu 50 Volt entstehen, ist die elektrische Anregung und Ionisierung der Atome des verdampfenden SiC wohl möglich; es ist aber bei so hohen Temperaturen auch damit zu rechnen, dass thermische Anregung eintritt (САНА).

Diese Feststellungen bedeuten natürlich für die alte „Fünkchen-Theorie“ der spannungsabhängigen Karborundwiderstände auf den ersten Blick geradezu eine Stütze. Im folgenden Abschnitt sollen daher Versuche beschrieben werden, welche ihre Unhaltbarkeit erweisen.

7. Versuche zur Widerlegung der Gasentladungstheorie.

a) Schon die geringe Intensität der Leuchterscheinungen macht es unwahrscheinlich, dass ein nennenswerter Anteil des Stromes, der bei unseren Versuchen bis 600 Amp/cm^2 betrug, durch eine Gasentladung transportiert wird.

b) Abpumpen der Luft verändert weder den Charakter der Leuchteffekte noch die Strom-Spannungs-Charakteristik in irgend einer Weise. Dies bedeutet jedoch nur, dass die in den Hohlräumen des Widerstandes enthaltene Luft keinen messbaren Anteil an den Vorgängen hat und ist damit kein stichhaltiger Beweis gegen die Gasentladungstheorie. Durch die hohen Kontakttemperaturen und die dort entwickelte Wärme könnte genügend Dampf des Elektrodenmaterials erzeugt werden, um einen kleinen Lichtbogen zu unterhalten.

c) Aussichtsreicher sind Versuche mit hohen Fremdgasdrucken. Von Widerständen, die sich in einer Druckkammer mit 150 Atm. Stickstoff- bzw. Sauerstoff-Füllung befanden, wurden Charakteristiken aufgenommen. Bei solchen Drucken müsste sich eine Behinderung der Gasentladung infolge der Verkürzung der freien Weglänge der Ionen bemerkbar machen. Die Versuche zeigen aber das Gegenteil; die Leitfähigkeit der Widerstände nimmt unter Druck zu. Dies kann zum Teil durch die Erhöhung der Sublimationstemperatur des SiC mit steigendem Fremdgasdruck erklärt werden; es zeigen sich aber Sekundäreffekte von noch grösserem Einfluss. Es zeigt sich, dass die Leitfähigkeit der Widerstände sowohl im Stickstoff wie auch im Sauerstoff mit jedem Stromstoss, der durch den Widerstand fließt, bis zu einem Gleichgewichtszustand fortwährend zunimmt. Für Stickstoff ist die Zunahme stärker als für Sauerstoff. Nach dem Ablassen des Druckes bildet sich der Widerstand ebenfalls wieder langsam zurück. Wurde mit Stickstoff gearbeitet, so nimmt der Widerstand nach einigen Stößen unter Atmosphärendruck wieder seine ursprüngliche Charakteristik an. War jedoch das Füllgas Sauerstoff, so zeigte sich eine bleibende Veränderung, und zwar im Sinne einer verkleinerten Leitfähigkeit. Dieser Effekt ist einem verstärkten Oxydationsprozess der Kontaktstellen zuzuschreiben, der ihre Leitfähigkeit herabsetzt.

d) Durch Ausfüllen der Hohlräume zwischen den Körnern eines Widerstandes mit Öl, Benzol, Tetrachlorkohlenstoff, Paraffin oder Wachs wäre ebenfalls Behinderung der Entwicklung einer Gasentladung zu erwarten. Es zeigt sich aber, dass dies keinesfalls eintritt. Im Gegenteil ist infolge thermischer Zersetzung und Abscheidung von Kohlenstoff aus den organischen Füllstoffen eine bleibende Erhöhung der Leitfähigkeit zu beobachten.

e) Schliesslich wurden noch Versuche mit Magnetfeldern ausgeführt. Von einem Widerstand wurden Charakteristiken in longitudinalen und transversalen Feldern bis 15000 Gauss aufgenommen, wobei sich kein messbarer Einfluss zeigte. Wären Gasentladungen für die Charakteristik verantwortlich, so müsste sich gerade hier ein starker Einfluss zeigen.

Es muss gesagt werden, dass keiner der angeführten Versuche für sich *allein* die Gasentladungs-Hypothese zu widerlegen imstande ist. In ihrer Gesamtheit aber machen sie die hier vertretene Ansicht zur Gewissheit, dass der Anteil der Gasentladungen, deren Auftreten prinzipiell bejaht werden muss, am gesamten Stromtransport unwesentlich ist und damit für die Erklärung des Mechanismus der spannungsabhängigen Widerstände ausser Betracht fällt.

8. Phänomenologische Theorie der Hysteresis.

Ausgehend von der Erkenntnis, dass die thermischen Vorgänge an den Kontaktstellen der Karborundkörner bei hohen Stromstössen von so grosser Bedeutung sind, erhebt sich die Frage, ob die Strom-Spannungs-Charakteristik von der Art, wie sie in Fig. 16 abgebildet sind, nicht schon auf Grund thermischer Effekte *allein* verstanden werden kann. Wie der eine von uns¹⁾ gezeigt hat, ist dies nicht möglich. Eine phänomenologische Theorie, welche rein thermische Vorgänge an der Kontaktstelle zweier Karborundkörner voraussetzt, liefert für die Spannung u_k an der Kontaktstelle den Ausdruck

$$u_k(t) = \frac{t}{(ae^{\lambda T_0} + b) e^{\nu t} - b(\frac{1}{2} B^2 t^2 + Bt + 1) e^{-\beta t}} \quad (11)$$

wenn ein aperiodisch gedämpfter Stromstoss von der Form

$$i_k(t) = \alpha t e^{-\beta t} \quad (12)$$

durch den Kontakt geschickt wird und die Leitfähigkeit des stromdurchflossenen Materiales von der Temperatur in der von uns ex-

¹⁾ G. BUSCH, Habilitationsschrift E.T.H. 1942.

perimentell gefundenen Weise abhängt, d. h. durch die Formel beschrieben wird:

$$\sigma = \sigma_0 e^{\lambda T}$$

T_0 ist die Temperatur des Kontaktes zu Beginn des Stromstosses, a , b , p und B sind Konstanten, welche von der Masse des sich erwärmenden Stoffes und seiner spezifischen Wärme, der als konstant, vor allem als temperaturunabhängig angenommenen Abkühlungsgeschwindigkeit des Kontaktes und der Form des Stromstosses abhängen.

In Fig. 22 ist das Resultat der Elimination der Zeit t , d. h. die theoretische Strom-Spannungs-Kurve, wie sie auf Grund der rein thermischen Theorie zu erwarten ist, aufgezeichnet. Wie man sieht, wird der rückkehrende Ast der Charakteristik, sowohl in

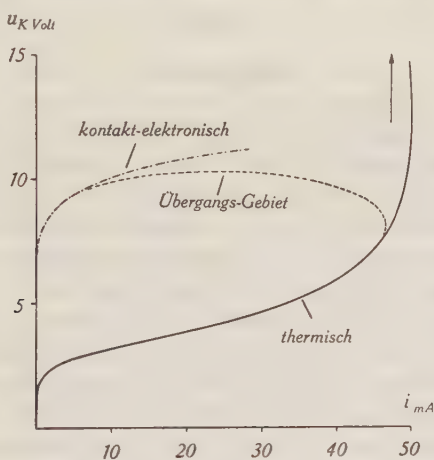


Fig. 22.

Theoretische Stoss-Charakteristik.

bezug auf die Form wie auch der Grössenordnung der absoluten Werte nach, gut wiedergegeben. Im aufsteigenden Teil der Charakteristik jedoch versagt die entwickelte Theorie, wie zu erwarten war, vollständig. Die berechneten Spannungswerte liegen viel zu hoch. Es wäre denkbar, dass dies eine Folge des sicher viel zu einfachen Ansatzes für die Abkühlung der Kontakte sei. Indessen zeigt sich, dass der Extremfall, nämlich ohne Abkühlung, das Resultat (fälschlicherweise!) verbessert, aber niemals richtig zu stellen vermag. Der Grund ist einfach darin zu suchen, dass für so kurzzeitige Stromstösse die Erwärmung der Kontakte viel zu langsam erfolgt, um schon zu Beginn des Vorganges eine ausrei-

chende Leitfähigkeit der Fremdschichten zu erzeugen. Die Vorgänge zu Beginn des Stromstosses sind eben *nicht thermischer Natur*, sondern müssen, wie sich nachträglich bestätigt, in den im Abschnitt III diskutierten Elektronenübergängen von Korn zu Korn infolge der hohen elektrischen Felder ihren Ursprung haben.

In Fig. 22 ist der aufsteigende Ast der Charakteristik eingetragen, wie er sich nach Formel (6) ergibt. Durch die gestrichelte Kurve ist die Verbindung zwischen dem „kontaktelektronischen“ und dem „thermischen“ Ast willkürlich hergestellt, mit der Meinung, dass in diesem *Übergangsgebiet* beide Erscheinungen in komplizierter Weise überlagert sind. Damit dürften die verwickelten Vorgänge, welche die eigentümliche Strom-Spannungs-Charakteristik der spannungsabhängigen Widerstände verursachen, im wesentlichen geklärt sein.

V. Schluss.

Wir wollen zunächst noch auf die in Abschnitt IV/4 aufgeworfene Frage zurückkommen, ob nach Einsatz des Stromes infolge der Feldwirkung das weitere starke Anwachsen der Leitfähigkeit der Widerstände durch die Zunahme der Leitfähigkeit der Fremdschichten oder durch thermische Emission bei erniedrigter Austrittsarbeit (Schottky-Effekt) verursacht wird. Eine vollständigere Theorie der Kontaktleitfähigkeit zeigt, dass die zweite Erklärung qualitativ wie auch quantitativ durchaus möglich ist. Theoretisch kann daher die Entscheidung nicht herbeigeführt werden. Es bleibt also der experimentelle Weg, der aber nicht einfach zu beschreiten ist. Ein entscheidendes Experiment würde darin bestehen, die Leitfähigkeit des Materials mit sehr kleinen Spannungen *während* des Durchgangs eines starken Stromstosses, besonders aber direkt *nach* Durchgang desselben, zu messen. Aus dem Abklingen der Leitfähigkeit könnte alsdann auf den Charakter derselben geschlossen werden.

Zum Schlusse möchten wir Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER für das grosse Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, sowie für viele Anregungen und Diskussionen herzlichst danken. Ebenso sind wir zu Dank verpflichtet: Herrn Prof. Dr. F. TANK für die Überlassung des Kathodenstrahl-Oscillographen, dem ALUMINIUMFONDS NEUHAUSEN für die finanzielle Hilfe, der Firma SPRECHER & SCHUH in Aarau dafür, dass sie uns den Stosskondensator zur Verfügung stellte, und schliesslich den Chemischen Fabriken und Elektrizitätswerken LONZA Basel, bzw. den GOTTHARDWERKEN in Bodio, die uns stets mit jedem gewünschten Untersuchungsmaterial versorgten.

Physikalisches Institut der E.T.H., Zürich.

Kernstreuung schneller Elektronen an Fluor und Stickstoff

von E. Bleuler.

(20. VIII. 1942.)

Zusammenfassung. Die elastische Kernstreuung schneller Elektronen an Fluor und Stickstoff wird in der Wilsonkammer gemessen. Die Streuquerschnitte sind um die Faktoren $1,35 \pm 0,2$ und $1,5 \pm 0,3$ grösser als die theoretischen Werte. Es wird eine Übersicht über die bisher vorliegenden Messungen der Streuung schneller Elektronen gegeben und in bezug auf systematische Abweichungen von der Theorie diskutiert.

§ 1. Einleitung.

Die Untersuchung der elastischen Streuung schneller Elektronen an Atomkernen hat den Zweck, Aufschluss über die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron zu geben. Bekanntlich lassen sich die durch die Elektronenhülle bedingten Erscheinungen erklären, wenn man annimmt, dass zwischen Elektron und Atomkern das Coulomb'sche Gesetz bis zu sehr kleinen Kernabständen (verglichen mit dem Atomdurchmesser) gilt. Unter der Annahme dieses Potentials hat MOTT¹⁾ den Wirkungsquerschnitt für elastische Kernstreuung nach der Dirac'schen Theorie berechnet. Eine Nichtübereinstimmung der experimentellen Resultate mit dieser Theorie würde auf eine zusätzliche Wechselwirkung hindeuten. In ähnlicher Weise sind ja aus den Abweichungen der Streuung von Protonen an Protonen gegenüber der Coulomb-Streuung zusätzliche Kräfte zwischen Protonen berechnet worden, welche sich z. B. durch einen Potentialtopf der Reichweite $\frac{e^2}{m_0 c^2}$ (klassischer Elektronenradius) und der Tiefe 11,3 MeV darstellen lassen (s. z. B. BREIT, THAXTON und EISENBUD²⁾).

Bei Elektronen ist die theoretische Deutung von Streuanomalien freilich schwieriger: Wegen ihrer grossen Wellenlänge werden sie von einer solchen Zusatzkraft kurzer Reichweite nicht merklich beeinflusst. Nach JAUCH³⁾ könnten zwar bei einzelnen Kernen resonanzartige Streuungen in einem derartigen Kraftfeld auftreten; bei den gleichen Elementen würden dann aber auch die Röntgen-terme stark verschoben. Das Fehlen der entsprechenden Unstetig-

keiten im Moseley-Diagramm der K-Linien spricht daher gegen diese Deutung von Streuanomalien. Die einzige Möglichkeit, Abweichungen der Streuung vom theoretischen Wert mit Hilfe eines statischen Zusatzpotentials zu erklären, wäre die Annahme von Kräften grösserer Reichweite $\left(10-20 \frac{e^2}{m_0 c^2}\right)$. Ihr Einfluss auf die Röntgenspektren könnte kaum festgestellt werden, da die durch sie bewirkte Verschiebung der Röntgenterme sich von einem Element zum andern nur wenig ändern würde, so dass sie nicht mit gleicher Sicherheit erkannt werden könnte wie sprunghafte Änderungen. Insofern als jedoch solche weitreichenden Kräfte unwahrscheinlich sind, ist die Annahme eines statischen Potentials unbefriedigend. Da auch die Wirkung des magnetischen Kernmomentes zu klein ist, um Streuanomalien zu erklären, müssten diese auf andere Kräfte unbekannter Art zurückgeführt werden.

Die bisherigen Experimente ergaben verschiedenartige Abweichungen von der Theorie (Zusammenstellung s. § 6). Besonders überraschende Ergebnisse wurden bei Untersuchungen der Streuung in Gasen mit Hilfe der Wilsonkammer gefunden. So wurde das Verhältnis von beobachtetem zu theoretischem Streuvermögen von KLARMANN und BOTHE⁴⁾ bei Krypton und Xenon zu 0,2, von BARBER und CHAMPION⁵⁾ bei Jod zu 0,4 und bei Quecksilber zu 0,15 gefunden. Andererseits sollte nach SKOBELZYN und STEPANOWA⁶⁾ der Streuquerschnitt von Stickstoff den theoretischen Wert weit übertreffen, bei Winkeln um 90° etwa um einen Faktor 70, ein Resultat, das von CHAMPION⁷⁾ nicht bestätigt wurde.

Da in Anbetracht der Wichtigkeit der Fragestellung weiteres experimentelles Material von Nutzen schien, wurde ein Reihe von Messungen mit einer Wilsonkammer begonnen. In einer ersten Arbeit fanden BOSSHARD und SCHERRER⁸⁾ bei Stickstoff ähnliche, wenn auch nicht so grosse Anomalien wie SKOBELZYN und STEPANOWA. Eine zweite Messung (SCHERRER und ZÜNTI⁹⁾) ergab einen ungefähr normalen Streuquerschnitt von Argon $\left(\frac{\sigma_{ex}}{\sigma_{th}} \approx 1,6\right)$. In der vorliegenden Arbeit wurde zunächst die Streuung an Fluorkernen untersucht. Sie erwies sich ebenfalls als annähernd dem theoretischen Wert entsprechend.

Im Verlaufe dieser Untersuchungen wurden neuere Messungen von RANDELS, CHAO und CRANE¹⁰⁾ an A, Kr, X und Luft bekannt, welche die früher gefundenen grossen Anomalien nicht bestätigten, vielmehr bei allen diesen Gasen eine den theoretischen Wert nur um einen Faktor 1,5 übersteigende Streuintensität ergaben. Ebenso massen BORISOV, BRAILOVSKI und LEIPUNSKI¹¹⁾ den Streuquer-

schnitt von N zu 63% des theoretischen Wertes bei Energien von 0,3—1,4 MeV und zu 93% bei 1,4—2,5 MeV. In Übereinstimmung damit wurde bei einer Neuvermessung der früheren Aufnahmen mit verbesserter Auswertetechnik, sowie anhand einer Reihe neuer Filme ein normales Verhalten der Streuung an Stickstoff festgestellt.

§ 2. Apparatur und Auswertung.

Für die Untersuchung wurde die Wilsonkammer benützt, welche in den frühern Arbeiten ausführlich beschrieben worden ist⁸⁾. Die Auswertung erfolgte nach dem Verfahren von SCHERRER und ZÜNTRI⁹⁾. Im besonderen wurde die sog. „Flimmereinrichtung“ beibehalten: Bei der stereoskopischen Rückprojektion der Aufnahmen schneidet ein rotierender Sektor den Strahlengang der beiden Bilder im Wechsel ab. Die richtige Stellung der beweglichen Projektionsebene zeigt sich dadurch, dass die Spur ruhig bleibt, während sie sich sonst hin- und herbewegt (flimmert).

Die Energie der Elektronen wurde aus der Krümmung der Bahnen in einem Magnetfeld von 480 Oersted berechnet. Bei ca. $\frac{1}{4}$ der Aufnahmen mit Fluor betrug das Feld nur 240 Oersted, da auch Bahnen mit kleiner Energie ausgemessen werden sollten. (Wie in § 4, 2. ausgeführt wird, macht die Vielfachstreuung jedoch diese Messungen gerade bei kleinen Energien unbrauchbar.) Radius und Länge der Bahnen wurden mit Hilfe einer Serie von Testkreisen, die auf Celluloid eingeritzt waren, bestimmt. Es erwies sich als unnötig, die Bahnen zuerst nachzuzeichnen. Die Messung der Krümmung durch Anpassen der Testkreise an die projizierten Bahnen selbst hat ausserdem den Vorteil, dass auch kleine Streuungen von $5\text{--}10^\circ$ sehr gut festgestellt werden können, während sie beim blossen Nachzeichnen übersehen werden, was die spätere Krümmungsmessung schwierig macht.

§ 3. Theoretische Streuintensität.

1. Theoretischer Wirkungsquerschnitt.

Die Streuung von Elektronen an Kernen wurde von MOTT¹⁾ nach der Dirac'schen Theorie berechnet. Die exakte numerische Auswertung führte er allerdings nur für Streuung an Au um einen Winkel von 90° durch, doch gab er für leichte Kerne eine Entwicklung nach $Z\alpha$ an $\left(\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{1}{137} = \text{Feinstrukturkonstante}\right)$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons der Geschwindigkeit βc um einen Winkel ϑ in den Raum-

winkel $d\omega$ im Coulombfeld eines Kernes der Ladung Ze beträgt danach:

$$d\sigma = \frac{d\omega}{4} \left(\frac{Ze^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \times \\ \left\{ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \pi \beta Z \alpha \sin \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \text{höhere Potenzen von } Z\alpha \right\}. \quad (1)$$

Nach einer neuern Rechnung von URBAN¹²⁾ ist MOTT dabei ein Fehler unterlaufen: im Term mit $Z\alpha$ muss der Faktor $\cos^2 \frac{\vartheta}{2}$ wegfallen. Im folgenden sei daher immer die Formel benützt:

$$d\sigma = \frac{d\omega}{4} \left(\frac{Ze^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left\{ 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \pi \beta Z \alpha \sin \frac{\vartheta}{2} + + \right\}. \quad (2)$$

Experimentell kann jedoch nur der Wirkungsquerschnitt für Streuung um einen Winkel, der zwischen zwei bestimmten Werten ϑ_1 und ϑ_2 liegt, gemessen werden:

$$\sigma(\vartheta_1, \vartheta_2) = \pi \left(\frac{Ze^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \times \\ \left\{ \cotg^2 \frac{\vartheta}{2} + 2 \beta^2 \ln \sin \frac{\vartheta}{2} + 2 \pi \beta Z \alpha \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} + + \left| \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right| \right\}. \quad (3)$$

Durchläuft ein Elektron eine Strecke L_0 in einem Medium mit N_i Kernen der Ladung $Z_i e$ im cm^3 , so erleidet es im Mittel $n(\vartheta_1, \vartheta_2) = N_i L_0 \sigma(\vartheta_1, \vartheta_2)$ Streuungen um einen Winkel zwischen ϑ_1 und ϑ_2 . Unter Vernachlässigung des Gliedes in $Z\alpha$ kann dies auch geschrieben werden:

$$n(\vartheta_1, \vartheta_2) = N_i Z_i^2 L_0 \sigma_H(\vartheta_1, \vartheta_2),$$

wo $\sigma_H(\vartheta_1, \vartheta_2)$ der Streuquerschnitt für Wasserstoff ist. Bei einer Mischung von Gasen, wie sie in der Wilsonkammer vorkommt, addieren sich die Streuintensitäten der verschiedenen Komponenten, und es wird

$$n(\vartheta_1, \vartheta_2) = \Sigma (N_i Z_i^2) L_0 \sigma_H(\vartheta_1, \vartheta_2). \quad (4)$$

Das dabei vernachlässigte lineare Glied in $Z\alpha$ wird am einfachsten durch Einführung einer Grösse $\sigma'_H(\vartheta_1, \vartheta_2)$ berücksichtigt, welche aus $\sigma_H(\vartheta_1, \vartheta_2)$ durch Anbringen der Korrektur mit einem Mittelwert Z_m — meistens genügt es, die Kernladung des überwiegenden Bestandteiles einzusetzen — entsteht.

Auch Formel (4) ist noch nicht direkt mit den experimentellen Resultaten vergleichbar, da nicht alle diese Streuungen beobachtet und ausgewertet werden können. Eine eingehende Diskussion dieser

Frage findet sich bei SCHERRER und ZÜNTI⁹). Im folgenden seien die wesentlichen Punkte jener Überlegungen kurz wiederholt.

2. Definition der messbaren Streuung.

Damit Streuwinkel und Energie der gestreuten Bahn mit genügender Sicherheit gemessen werden können, müssen die beiden Äste einer Streuung eine gewisse — je nach den Anforderungen an die Genauigkeit festzusetzende — Mindestlänge b haben. Bei der Wahl von b muss man eine Kompromisslösung zwischen zwei sich widerstrebenden Forderungen suchen: je grösser b ist, um so sicherer ist die Auswertung einer Streuung; je kleiner b gewählt wird, um so besser wird die Statistik der Ablenkungen, da ihre Anzahl mit wachsendem b rasch abnimmt. Im Anschluss an die früheren Arbeiten von BOSSHARD und SCHERRER⁸) und SCHERRER und ZÜNTI⁹) wird $b = 2$ cm festgesetzt. Der Streuwinkel kann dann auf $\pm 1^\circ$ genau gemessen werden, während die Energiebestimmung noch ziemlich unsicher ist (vgl. § 3, 5.).

Die Auswertung wird auch dann sehr fragwürdig, wenn die Streuebene stark geneigt ist, da sich in diesem Falle die optischen Verhältnisse wesentlich verschlechtern. Deshalb werden nur Streuungen ausgemessen, bei denen die Streuebene um weniger als 45° gegen die Horizontalebene geneigt ist. Dies ist schon deshalb notwendig, weil Streuungen um kleine Winkel ($< 30^\circ$), aber mit grosser Neigung der Streuebene, in der Projektion sehr klein erscheinen und daher leicht übersehen werden.

3. Berechnung der Zahl der messbaren Streuungen.

Infolge der obigen beiden Bedingungen ist nur ein gewisser Bruchteil aller Streuungen ausmessbar. Die Rechnungen von SCHERRER und ZÜNTI⁹) ergeben:

$$n(\vartheta_1, \vartheta_2) = L \bar{q}(\vartheta_1, \vartheta_2) \Sigma (N_i Z_i^2) \sigma_H'(\vartheta_1, \vartheta_2) \quad (5)$$

L ist eine reduzierte Bahnlänge: Die ersten zwei cm jeder Bahn und sämtliche Bahnelemente, die weniger als zwei cm von der Wand entfernt sind, werden nicht berücksichtigt, da eine in ihnen vorkommende Streuung nicht messbar wäre. $\bar{q}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ trägt der Verminderung der Zahl der Streuungen durch die geringe Tiefe der Kammer (1 cm) Rechnung.

Tabelle I.

Bereich	$15^\circ-20^\circ$	$20^\circ-30^\circ$	$30^\circ-60^\circ$	$60^\circ-180^\circ$
$\bar{q}(\vartheta_1, \vartheta_2)$	0,390	0,349	0,258	0,183

4. Unelastische Streuungen.

a) Unelastische Streuungen an den Hüllenelektronen sind an der dabei entstehenden Gabelung der Spur erkennbar und können daher leicht ausgeschieden werden.

b) Unelastische Streuungen am Atomkern mit Aussendung von Bremsstrahlung sollten an und für sich daran festgestellt werden können, dass die Energie des Elektrons nach dem Stoss kleiner ist als vorher. Auf diese Weise haben verschiedene Autoren gefunden, dass Streuungen mit grossem Energieverlust häufiger sind, als nach der Theorie von BETHE und HEITLER¹³⁾ zu erwarten ist (⁴⁾⁵⁾¹⁴⁾¹⁵⁾ u. a.).

Die Trennung elastischer und unelastischer Kernstreuungen ist jedoch ziemlich schwierig, da das streuende Gas die Genauigkeit der Energiemessung beeinträchtigt.

5. Genauigkeit der Energiemessung.

a) Da das Elektron beim Durchgang durch das Gas infolge Ionisation ständig Energie verliert, nimmt die Krümmung der Spur stetig zu. Bei den untersuchten Energien (0,2—3,1 MeV) und den benutzten Gasen ist dieser Energieverlust indessen zu vernachlässigen, weil er nur 1000—2000 eV pro cm Weg beträgt.

b) Ein grösserer Fehler entsteht infolge kleiner elastischer Streuungen, welche nicht als solche erkannt werden, sondern nur Unregelmässigkeiten in der Krümmung verursachen. Dies ist eine ähnliche Erscheinung wie die bekannte Vielfachstreuung in Folien. Während jedoch hier einzelne kleine Streuungen sich zu einer grossen Ablenkung zusammensetzen und somit die Winkelverteilung der Streuungen verfälschen, geben sie bei Untersuchungen mit der Wilsonkammer nur zu einer Änderung der Krümmung der Bahn, also zu einer falschen Energiebestimmung Anlass. Es ist schwierig, theoretisch abzuschätzen, wie gross dieser Fehler bei der verwendeten Methode der Krümmungsmessung mittels Testkreisen ist. Dagegen lässt er sich gut berechnen, falls die Krümmung dadurch bestimmt wird, dass man den Winkel zwischen den Tangenten an beiden Bahnenden misst und durch die Länge der Bahn dividiert. Praktisch ist diese theoretisch einwandfreieste Methode nicht gut durchführbar, lässt sich aber angenähert dadurch verwirklichen, dass man an beiden Enden der Bahn Sehnen von etwa 1 cm Länge abträgt, auf diesen die Mittelsenkrechten errichtet und ihren Schnittpunkt als Mittelpunkt des Krümmungskreises annimmt. Diese Methode ist zwar, auch bei Verwendung geeigneter Schablonen, zeitraubender und mühsamer als die Auswertung mit

Hilfe der Testkreise, dafür aber objektiver und bei sorgfältiger Ausführung genauer (vgl. ZUBER¹⁶). Deshalb wurden die Streuungen auf diese Weise ausgemessen, während das Energiespektrum nach der Testkreismethode bestimmt wurde. Indessen ergaben Kontrollmessungen an 250 Spuren übereinstimmende Resultate mit beiden Verfahren, so dass die Anwendung der im folgenden skizzierten Theorie berechtigt ist.

WILLIAMS¹⁷) hat seine Theorie der Vielfachstreuung an Folien auf das Problem der Energiemessung in der Wilsonkammer angewendet: Der Winkel zwischen den beiden Tangenten an den Enden einer Bahn der Länge l wird durch die vielen kleinen Einzelstreuungen um einen Betrag Θ geändert, welcher im wesentlichen gleich gross ist wie die Ablenkung einer Bahn beim Durchgang durch eine Folie der entsprechenden Dicke. Dies bewirkt einen Fehler in der Krümmungsbestimmung von

$$k_s = \frac{\Theta}{l}$$

Nach WILLIAMS folgt die Wahrscheinlichkeit für eine zusätzliche Krümmung k_s einer Gauss'schen Verteilung:

$$W(k_s) dk_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\kappa} e^{-\frac{k_s^2}{2\kappa^2}} dk_s. \quad (6)$$

Dabei ist κ^2 das mittlere Quadrat der Krümmungsänderung und es gilt

$$\kappa = \sqrt{2\pi} \frac{e^2}{m_0 c^2} \frac{\sqrt{\Sigma(N_i Z_i^2)}}{\sqrt{l}} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2} \alpha_m = \sqrt{2\pi} \frac{e}{H_0} \frac{\sqrt{\Sigma(N_i Z_i^2)}}{\beta \sqrt{l}} \alpha_m$$

wo α_m eine mit β, l und $\Sigma(N_i Z_i^2)$ nur langsam veränderliche Grösse ist. Die mittlere relative Krümmungsänderung ergibt sich zu

$$\frac{\kappa}{k_0} = \frac{1}{H} \sqrt{2\pi} \frac{e}{\beta} \frac{\sqrt{\Sigma(N_i Z_i^2)}}{\sqrt{l}} \alpha_m = \frac{H_s}{H} \quad (7)$$

H_s ist dasjenige Magnetfeld, welches eine gleiche zusätzliche Krümmung bewirken würde wie die Vielfachstreuung und hängt nicht von H ab. Die Bedingung für eine genaue Energiemessung ist also: $H \gg H_s$. In Tabelle II sind die wichtigsten Grössen dieser Theorie für das bei den Messungen an Fluor benützte Gasgemisch ($\Sigma(N_i Z_i^2) = 17,5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$) berechnet. ($H = 480$ Oersted.)

Als Längen sind hierbei die experimentell gefundenen mittleren Bahnlängen in die Rechnung eingesetzt worden. Die 3. Spalte gibt die mittlere Grösse ϑ_m der die Vielfachstreuung bewirkenden kleinen Ablenkungen, die 4. Spalte ihre mittlere Anzahl n . Damit die statistische Behandlung des Problems exakt ist, muss $n \gg 1$ sein. Nach WILLIAMS beträgt indessen der Fehler in der Berechnung von α nur wenige Prozent für $n = 10$. In der letzten Spalte ist der mit Hilfe der Beziehung $E = f(k)$ berechnete mittlere Fehler in der Bestimmung der kinetischen Energie angegeben.

Tabelle II.

E MeV	$l = l_m$ cm	ϑ_m	n	α_m	H_s Oe.	$\frac{\alpha}{\kappa_0} = \frac{H_s}{H}$	$\frac{\Delta E}{E}$
0,1	4	3,6°	15	2,3	104	0,21	0,4
0,25	6	2,2°	12	2,2	60	0,13	0,2
0,5	7,5	1,4°	11	2,1	46	0,10	0,14
1	9	0,9°	11	2,1	38	0,08	0,11
2,5	10	0,4°	11	2,1	34	0,07	0,08

Aus der Tabelle ist sofort ersichtlich, wie schwierig eine Unterscheidung von elastischen und unelastischen Stössen ist. Eine rohe Abschätzung, bei welcher die Gültigkeit der Theorie auch für kleinere Längen angenommen wird, mag dies erläutern: Es sei eine elastische Streuung gegeben, deren beide Äste die Längen l_1 und l_2 haben, während ihre Krümmungen zu k_1 und k_2 gemessen werden. Die mittlere Krümmung sei durch $\bar{k} = \frac{l_1 k_1 + l_2 k_2}{l_1 + l_2}$ definiert. (Dies ist das Mittel aller möglichen Werte der wahren Krümmung k bei gegebenen k_1 und k_2 .) Damit unelastische Streuungen ausgeschieden werden können, darf der mittlere Krümmungsunterschied der beiden Bahnstücke, der durch die Vielfachstreuung bewirkt wird, nicht zu gross sein. Es gilt:

$$(k_2 - \bar{k}_1)^2 = (\bar{k}_2 - \bar{k})^2 + (\bar{k}_1 - \bar{k})^2.$$

Aus Gleichung (7) folgt annähernd

$$\left(\frac{k_2 - k_1}{\bar{k}} \right)^2 = \left(\frac{H_s}{H} \right)^2 \left(\frac{l_m}{l_1} + \frac{l_m}{l_2} \right) = \left(\frac{H_s}{H} \right)^2 \frac{l_m}{\bar{l}}$$

mit

$$\bar{l} = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}.$$

Nimmt man z. B. $l_1 = l_2 = 5$ cm an, so ergibt sich für eine Bahn von 1 MeV eine mittlere relative Krümmungsänderung von

$$\frac{\sqrt{(k_2 - k_1)^2}}{\bar{k}} = 0,15.$$

Damit von einer Streuung mit Sicherheit behauptet werden kann, dass sie unelastisch sei, muss die relative Krümmungsänderung das Dreifache dieses Wertes, also rund 50% sein, was einem Energieverlust von gleicher Grösse entspricht.

Wenn auch unelastische Streuungen mit kleinerem Energieverlust festgestellt werden sollen, muss das Magnetfeld vergrössert werden. Im angeführten Beispiel wäre für die sichere Messung einer Krümmungsänderung von 20% ein Magnetfeld von ca. 1100 Oersted erforderlich. Dabei würde aber der Radius der betrachteten Spuren nur noch 4,3 cm, ein Wert, der für die Auswertung schon unangenehm klein ist und sich mit der Annahme $l_1 = l_2 = 5$ cm nur schlecht vereinbaren lässt. Die einzige gangbare Möglichkeit für die genaue Untersuchung unelastischer Streuungen in Gasen mit Hilfe der Wilsonkammer ist die Verkleinerung der Vielfachstreuung durch Herabsetzen des Streuvermögens des Gases, was aber die Messung der Einzelstreuungen sehr langwierig macht, da ihre Zahl quadratisch mit der Vielfachstreuung abnimmt.

6. Einfluss der Vielfachstreuung auf das Spektrum der Elektronen.

Es ist von Interesse, sich zu überlegen, in welcher Weise wegen der Vielfachstreuung das gemessene Spektrum der Elektronen vom tatsächlichen abweicht. Wenn $L(\varrho) d\varrho$ die Bahnlänge aller Bahnen mit wahren Krümmungsradien zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ ist, so folgt für das gemessene Spektrum $L_g(\varrho)$ aus einfachen Rechnungen:

$$L_g(\varrho) = L(\varrho) \left[1 + \left(\frac{H_s}{H} \right)^2 \left(3 + \frac{3\varrho}{L(\varrho)} \cdot \frac{dL(\varrho)}{d\varrho} + \frac{\varrho^2}{2L(\varrho)} \cdot \frac{d^2L(\varrho)}{d\varrho^2} \right) \right]. \quad (8)$$

Die Korrektur wird überraschend gross. Sie schwankt für die Messungen an Fluor zwischen - 25% für die grössten und + 25% für die kleinsten untersuchten Energien.

7. Einfluss der Vielfachstreuung auf die Zahl der zu erwartenden Streuungen.

Durch die Verfälschung der Energiemessung infolge der Vielfachstreuung entsteht einerseits eine zusätzliche statistische Schwankung, andererseits ein systematischer Fehler: Da die wirkliche En-

ergie der Elektronen teils grösser, teils kleiner als die gemessene ist, weicht auch der Streuquerschnitt infolge seiner starken Energieabhängigkeit von dem aus der gemessenen Energie berechneten Werte ab. Um die Korrektur zu berechnen, schreibt man den Wirkungsquerschnitt [Gl. (3)] zweckmässig in Funktion von ϱ statt von β : Bei Vernachlässigung des Gliedes in $Z\alpha$ erhält man eine Abhängigkeit

$$\sigma(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2) = Z^2 \left(\frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{\varrho^4} \right).$$

Eine elementare Rechnung ergibt, dass die Zahl der zu erwartenden Streuungen sich infolge der Vielfachstreuung um einen Bruchteil ε erhöht, wo

$$\varepsilon = - \left(\frac{H_s}{H} \right)^2 \left(\frac{3 A \varrho^2 + 2 B}{A \varrho^2 + B} + \frac{2 \varrho}{L_\sigma(\varrho)} \cdot \frac{dL_\sigma(\varrho)}{d\varrho} \cdot \frac{A \varrho^2 + 2 B}{A \varrho^2 + B} \right). \quad (9)$$

Für kleine Energien kann ε sehr gross werden, da $\frac{H_s}{H}$ mit abnehmender Energie rasch wächst (vgl. § 4, 2, Fig. 3).

8. Berechnung der Streuungen in einem endlichen Energiebereich.

Die Gesamtlänge der Bahnen, deren gemessene Krümmungsradien zwischen $\varrho_0 - \frac{\Delta\varrho}{2}$ und $\varrho_0 + \frac{\Delta\varrho}{2}$ liegen, sei $L_\sigma(\varrho_0)$. Nach Gl. (5) und (9) wird dann die theoretische Zahl der Streuungen

$$n_{\text{th}}(\varrho_0, \vartheta_1, \vartheta_2) = \bar{q}(\vartheta_1, \vartheta_2) L_\sigma(\varrho_0) \Sigma(N_i Z_i^2) \cdot \sigma'_H(\varrho_0, \vartheta_1, \vartheta_2) \times (1 + \varepsilon + \delta), \quad (10)$$

wo

$$\delta = \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{3 A \varrho_0^2 + 10 B}{A \varrho_0^2 + B} - \frac{2 \varrho_0}{L_\sigma(\varrho_0)} \cdot \frac{dL_\sigma(\varrho_0)}{d\varrho_0} \cdot \frac{A \varrho_0^2 + 2 B}{A \varrho_0^2 + B} \right)$$

die Korrektur für die endliche Breite $\Delta\varrho$ des Intervalles ist. Sie ist bei diesen Messungen im allgemeinen kleiner als 1% ($\Delta\varrho/\varrho_0 = 0,11-0,17$) und erreicht erst am steil abfallenden Ende des Spektrums grössere Werte von 5—25%.

§ 4. Messungen an Fluor.

1. Experimentelles.

Zur Untersuchung der Streuung an Fluorkernen muss die Wilsonkammer mit einem fluorhaltigen Gas gefüllt werden. Am besten eignet sich hiezu die einfachste gesättigte Kohlenstoffverbindung CF_4 (Tetrafluorkohlenstoff), im Normalzustand ein farbloses Gas. Infolge des geringen Gehaltes an andern Kernen (nur 1 C-Kern auf 4 F-Kerne) kann aus Streumessungen an CF_4 mit grosser Sicherheit auf die Streuung an Fluor selbst geschlossen werden. Während die meisten Fluorverbindungen chemisch aktiv sind, reagiert CF_4 bei Zimmertemperatur nicht mit Metallen und ist praktisch unlöslich in Wasser und Alkohol. Die wichtigsten physikalischen Daten sind:

Siedepunkt: 145° abs.

Schmelzpunkt: ca. 80° abs.

Dampfdruck bei der Temperatur der flüssigen Luft: 0,1 mm Hg.

Spezifische Wärme bei 25° : $C_v = 12$ cal/Mol (EUCKEN und BERTRAM¹⁸)).

Infolge der grossen Molekularwärme kann eine Wilsonkammer nicht mit CF_4 allein gefüllt werden (BRETSCHER und FEATHER¹⁹)). Die bei der Expansion entstehende Abkühlung berechnet sich nämlich aus der Beziehung

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{R}{C_v}},$$

wobei T_1 und T_2 die Temperaturen des Gases vor und nach der Expansion sind und V_2/V_1 das Expansionsverhältnis bedeutet. Je grösser die spezifische Wärme C_v , um so stärker muss daher das Gas expandiert werden, um die für die Kondensation des Dampfes notwendige Temperaturerniedrigung zu erzeugen. Zur Verkleinerung der mittleren spezifischen Wärme muss ein Edelgas beigelegt werden ($C_v = 3$ cal/Mol). Da dieser Zusatz ein möglichst kleines Streuvermögen (kleine Atomnummer) haben soll, kommt nur He in Betracht. Bei einer Mischung von zwei Volumteilen He mit einem Teil CF_4 wird die mittlere Molekularwärme $\bar{C}_v = 6$ cal/Mol; zur Erreichung guter Spuren wurde bei dieser Füllung der Kammer ein Expansionsverhältnis von 1,375 benötigt.

Für die Messungen standen 5 Liter CF_4 unter Atmosphärendruck zur Verfügung. Um das Gas von allfälligen Beimischungen von Luft zu befreien, wurde es in einem Kühlgefäss, das in flüssige Luft tauchte, kondensiert, und der nicht verflüssigte, sehr kleine Rest des Gases abgepumpt. Das Molekulargewicht des aus dem

Kondensat verdampften Gases wurde durch Wägung eines bekannten Volumens zu $87,2 \pm 0,9$ g gemessen, in guter Übereinstimmung mit dem Sollwert 88,0 g von CF_4 .

Zur Füllung wurde die Kammer mit Wasserstoff durchgespült und evakuiert. Durch Verdampfen einer Mischung von gleichen Teilen Wasser und Äthylalkohol aus einem an der Pumpleitung angebrachten Vorratsgefäß wurde sie hierauf mit dem für die Tröpfchenbildung notwendigen Dampf bis zum Sättigungsdruck gefüllt. Dann wurde eine geeignete Menge CF_4 aus dem Kühlgefäß in die Kammer hinein verdampft und schliesslich das Helium beigelegt, welches beim Eintritt durch ein mit Wasser und Alkohol gefülltes U-Rohr strömte und so durch Mitreissen von kleinen Tröpfchen die Übersättigung sicherstellte. Das Helium stammte von der Ohio Chemical and Manufacturing Company, Cleveland, und ist nach Angabe der Firma zu 98,2% rein. Es war unmöglich, Angaben über die Natur der Beimengungen zu erhalten. Einer Arbeit von HANSEN²⁰⁾ über die Gewinnung von He aus Erdgasen ist jedoch zu entnehmen, dass sie zur Hauptsache aus N_2 bestehen.

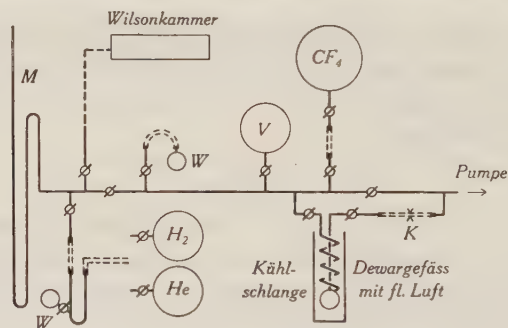


Fig. 1. Abfüllvorrichtung.

—— Glasrohr ---- Kupferrohr Gummischlauch

M = Manometer.

W = Vorratsgefäß mit Wasser + Alkohol.

K = Klemmhahn, mit dessen Hilfe die Kammer langsam durch die Kühlschlange ausgepumpt werden kann, so dass das CF_4 ausfriert und wieder zurückgewonnen wird (§ 4, 3.).

V = Vorratsgefäß für das zurückgewonnene CF_4 .

Das Gasgemisch der Kammer bestand bei einer mittleren Temperatur von 21° aus folgenden Bestandteilen:

CF_4	187 mm Hg	Diese Werte sind einer Arbeit von GAUTIER und RUARK ²¹⁾ entnommen.
He	358 mm Hg	
N_2	7 mm Hg (Verunreinigung des He)	
H_2O	16 mm Hg	
$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	23 mm Hg	

Das sind die vor der Expansion gemessenen Partialdrucke. Da jedoch nur solche Elektronen scharfe Spuren erzeugen, die in das schon expandierte Gas hineingeschossen werden, ist für die Berechnung der Streuung eine um das Expansionsverhältnis ($V_2/V_1=1,375$) kleinere Zahl der streuenden Kerne einzusetzen. In Tabelle III ist die Zahl N_i der Kerne und die für das Streuvermögen charakteristische Grösse $N_i Z_i^2$, sowie der prozentuale Anteil am Gesamtstreuvermögen für die einzelnen Kernsorten zusammengestellt.

Tabelle III.

Kern	N_i	$N_i Z_i^2$	$\frac{N_i Z_i^2}{\Sigma(N_i Z_i^2)}$
F	$17,9 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$	$14,5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$	82,5%
C	5,6 „	2,0 „	11,5%
O	0,9 „	0,6 „	3,5%
He	8,6 „	0,3 „	2%
N	0,2 „	0,1 „	0,5%
H	4,1 „	0,04 „	—

Die für die Streuung massgebende Summe $\Sigma(N_i Z_i^2)$ nimmt den Wert $17,5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ an, wobei auf die Streuung an Fluorkernen selbst 82,5% fallen.

2. Ergebnisse.

Bei einem Magnetfeld von 480 Oersted wurden auf 1620 Aufnahmen rund 870 m, bei einem Feld von 240 Oersted auf 450 Photographien 190 m sichtbare Spuren (L_0) ausgemessen. Fig. 2

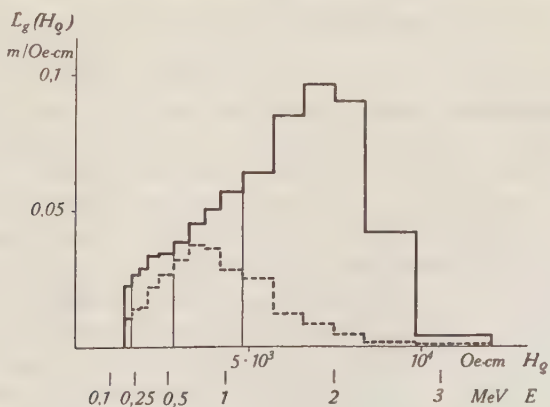


Fig. 2.

——— $H = 480$ Oersted - - - - $H = 240$ Oersted

zeigt das für die theoretische Berechnung zu verwendende Spektrum $L_0(H_0)$ (nach Abzug der in § 3, 3 erwähnten Bahnelemente). Die Unterteilungen im Spektrum entsprechen der Zusammenfassung der Resultate in grössere Energiebereiche. Die Form des Spektrums ist nicht durch die Energieverteilung der Elektronen des $Ra(B+C)$, sondern durch die experimentelle Anordnung, vor allem durch die Einstellung der Elektronenlinse, bedingt. Diese wurde so gewählt, dass möglichst viele Teilchen mit grossem H_0 gemessen wurden, damit auch bei Energien über 1 MeV trotz des kleinen Wirkungsquerschnittes eine genügende Zahl von Streuungen beobachtet werden konnte.

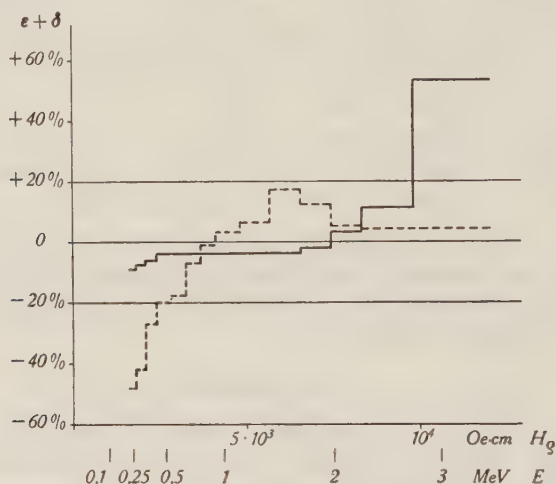


Fig. 3.

———— $H = 480$ Oersted. - - - - $H = 240$ Oersted.

Fig. 3 zeigt die in § 3, 7, 8 berechneten Korrekturen $\varepsilon + \delta$ für die Magnetfelder 480 und 240 Oersted. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, wie stark die Korrektur für kleine Felder und kleine Energien ansteigt. Setzt man fest, dass sie kleiner als 20% sein soll (da sie nur in erster Näherung berechnet worden ist), so sind bei den Messungen mit 240 Oersted Bahnen mit Energien unter 0,5 MeV auszuschliessen. Die Erfassung kleiner Energien durch Anwendung eines kleinen Magnetfeldes ist also unmöglich, wenn nicht gleichzeitig das Streuvermögen des Gases entsprechend herabgesetzt wird. Immerhin scheint es bemerkenswert, dass in diesem, im folgenden nicht berücksichtigten Energiebereich, bei welchem die Korrektur im Mittel - 30 bis - 40% betragen sollte, die Zahl der gefundenen Streuungen tatsächlich nur etwa 60% des unkorri-

gierten theoretischen Wertes betrug. Die grosse Korrektur für $E > 2,5$ MeV dagegen ist belanglos, da dieser Bereich wegen der kleinen Bahnlänge sehr wenig zum mittleren Streuquerschnitt beiträgt.

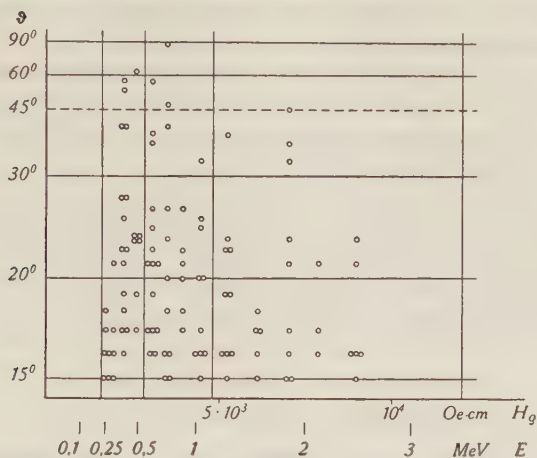


Fig. 4.

Tabelle IV.

Winkel		15°—20°	20°—30°	30°—60°	60°—180°	15°—180°
Energie						
0,2—0,5 MeV L = 39 m	n_{ex}	14,5	11	4	1	30,5
	n_{th}	12,4	7,9	3,4	0,5	24,2
	$\frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$	1,2	1,4	1,2	2	$1,3 \pm 0,2$
0,5—1,1 MeV L = 166 m	n_{ex}	18,5	15	6	1	40,5
	n_{th}	14,0	9,0	3,8	0,5	27,3
	$\frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$	1,3	1,7	1,6	2	$1,5 \pm 0,2$
1,1—3,1 MeV L = 424 m	n_{ex}	18,5	8	4	0	30,5
	n_{th}	10,7	6,9	2,8	0,4	20,8
	$\frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$	1,7	1,2	1,4	—	$1,5 \pm 0,3$
0,2—3,1 MeV L = 629 m	n_{ex}	51,5	34	14	2	101,5
	n_{th}	37,1	23,8	10,0	1,4	72,3
	$\frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$	1,4	1,4	1,4	1,4	$1,4 \pm 0,1$
		$\pm 0,2$	$\pm 0,2$	$\pm 0,4$		

In Fig. 4 sind die gemessenen Streuungen mit den Parametern ϑ und $H\varrho$, bzw. E , eingetragen. Die Unterteilung in Energiegruppen erfolgte so, dass auf jeden Bereich ungefähr gleich viele Streuungen fallen, diejenige nach Winkelbereichen ist gleich wie in früheren Arbeiten (⁷ ⁸ ⁹)).

In Tabelle IV werden Theorie und Experiment verglichen.

Streuungen, welche auf der Grenze zweier Intervalle liegen, sind je zur Hälfte beiden Bereichen zugeordnet. (Daher die halbzahligen experimentellen Werte.)

Sowohl die Abhängigkeit des Streuquerschnittes von der Energie (letzte Kolonne) als auch diejenige vom Winkel (letzte Zeile) wird durch die Mott'sche Theorie richtig wiedergegeben. Dagegen ist die beobachtete Streuintensität für alle Bereiche etwas grösser als der berechnete Wert, und zwar im Mittel um den Faktor

$$1,4.$$

3. Diskussion der Fehler.

Für eine Verfälschung der Resultate kommen folgende Fehlerquellen in Betracht:

- a) Statistische Schwankungen.
- b) Veränderung der Kammerfüllung während der Messung.
- c) Fehler in der geometrischen Korrektur.
- d) Ungenauigkeit der Messung des Magnetfeldes.
- e) Unelastische Streuungen.
- f) Unsicherheit in der Berechnung der Vielfachstreuung.
- g) Subjektive Fehler.

a) Statistische Schwankungen.

Für den Mittelwert des Streuquerschnittes über alle Energien und Winkel beträgt der mittlere relative Fehler

$$\frac{\sqrt{\Delta n_{\text{ex}}^2}}{n_{\text{ex}}} \sim \frac{\sqrt{n_{\text{ex}}}}{n_{\text{ex}}} = 10\%.$$

b) Veränderung der Kammerfüllung während der Messung.

Es ist nicht anzunehmen, dass sich der CF_4 -Gehalt während der Messung geändert hat, weil die Kammer vakuumdicht war, der Druck sich während der Messperioden (2×14 Tage) nicht änderte und das Expansionsverhältnis konstant blieb, was nicht der Fall gewesen wäre, wenn ein Teil des CF_4 z. B. durch Luft ersetzt worden wäre. Ausserdem wurde nach Beendigung der Aufnahmen die Kammer sehr langsam durch eine in flüssige Luft getauchte Kühlschlange ausgepumpt, wobei das CF_4 zum grössten

Teil kondensierte. Es konnten so 85% des ursprünglich eingefüllten CF_4 zurückgewonnen werden. Dies ist eine weitere Bestätigung dafür, dass sich der Kammerinhalt nicht wesentlich geändert hat.

Der Fehler in der Berechnung von $\Sigma(N_i Z_i^2)$, welcher durch Schwankungen von Temperatur und Expansionsverhältnis, sowie durch Verunreinigungen entsteht, kann auf höchstens $\pm 2\%$ geschätzt werden.

c) Fehler in der geometrischen Korrektur.

Die in § 3, 3 berechnete Wahrscheinlichkeit $\bar{q}(\vartheta_1, \vartheta_2)$, eine vor kommende Streuung messen zu können, hängt stark von der Tiefe d der belichteten Schicht ab. Nach Beendigung der Aufnahmen wurden Streifen von Kopierpapier in verschiedene Teile der Kammer gebracht und belichtet. Die Dicke des Lichtbündels wurde so zu $d = 10 \pm 0,5$ mm gemessen. Eine Schwankung von d um 0,5 mm ergibt für $\bar{q}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ im Mittel eine Unsicherheit von $\pm 5\%$.

d) Ungenauigkeit der Messung des Magnetfeldes.

Die Ungenauigkeit in der Bestimmung des Feldes (Eichfehler, Spannungsschwankungen) beträgt etwa $\pm 2\%$, was einer Unsicherheit von $\pm 5\%$ für den mittleren Streuquerschnitt entspricht.

e) Unelastische Streuungen.

Die Zahl n_{unel} der nach BETHE und HEITLER¹³⁾ zu erwartenden unelastischen Streuungen beträgt für eine mittlere Energie von 1,5 MeV:

Energieverlust . .	10%	20%	50%
n_{unel}	2	1	0,3

Ein Versuch, diese unelastischen Stöße festzustellen, muss, wie in § 3, 4, 5 ausgeführt, fehlschlagen. Eine Statistik der Streuungen, die auf den mit $H = 480$ Oersted gemachten Aufnahmen gefunden wurden, ergibt folgendes Bild:

Tabelle V.

Energieabnahme				
$\frac{k_2 - k_1}{\bar{k}}$	>0,3	0,2—0,3	0,1—0,2	0—0,1
n_{ex}	5,5	3,5	10	20
Energiezunahme				
$\frac{k_1 - k_2}{\bar{k}}$	>0,3	0,2—0,3	0,1—0,2	0—0,1
n_{ex}	4	9	12	20

Diese Verteilung der relativen Krümmungsänderungen lässt sich annähernd durch eine Gauss'sche Kurve mit dem Mittelwert

$$\frac{\sqrt{(k_2 - k_1)^2}}{\bar{k}} = 0,2$$

darstellen. Die mittlere Länge der gestreuten Bahnen beträgt nur 2,8 cm, da die bei der angewandten Messmethode (vgl. § 3, 5) in Betracht kommende Länge zwischen den Mittelpunkten der abgetragenen Sehnen kleiner ist als die sichtbare Länge der Spuren. Eine rohe Extrapolation der in § 3, 5 skizzierten Theorie der Vielfachstreuung, welche bei diesen kleinen Längen nicht mehr genau ist, ergäbe für die mittlere Abweichung den Wert

$$\frac{\sqrt{(k_2 - k_1)^2}}{\bar{k}} = 0,21$$

in guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

Aus den Zahlen der Tabelle V ist zu schliessen, dass es im vorliegenden Falle unmöglich ist, unelastische Streuungen festzustellen. Selbst wenn der Wirkungsquerschnitt für unelastische Stösse den theoretischen Wert um das 5-fache übersteigen sollte, wären nur ca. 8 Streuungen zu erwarten, bei denen die Krümmung um mehr als 10% zunimmt, während die Zahl der durch die Vielfachstreuung verursachten scheinbar unelastischen Stösse derselben Art rund 20 beträgt. Deshalb wurden sämtliche ausgemessenen Streuungen berücksichtigt. Eine Subtraktion der nach der Theorie berechneten Stösse mit Energieverlust über 10% (sofern sie zu Streuungen um Winkel über 15° Anlass gäben) würde den gefundenen mittleren Streuquerschnitt um 2% verkleinern. Eigentlich sollte man sämtliche Streuungen subtrahieren, welche mit Aussendung von Bremsstrahlung, auch bei beliebig kleiner Quantenenergie, verbunden sind. Bekanntlich divergieren jedoch alle Theorien der Bremsstrahlung für kleine Energieverluste. Mott²²⁾ glaubt aber, dass der Wirkungsquerschnitt für Streuung um einen bestimmten Winkel bei Berücksichtigung der Strahlungskräfte um höchstens 2—3% grösser wird.

f) Unsicherheit in der Berechnung der Vielfachstreuung.

Die Theorie von WILLIAMS¹⁷⁾ ist von mehreren Autoren experimentell nachgeprüft worden. Nach den neuesten Messungen von KULCHITSKY und LATYSHEV²³⁾ ist die Breite der Gaussverteilung bis etwa $Z = 50$ um 3—4%, für schwere Kerne um 10—14% kleiner als nach WILLIAMS. Da in die in § 3, 7 berechnete Korrektur das

mittlere Quadrat der Ablenkungen eingeht, ist sie um 6—8% zu gross. Der Fehler kann aber — bei einer Gesamtkorrektur von 4% für den mittleren Wirkungsquerschnitt — vernachlässigt werden.

g) Subjektive Fehler.

Es ist ausserordentlich schwierig, die Fehler abzuschätzen, die durch die Unzuverlässigkeit oder Voreingenommenheit des Beobachters bei der Auswertung der Aufnahmen entstehen können. Es betrifft dies folgende Punkte:

1. Bestimmung der Bahnlänge. Bei der in § 3, 3 angegebenen Berechnung der messbaren Streuungen ist vorausgesetzt worden, dass die Wahrscheinlichkeit, eine in einem Bahnelement möglicherweise vorkommende Streuung messen zu können, nicht von der Qualität der Spur abhängt. Dies ist jedoch nicht von vornherein sicher. Auch bei Nichtberücksichtigung aller diffusen Spuren — die bei diesen Messungen ziemlich selten waren — finden sich auf den meisten Aufnahmen Bahnen von verschiedener Stärke, je nach dem Zeitpunkt, in welchem das Elektron in das Gas hineingeschossen wurde. Es entsteht daher die Frage, welche Bahnen gezählt werden sollen und welche nicht. Die Entscheidung ist naturgemäss subjektiv. Ihre Richtigkeit lässt sich in gewissem Masse dadurch überprüfen, dass man zwei getrennte Statistiken aufstellt, einerseits für solche Bahnen, bei denen kein Zweifel besteht, dass jede Streuung bemerkt würde, andererseits für schwächere Spuren, deren Beurteilung unsicher ist. Auch diese Einteilung ist stark vom Beobachter und seiner Übung abhängig. Es empfiehlt sich, eine grössere Anzahl Aufnahmen ziemlich rasch durchzumessen, damit die Beurteilung der Bahnen möglichst dieselbe bleibt.

Es ergab sich folgendes Resultat:

Gruppe	Länge	Streuungen $> 15^\circ$	Str. pro m
1. (Stark)	520 m	89	$0,171 \pm 0,018 \text{ m}^{-1}$
2. (Schwach)	109 m	17	$0,156 \pm 0,038 \text{ m}^{-1}$

Die relative Anzahl Streuungen ist für beide Gruppen innerhalb der statistischen Schwankungen dieselbe, so dass angenommen werden kann, dass die Auswahl der zu berücksichtigenden schwachen Spuren richtig erfolgt ist. In Tabelle IV sind daher die beiden Gruppen nicht unterschieden. Immerhin muss mit einer gewissen Unsicherheit in der Bestimmung der Bahnlänge gerechnet werden, welche zusammen mit der Ungenauigkeit, die durch Auf- oder Abrunden der Bahnlängen auf ganze cm und durch allfällige Fehler in der Projektion entstehen kann, auf etwa $\pm 5\%$ geschätzt werden kann.

2. Bestimmung der Energie. Im allgemeinen war die Zuordnung der Bahnen zu einem bestimmten Testkreisradius eindeutig. Um eine Tendenz zur Bevorzugung kleinerer oder grösserer Radien möglichst zu verringern, wurde beim Anpassen der Testkreise an die Bahnen abwechselnd von der Seite der grossen und der kleinen Radien begonnen.

3. Anzahl der Streuungen. Die stereoskopische Projektion, verbunden mit der Flimmereinrichtung (s. § 2), ermöglicht eine genaue Feststellung einer Streuung. Es ist daher nicht anzunehmen, dass zu viele Streuungen gezählt worden sind. Andererseits scheint es sehr unwahrscheinlich, dass bei der systematischen Ausmessung jeder einzelnen Spur eine Streuung übersehen worden sein sollte.

CHAMPION⁷⁾ bemerkt, dass Streuungen gegen die konkave Seite der Bahn (\curvearrowright) oft nicht erkannt würden, sodass die Statistik der konvexen Streuungen allein (\curvearrowleft) zuverlässiger sei. Die gefundenen Zahlen: 60 konkave und 46 konvexe Streuungen bestätigen diese Ansicht nicht.

Ein gewisser Fehler in der Totalzahl der Streuungen kann infolge der beschränkten Genauigkeit der Winkelmessung ($\pm 1^\circ$) entstehen: An der untern Grenze des untersuchten Winkelbereiches (bei 15°) werden einerseits einige Streuungen zu viel gezählt (ca 2%), andererseits tritt eine zusätzliche statistische Schwankung von etwa $\pm 3\%$ auf. Zieht man noch die Unsicherheit in der Bestimmung der Neigung der Streuebene ($\pm 5^\circ$) und der Länge der gestreuten Bahn (± 2 mm) in Betracht, so erhält man einen mittleren Fehler in der Zahl der beobachteten Streuungen von $\pm 5\%$.

Zusammenfassung.

Die statistische Schwankung beträgt $\pm 10\%$, die übrigen Fehler im Mittel ebenfalls $\pm 10\%$, wozu noch eine Tendenz zur Verkleinerung des resultierenden Streuquerschnittes (e, g) um höchstens 5% kommt.

Die gemessene Streuintensität übertrifft demnach den theoretischen Wert um einen Faktor

$$1,35 \pm 0,2.$$

Der Überschuss ist etwas grösser als der mittlere Fehler, doch kann nicht mit Sicherheit auf eine Abweichung des mittleren Wirkungsquerschnittes von der Theorie geschlossen werden.

Es ist zu bemerken, dass sich die Berechnungen auf das verwendete Gasgemisch beziehen, dessen Streuvermögen nur zu 82,5% von Fluorkernen verursacht wird. Der Streuquerschnitt von F

selbst ist nur dann gleich dem berechneten Wert, wenn die übrigen Bestandteile des Gemisches annähernd normal streuen. Dies scheint jedoch der Fall zu sein: 11,5% der Streuungen stammen von C, 3,5% von O. Streumessungen von ALICHANOV, ALICHANIAN und KOZODAEV²⁴) an Celluloidfolien, deren Streuvermögen ungefähr zu je 45% von C und von O stammt, ergaben annähernd Übereinstimmung mit der Theorie. Ebenso wurden bei Untersuchungen über die Vielfachstreuung an C Folien mittlere Ablenkungen von 75—100% des theoretischen Wertes gefunden (OLESON, CHAO und CRANE²⁵), OLESON, CHAO, HALPERN und CRANE²⁶), SHEPPARD und FOWLER²⁷)). Es kann also angenommen werden, dass C und O normal streuen; auch bei N treten keine grossen Abweichungen von der Theorie auf, wie im folgenden § 5 gezeigt werden soll. Eine eventuelle Anomalie von He oder H hätte keinen merklichen Einfluss auf die Berechnung des Streuquerschnittes, da ihr Beitrag zum Gesamtstreuvermögen nur 2% beträgt.

§ 5. Messungen an Stickstoff.

1. Überprüfung der Messungen von BOSSHARD und SCHERRER⁸).

BOSSHARD und SCHERRER hatten im wesentlichen folgendes Resultat gefunden: Bei Energien unterhalb 0,2 MeV ist der Streuquerschnitt von Stickstoff kleiner als der theoretische Wert, steigt aber mit wachsender Energie rasch an. Für 1 MeV gilt ungefähr:

Winkelbereich .	20°—30°	30°—60°	60°—180°
$\frac{n_{ex}}{n_{th}}$	1	3—4	10—15

Bei einer durch die in § 1 erwähnten neueren Untersuchungen angeregten Kontrolle dieser Filme wurde jedoch festgestellt, dass eine Anzahl der registrierten Streuungen nicht der Wirklichkeit entsprachen. Solche vorgetäuschte Streuungen können z. B. dadurch entstehen, dass in unmittelbarer Nähe des Ortes, wo eine Bahn aus der beleuchteten Schicht austritt, eine andere Spur, etwa die eines Photoelektrons, in den Lichtkegel gelangt, so dass die beiden Bahnen wie die zwei Äste einer Streuung erscheinen. Da die Winkelverteilung dieser scheinbaren Streuungen annähernd isotrop ist, während die Mott'sche Streuwahrscheinlichkeit mit wachsendem Winkel rasch abnimmt, fällt die Überschusstreuung bei grossen Winkeln viel stärker ins Gewicht als bei kleinen, was die frappante Winkelabhängigkeit der gefundenen Anomalie erklärt. (Es ist bemerkenswert, dass die von SKOBELZYN und STEPANOWA⁶) gemessene Anomalie die gleiche Winkelabhängigkeit aufweist.)

Die Ausscheidung der vorgetäuschten Streuungen wurde hauptsächlich durch die verbesserte Auswertetechnik ermöglicht: Die beiden Bilder wurden bei der stereoskopischen Reproduktion nicht gleichzeitig, sondern mit Hilfe der „Flimmereinrichtung“ in raschem Wechsel projiziert (s. § 2). Es konnte so mit viel grösserer Genauigkeit festgestellt werden, ob zwei Spuren, welche wie die Äste einer Streuung aussahen, im vermutlichen Knickpunkt tatsächlich zusammenstiessen oder windschief waren.

Nach Abzug dieser irrtümlichen Streuungen ergab sich ungefähr Übereinstimmung mit der Theorie. Da jedoch eine zuverlässige Auswertung schwierig schien, vor allem, weil die Aufnahmen bei verschiedenen, meist kleinen Magnetfeldern gemacht worden waren, wurde eine Reihe neuer Filme aufgenommen.

2. Ergebnisse.

Auf ca. 1000 Aufnahmen mit einem Magnetfeld von 480 Oersted wurden 515 m sichtbare Bahnlänge (L_0) ausgemessen. Das Spektrum zeigt Fig. 5.

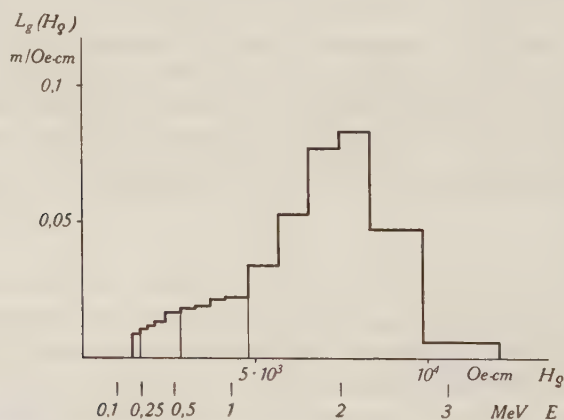


Fig. 5.

Die gemessenen Streuungen sind in Fig. 6 zusammengestellt.

Die Zahl der nach der Theorie zu erwartenden Streuungen wurde in derselben Weise berechnet wie für die Messungen an Fluor. Das gesamte Streuvermögen des verwandten Gasgemisches ist durch $\Sigma(N_i Z_i^2) = 15,9 \cdot 10^{20} cm^{-3}$ gegeben, wovon 90% auf Stickstoff entfallen. Die Resultate sind aus Tabelle VI ersichtlich.

Die Abhängigkeit der Streuwahrscheinlichkeit von Energie und Winkel stimmt innerhalb der ziemlich grossen statistischen Schwan-

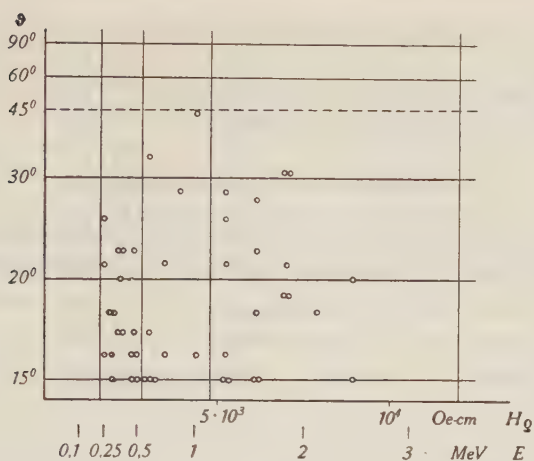


Fig. 6.

Tabelle VI.

Winkel		15°—20°	20°—30°	30°—60°	60°—180°	15°—180°
Energie						
0,2—0,5 MeV L = 17 m	n_{ex}	11	5,5	0	0	16,5
	n_{th}	4,7	3,1	1,3	0,2	9,3
	$\frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$	2,3	1,8	—	—	$1,7 \pm 0,4$
0,5—1,1 MeV L = 41 m	n_{ex}	4,5	2	2	0	8,5
	n_{th}	3,2	2,1	0,9	0,1	6,3
	$\frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$	1,4	1,0	2,2	—	$1,3 \pm 0,4$
1,1—3,1 MeV L = 309 m	n_{ex}	8	6,5	2	0	16,5
	n_{th}	6,0	3,7	1,6	0,2	11,5
	$\frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$	1,3	1,8	1,3	—	$1,4 \pm 0,3$
0,2—3,1 MeV L = 367	n_{ex}	23,5	14	4	0	41,5
	n_{th}	13,9	8,9	3,8	0,5	27,1
	$\frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$	$1,7 \pm 0,4$	$1,6 \pm 0,4$	$1,1 \pm 0,5$	—	$1,5 \pm 0,2$

kungen mit der Mott'schen Theorie überein. Der Absolutbetrag ist im Mittel um den Faktor

$$1,5 \pm 0,3$$

höher. Die statistische Unsicherheit beträgt $\pm 15\%$, die übrigen Fehler sind von der gleichen Grösse wie bei den Messungen an Fluor. Eine Abweichung vom theoretischen Wert kann wiederum nicht mit Sicherheit behauptet werden.

3. Vergleich mit früheren Arbeiten.

In Tabelle VII sind die bisherigen Streumessungen an Stickstoff, nach steigender Energie angeordnet, zusammengestellt.

Tabelle VII.

Autor	Jahr	Winkel	Energie	$\frac{\sigma_{\text{ex}}}{\sigma_{\text{th}}}$
CHAMPION ⁷⁾ . . .	1936	$> 20^\circ$	0,5—1,1	0,9
BORISOV u. a. ¹¹⁾ .	1940	$> 15^\circ$	0,3—1,4 1,4—2,5	0,63 0,93
Diese Arbeit . .	1942	$> 15^\circ$	0,2—3,1	1,5
RANDELS u. a. ¹⁰⁾ .	1940	$> 15^\circ$	1—4,5	1,5

Die Abhängigkeit vom Streuwinkel wird bei allen Messungen durch die Theorie richtig wiedergegeben. Dagegen scheint es, als ob die Streuwahrscheinlichkeit mit der Energie gegenüber dem Mott'schen Wert etwas anstiege. Ein zuverlässiger Schluss ist jedoch wegen der Unsicherheit der Messungen unmöglich.

Auf alle Fälle machen diese Untersuchungen eine Anomalie der von SKOBELZYN und STEPANOWA⁶⁾ gefundenen Art sehr unwahrscheinlich.

§ 6. Übersicht über die bisherigen experimentellen Ergebnisse.

Es ist ziemlich schwierig, einen Überblick über die bisherigen Streumessungen zu gewinnen, da diese unter sehr verschiedenen Versuchsbedingungen ausgeführt worden sind. Energie, Winkel, streuender Kern und Beobachtungsart sind von den einzelnen Autoren variiert worden, was den Vergleich erschwert. Es ist vorteilhaft, die Arbeiten nach der Messmethode in zwei Gruppen zu unterteilen:

1. Untersuchungen der Streuung in Gasen (vereinzelt in Folien) mit Hilfe der Wilsonkammer;

2. Messung der Streuung in Folien (vereinzelt in Gasen) mit Zählrohr, Ionisationskammer oder Faradaykäfig.

1. Arbeiten mit der Wilsonkammer.

Die Vorteile der Methode sind bekannt: Jeder einzelne Prozess kann genau untersucht werden; insbesondere sind unelastische Streuungen an Elektronen der Atomhülle leicht auszuschliessen. Die Nachteile sind: grosse statistische Fehler und subjektive Auswertung. Daher kann nur ein mittlerer Streuquerschnitt mit einiger Sicherheit bestimmt werden, während die Messung von Energie- oder Winkelabhängigkeit infolge der ungenügenden Statistik notwendigerweise ungenau, wenn nicht unmöglich, wird.

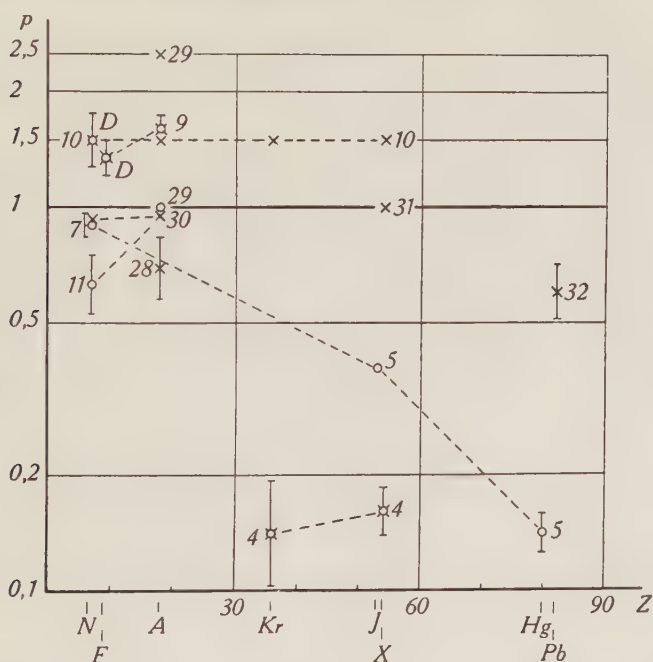


Fig. 7.

Die einzelnen Werte sind mit ihrer Nummer im Literaturverzeichnis gekennzeichnet. D = diese Arbeit.

○ $E < 1$ MeV. × $E > 1$ MeV. □ beide Energiebereiche.

In Fig. 7 ist als Ordinate p das mittlere Verhältnis des experimentellen zum theoretischen Streuquerschnitt als Funktion der Atomnummer des streuenden Kernes aufgetragen. Die in den einzelnen Arbeiten untersuchten Energiebereiche sind durch verschiedene Markierung der betreffenden Werte gekennzeichnet. Resultate, die in zusammenhängenden Messreihen gefunden worden sind, sind

miteinander verbunden. Als mittlerer Fehler ist, wo möglich, die relative statistische Schwankung $\frac{1}{\sqrt{n_{\text{ex}}}}$ angegeben.

Der theoretische Wirkungsquerschnitt wurde durchwegs nach Gl. (2) (Mott'sche Formel mit Korrektur von URBAN) berechnet. Diese gibt die Winkelabhängigkeit bei den Messungen an A von ZUBER²⁸⁾ und SCHERRER und ZÜNTI⁹⁾, sowie an X von KLARMANN und BOTHE⁴⁾ besser wieder als Gl. (1). Bei allen Arbeiten stimmt die Abhängigkeit des Streuquerschnittes von Energie und Winkel innerhalb der ziemlich grossen statistischen Unsicherheit mit der Theorie überein, mit Ausnahme einer Messung an A, wo STEPANOWA²⁹⁾ die Streuung bei Energien unter 1 MeV normal, zwischen 1,5 und 3 MeV aber um einen Faktor 2,5 zu gross fand. (Nach einer neuern Arbeit von BRAILOVSKI und LEIPUNSKI³⁰⁾ streut A Elektronen von 1,5—3 MeV normal.)

Die mittleren Absolutwerte der Wirkungsquerschnitte schwanken stark. Bei den leichten Kernen dürften sich die Unterschiede der einzelnen Resultate ($p = 0,7$ bis $1,6$) im allgemeinen innerhalb der Messgenauigkeit bewegen und sich zum Teil durch die verschiedenen Auswertemethoden erklären lassen. Bei schwereren Kernen treten dagegen bedeutende Diskrepanzen auf. Die Messreihe von CHAMPION⁷⁾ und BARBER und CHAMPION⁵⁾ an N, J und Hg, welche mit Elektronen von RaE (ca. 0,5—1,1 MeV) ausgeführt wurde, ergibt eine Abnahme von p mit steigendem Atomgewicht. KLARMANN und BOTHE⁴⁾ fanden in Übereinstimmung damit an Kr und X bei einer mittleren Energie von 1,3 MeV stark unternormale Streuung. Im Widerspruch dazu stehen die Messung von SEN GUPTA³¹⁾ an X bei 2 MeV, welche eine normale Streuung ergab, und die Resultate von RANDELS, CHAO und CRANE¹⁰⁾, die bei Energien von etwa 2—11 MeV in Kr und X einen Wert von $p = 1,5$ fanden.

Die angegebenen Werte für schwere Kerne sind freilich mit einer gewissen Vorsicht aufzunehmen, da die für die Berechnung der theoretischen Streuintensität benutzte Entwicklung nach $Z\alpha$ bei diesen Kernen nicht mehr gut konvergiert. Immerhin würden die relativen Unterschiede der einzelnen Messungen auch bei exakter Rechnung vermutlich bestehen bleiben.

Es darf wohl kaum angenommen werden, dass diese Unstimmigkeiten bei Kr und X nur auf mangelhafte Auswertung oder Vernachlässigung gewisser Korrekturen zurückzuführen sind. (Als Fehlerquellen kämen z. B. in Betracht: Schlechte Korrektur für die Geometrie und unzuverlässige Energiemessung, besonders bei Energien unter 2 MeV, wo die Bahnen in diesen stark streuenden

Gasen beträchtlich von der Kreisform abweichen.) Eine Erklärung wäre daher nur durch die Annahme möglich, dass p mit wachsender Energie rasch ansteigt. Der Wert $p = 0,6$, der für die Messungen von FOWLER und OPPENHEIMER³²⁾ an Pb-Folien (bei 5—17 MeV) berechnet werden kann, scheint freilich wiederum etwas niedrig, wenn man diese starke Energieabhängigkeit annehmen will; er dürfte jedoch auch nicht sehr genau sein.

2. Streumessungen mit Zählrohr, Ionisationskammer oder Faradaykäfig.

Die Vorteile dieser Methoden sind: objektive Registrierung und grössere statistische Genauigkeit, welche besonders zu verlässige relative Messungen gestattet. Nachteile: Bisher war es unmöglich, elastische und unelastische Streuungen zu unterscheiden; das Auftreten von Sekundärelektronen kann die Resultate verfälschen; sorgfältige Korrekturen für die Vielfachstreuung sind notwendig; bei Verwendung radioaktiver Körper muss entweder über das Spektrum integriert werden, so dass die Energieabhängigkeit nicht nachgeprüft werden kann, oder es müssen monochromatische Strahlen ausgeblendet werden, was die Intensität stark herabsetzt. Gute Resultate sind mit Kathodenstrahlen zu erreichen, doch beträgt die höchste bisher verwendete Spannung nur 145 kV (NEHER³³⁾).

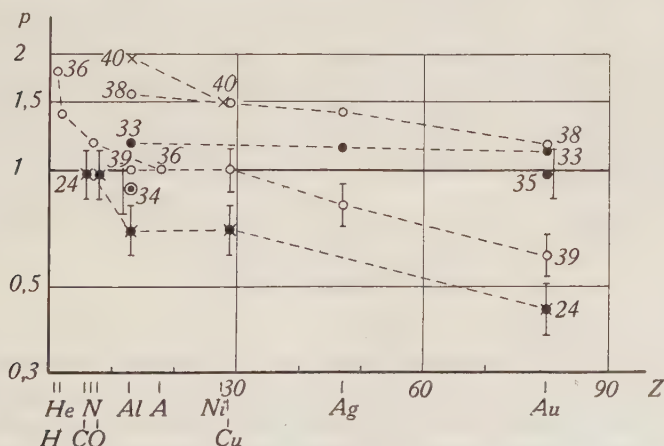


Fig. 8.

Die einzelnen Werte sind mit ihrer Nummer im Literaturverzeichnis gekennzeichnet.

- | | | | |
|--|-----------------------------|-------------------|-----------------------------|
| ○ $E = 0,2-1,1$ MeV | } $\vartheta \leq 40^\circ$ | ● $E < 0,15$ MeV | } $\vartheta \geq 90^\circ$ |
| × $E = 1-2,4$ MeV | | ■ $E = 0,6-2$ MeV | |
| ○ $E = 0,05$ MeV. $30^\circ \leq \vartheta \leq 120^\circ$ | | | |

In Fig. 8 sind die experimentellen Ergebnisse in ähnlicher Weise dargestellt wie in Fig. 7. Durch die Art der Markierung sind ausserdem die Winkelbereiche, welche die einzelnen Autoren untersucht haben, unterschieden. Die mittleren Fehler sind nach Angabe der Autoren, wo vorhanden, eingezeichnet.

Mit Ausnahme der Streuung an Gold um 90° , wo die genauen numerischen Werte von MOTT¹⁾ benutzt wurden, sind auch hier sämtliche theoretischen Wirkungsquerschnitte nach Gl. (2) berechnet.

Zur Diskussion werden die Arbeiten am besten nach der Energie der verwendeten Elektronen geordnet.

1. $E < 0,15 \text{ MeV}$.

NEHER³³⁾ mass die Streuung von Kathodenstrahlen von 45 bis 145 kV an Al, Ag und Au in einem Winkelbereich von 95° — 172° mit Hilfe eines Faradaykäfigs. Energie- und Winkelabhängigkeit stimmten bei Al mit Gl. (2) überein. Der von ihm angegebene Wert für Al: $p = 1,32$ erniedrigt sich mit der Korrektur von URBAN¹²⁾ auf 1,2; sein Wert $p = 2,1$ für Au wird bei genauer Berechnung mit Berücksichtigung der von ihm gemessenen Winkelabhängigkeit 1,1. (Der Wert für Ag ist willkürlich dazwischen gelegt worden, da hier keine Rechnung möglich ist.) Im Gegensatz zu diesen etwas zu hohen Werten fanden CHASE und COX³⁴⁾ bei Messungen an Al mit Kathodenstrahlen von 50 kV eine eher etwas zu kleine Streuintensität ($p \sim 0,9$). Die Winkelverteilung stimmte zwischen 30° und 120° sehr genau ($\pm 2\%$) mit Gl. (1) überein, während gegenüber der hier verwendeten Gl. (2) Abweichungen bis 5% auftraten. Die gleichen Autoren massen die Streuung von 80 kV-Elektronen an Au unter 90° zu 97% des theoretischen Wertes (Cox und CHASE³⁵⁾).

Es scheint somit, dass in diesem Energiebereich die Streuung durch die Theorie richtig wiedergegeben wird.

2. $E = 0,2 - 1,1 \text{ MeV}$ (*Ra E*).

HENDERSON³⁶⁾ mass das relative Streuvermögen von H_2 , He, N_2 , Luft und A für einen Winkelbereich von $9,2^\circ$ — $29,7^\circ$. Angegeben ist das Verhältnis des experimentellen Streuquerschnittes zur Summe der theoretischen Wirkungsquerschnitte für Streuung am Atomkern und an den Hüllenelektronen, letzterer berechnet nach MÖLLER³⁷⁾. Für A ist p willkürlich = 1 gesetzt. Es scheint, dass die leichten Gase stärker streuen, als nach der Theorie erwartet werden kann.

Die Arbeiten von CHADWICK und MERCIER³⁸⁾ und von SAUNDERSON und DUFFENDACK³⁹⁾, welche die Streuung an Al, Cu, Ag und Au um Winkel zwischen 20° und 40°, bzw. 45° untersuchten, stimmen darin miteinander überein, dass p mit steigender Kernladung abnimmt. Die Absolutwerte stimmen bei SAUNDERSON und DUFFENDACK besser mit der Theorie überein; es ist ihnen vermutlich auch ein grösseres Gewicht zu geben, da diese Autoren mit Zählrohren arbeiteten, während CHADWICK und MERCIER eine Ionisationskammer benutzten.

Streumessungen um grosse Winkel fehlen für diesen Energiebereich.

3. $E = 1\text{--}2\text{ MeV}$.

BOTHE und RATZEL⁴⁰⁾ massen die Streuung schneller Elektronen an Folien von Al und Ni in den Winkelbereich 12,3°—22,5°, wobei sie mittels einer magnetischen Elektronenlinse enge Energieintervalle aussonderten. Ihre Werte für p sind:

Energie	1 MeV	2,4 MeV
Al	1,19	1,95
Ni	1,01	1,49

Das Verhältnis $p = \frac{n_{\text{ex}}}{n_{\text{th}}}$ sollte also bei Streuung um kleine Winkel mit zunehmender Energie rasch ansteigen, und zwar um so mehr, je leichter der Kern ist. Für Gold liegen in diesem Energiebereich keine Streumessungen um kleine Winkel vor.

Die Streuung um 90° wurde von ALICHANOV, ALICHANIAN und KOZODAEV²⁴⁾ untersucht. Danach wird die Energieabhängigkeit zwischen 0,6 und 2 MeV für Celluloid, Al, Cu und Au von der Theorie richtig wiedergegebenen (im Gegensatz zu den Messungen bei kleinen Winkeln), während der Absolutwert mit steigendem Atomgewicht wiederum abnimmt.

Zusammenfassung.

Eine Übersicht über das Verhalten des Streuquerschnittes in Funktion von Energie, Winkel und Atomnummer gibt Tabelle VIII.

Für jedes Wertepaar von Energie und Winkel ist das Verhältnis p von experimentellem zu theoretischem Wirkungsquerschnitt eingetragen, links oben für leichte Kerne (etwa Al), rechts unten für schwere Kerne (etwa Au). Für Winkel der Grössenordnung 1° sind die durch Messung der Vielfachstreuung gewonnenen Werte (²³⁾ u. a.) benützt. Die Resultate von Arbeiten mit der Wilsonkammer sind zur Unterscheidung eingeklammert.

Tabelle VIII.

Winkel Energie	1°	20°	60°	90°
0,1 MeV.	? ?	1 ?	1 ?	1 1
0,4 MeV.	1 ~ 1	1 < 1	(1) ?	? ② ?
1 MeV.	1 ≈ 1	1 (< 1)	(1) (< 1)	1 < 1
2 MeV.	1 ≈ 1	> 1 ① (~ 1)	? ③ ?	1 ↓ < 1

Aus der Tabelle ergibt sich:

1. Die Streuung ist normal für Energien unter 0,15 MeV.
2. Bei grösseren Energien sinkt p mit steigender Kernladung.
3. Für kleine Winkel (ca. 15° – 30°) steigt p oberhalb 1 MeV rasch an.

Dies Abweichungen müssen, falls sie nicht durch irgendwelche, bisher unbekannte experimentelle Fehler bedingt sind, auf eine zusätzliche Wechselwirkung (ausser dem Coulomb-Feld) zwischen Elektron und Kern zurückgeführt werden (vgl. § 1).

Es muss indessen bemerkt werden, dass Punkt 3, der sich auf die Messungen von BOTHE und RATZEL⁴⁰) sowie auf einzelne, nur mit Vorsicht miteinander zu vergleichende Untersuchungen mit der Wilsonkammer (vor allem an Kr und X) stützt, nicht als unbedingt sicher anzusehen ist. Es ist sehr schwierig zu verstehen, wieso in diesem Energiebereich (um 2 MeV) die Streuung an leichten Kernen bei grossen (90°) und sehr kleinen Winkeln (1°) ungefähr normal, dazwischen aber (20°) stark übernormal sein sollte.

Mit dieser Darstellung sollte gezeigt werden, dass die Erscheinungen der Kernstreuung schneller Elektronen noch einer weiteren experimentellen Abklärung bedürfen. Nach Tabelle VIII wären vor allem Untersuchungen in drei Richtungen wünschenswert (durch Pfeile gekennzeichnet —①→):

1. Es sollte festgestellt werden, ob die bei Messungen an Kr und X bei verschiedenen Energien gefundenen Unterschiede der Wirklichkeit entsprechen, wozu die Genauigkeit von Arbeiten mit der Wilsonkammer bei sorgfältiger Ausführung ausreichen sollte.

2. Die Verbindung zwischen der normalen Streuung an Au unter 90° bei kleinen Energien (bis 0,15 MeV³³⁾³⁵) und der unternormalen Streuung bei Energien über 0,6 MeV (²⁴) sollte untersucht werden.

3. Eine Messung der Winkelabhängigkeit bei grossen Energien über den ganzen Bereich von etwa 15^0 — 90^0 könnte den unsichern Punkt 3 klären. Am besten scheinen dazu Untersuchungen mit schnellen Kathodenstrahlen (um 2 MeV) geeignet.

Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER danke ich für das Interesse an dieser Arbeit; dem Jubiläumsfonds der E.T.H. bin ich für die Überlassung von Mitteln, welche die notwendigen Anschaffungen ermöglichten, zu Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Literatur.

- ¹⁾ MOTT, Proc. Roy. Soc. A **124**, 425 (1929); **135**, 429 (1932).
- ²⁾ BREIT, THAXTON und EISENBUD, Phys. Rev. **55**, 1018 (1939).
- ³⁾ JAUCH, Helv. Phys. Acta **13**, 451 (1940).
- ⁴⁾ KLARMANN und BOTHE, Zs. f. Phys. **101**, 489 (1936).
- ⁵⁾ BARBER und CHAMPION, Proc. Roy. Soc. A **168**, 159 (1938); Phys. Rev. **55**, 111 (1939).
- ⁶⁾ SKOBELZYN und STEPANOWA, Nature **137**, 456 (1936).
- ⁷⁾ CHAMPION, Proc. Roy. Soc. A **153**, 353 (1936).
- ⁸⁾ BOSSHARD und SCHERRER, Helv. Phys. Acta **14**, 85 (1941).
- ⁹⁾ SCHERRER und ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **14**, 111 (1941).
- ¹⁰⁾ RANDELS, CHAO und CRANE, Phys. Rev. **58**, 201 (1940).
- ¹¹⁾ BORISOV, BRAILOVSKI und LEIPUNSKI, C. R. Moskau **26**, 142 (1940).
- ¹²⁾ URBAN, Zs. f. Phys. **119**, 67 (1942).
- ¹³⁾ BETHE und HEITLER, Proc. Roy. Soc. A **146**, 83 (1934).
- ¹⁴⁾ LEPRINCE-RINGUET, Ann. de Phys. **7**, 5 (1937).
- ¹⁵⁾ SKOBELZYN und STEPANOWA, Nature **137**, 234 (1936).
- ¹⁶⁾ ZUBER, Helv. Phys. Acta **11**, 207 (1938).
- ¹⁷⁾ WILLIAMS, Proc. Roy. Soc. A **169**, 531 (1939); Phys. Rev. **58**, 292 (1940).
- ¹⁸⁾ EUCKEN und BERTRAM, Zs. f. Phys. Chem. **31**, 361 (1936).
- ¹⁹⁾ BRETSCHER und FEATHER, Proc. Roy. Soc. A **141**, 194 (1933).
- ²⁰⁾ HANSEN, Zs. Ver. D. Ing. **84**, 248 (1940).
- ²¹⁾ GAUTIER und RUARK, Phys. Rev. **57**, 1040 (1940).
- ²²⁾ MOTT, Proc. Camb. Phil. Soc. **27**, 255 (1931).
- ²³⁾ KULCHITSKY und LATYSHEV, Phys. Rev. **61**, 254 (1942).
- ²⁴⁾ ALICHANOV, ALICHANIAN und KOZODAEV, C. R. Moskau **24**, 525 (1939).
- ²⁵⁾ OLESON, CHAO und CRANE, Phys. Rev. **60**, 378 (1941).
- ²⁶⁾ OLESON, CHAO, HALPERN und CRANE, Phys. Rev. **56**, 482, 1171 (1939).
- ²⁷⁾ SHEPPARD und FOWLER, Phys. Rev. **56**, 849 (1939); **57**, 273 (1940).
- ²⁸⁾ ZUBER, Helv. Phys. Acta **11**, 370 (1938).
- ²⁹⁾ STEPANOWA, Journ. exp. theor. Phys. **8**, 397 (1938) (russ.); Referat: Phys. Ber. **19**, 2410 (1938).

- ³⁰⁾ BRAILOVSKI und LEIPUNSKI, Journ. exp. theor. Phys. **11**, 479 (1941) (russ.); Referat: Chem. Zentralbl. **113**, 2962 (1942 I).
 - ³¹⁾ SEN GUPTA, Proc. Phys. Soc. (London) **51**, 355 (1939); Referat: Chem. Zentralbl. **110**, 1630 (1939 II).
 - ³²⁾ FOWLER und OPPENHEIMER, Phys. Rev. **54**, 320 (1938).
 - ³³⁾ NEHER, Phys. Rev. **38**, 1321 (1931).
 - ³⁴⁾ CHASE und COX, Phys. Rev. **58**, 243 (1940).
 - ³⁵⁾ COX und CHASE, Phys. Rev. **51**, 140 (1937).
 - ³⁶⁾ HENDERSON, Phil. Mag. **78**, 847 (1929).
 - ³⁷⁾ MØLLER, Ann. der Phys. **14**, 568 (1932).
 - ³⁸⁾ CHADWICK und MERCIER, Phil. Mag. **50**, 208 (1925).
 - ³⁹⁾ SAUNDERSON und DUFFENDACK, Phys. Rev. **57**, 68 (1940).
 - ⁴⁰⁾ BOTHE und RATZEL, Zs. f. Phys. **115**, 497 (1940).
-

Über die Messung der Dielektrizitätskonstante mit Hilfe des Hohlraumleiters

von G. Fejér und P. Scherrer.

(25. VIII. 1942).

Zusammenfassung. Zur Untersuchung der *dielektrischen Eigenschaften* der Stoffe im Wellenlängenbereich von 1—3 cm wurde eine Apparatur entwickelt, die im wesentlichen aus einem *Magnetronsender* und einem *Hohlraumleiter* von rechteckigem Querschnitt besteht. Die Magnetrone erlauben diese kurzen Wellen zu erzeugen. Die H_{0m} -Wellen des rechteckigen Hohlraumleiters haben in der Ebene des Querschnittes liegende, zu einer Seite des Querschnittes parallel schwingende elektrische Feldlinien. Dank dieser Besonderheit können mit Hilfe der H_{0m} -Wellen auch Kristalle untersucht werden. Durch den Umstand, dass der Hohlraumleiter nicht leer, sondern mit einem unter Umständen nicht idealen Dielektrikum gefüllt ist, werden die Eigenschaften des Feldes im Hohlraumleiter nur insofern geändert, dass die Amplituden der Feldkomponenten mit zunehmendem Abstand von der Stelle der Erregung exponentiell abnehmen und dass keine kritische Frequenz mehr besteht. Die *Feldverteilung* im Querschnitt wird nicht beeinflusst. Die Dielektrizitätskonstante und die Absorptionskonstante werden aus dem *Phasensprung* bestimmt, den elektromagnetische Wellen bei der Reflexion an einer Abschlussfläche des Hohlraumleiters erleiden. Diese Abschlussfläche ist ein in der Axenrichtung des Hohlraumleiters verschiebbarer Metallkolben, der auf seiner nach innen gekehrten Seite eine Platte aus der zu untersuchenden Substanz trägt. Der Phasenunterschied zwischen den Wellen, welche auf die nach innen gekehrte Fläche der Platte einfallen und den Wellen, die von der Platte zurückkommen, besteht aus drei Beiträgen: 1. aus dem Phasensprung bei der Reflexion an der freien Innenfläche der Platte; 2. aus dem Phasensprung bei der Reflexion an der Trennfläche Platte/Metallkolben; 3. aus dem optischen Weg, der der doppelten Plattendicke entspricht. Durch Veränderung der Plattendicke kann der totale Phasensprung so eingestellt werden, dass er demjenigen gleich wird, der bei der Reflexion an einem Metallkolben unendlich guter Leitfähigkeit auftreten würde, nämlich gleich π . Wenn dieser Fall eintritt, dann können die gesuchten dielektrischen Konstanten des Materials aus verhältnismässig einfachen Gleichungen berechnet werden, in welchen nur die Querschnittsabmessungen des Hohlraumleiters, die Plattendicke und die Wellenlänge der benutzten Schwingung auftreten.

Einleitung und Problemstellung.

Die Messmethoden zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante im Bereich der Zentimeterwellen stehen noch am Anfang ihrer Entwicklung. Aus diesem Grunde schien es erstrebenswert eine Vorrichtung herzustellen, welche mit verhältnismässig wenig Aufwand Messungen im erwähnten Frequenzbereich ermöglicht.

Der einfache Aufbau der Magnetrone und die besonderen Eigenschaften der Hohlraumleiter legen es nahe, die Messeinrichtung auf diese zwei Grundelemente zu basieren¹⁾.

Die Veröffentlichung von WILLIAMS und CLEETON (Phys. Rev., Bd. 45, S. 234, 1934) zeigte, dass es möglich ist, Magnetrone zu bauen, welche im Frequenzbereich $3 \cdot 10^{10}$ — 10^{10} Hz auch langdauernde Messungen durchzuführen gestatten.

Die Arbeiten verschiedener Autoren behandelten die Feldverteilung im offenen, leeren, rechteckigem Hohlraumleiter. Sie wiesen auf die Eigenschaft der sogenannten H_{01} -Wellen hin, dass sie elektrische Feldlinien haben, welche parallel und gerade sind. Diese Besonderheit macht die H_{01} -Wellentype zur Untersuchung der dielektrischen Eigenschaften von Kristallen geeignet.

Legt man keinen Wert auf strenge Parallität der elektrischen Feldstärke, dann sind die im Bereiche der Zentimeterwellen üblichen Messanordnungen die, welche freie Wellen (z. B. KEBBEL: Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 53, 81, 1939) und jene, welche Drahtwellen benützen (z. B. KNERR: Physical. Rev. 52, 1054, 1937). Gegen die Benützung freier Wellen kann eingewendet werden, dass es schwierig ist den Empfänger vor Streustrahlen zu schützen und die Ausbildung störender stehender Wellen zu verhindern. Gegen die Anwendung der Drahtwellen spricht, dass es fast unmöglich ist solche Lecherleitungen zu bauen, deren Strahlungsverluste im Gebiet der zu verwendenden Frequenzen die Messungen nicht beeinträchtigen würden.

Wenn man sogar Dielektrizitätskonstanten von Kristallen im Kurzwellenbereich messen will, dann ist man auf die Benützung der rechteckigen Hohlraumleiter sogar angewiesen.

Die Anwendung von Hohlraumleitern hat nicht nur den Vorzug des eindeutig polarisierten Feldes und der guten Abschirmung des darin eingebauten Detektors, es sind auch die Proben aus der zu untersuchenden Substanz, die man zur Durchführung der Messungen braucht, kleiner als bei Anwendung einer anderen Messeinrichtung.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Teile: I) die Beschreibung der entwickelten Magnetrone, II) die Berechnung der Feldverteilung im abgeschlossenen Hohlraumleiter, III) die Beschreibung der Messmethode, IV) die Beschreibung der Apparatur und ihres Betriebes.

¹⁾ Messmethode und vorläufige Resultate wurden vorgetragen an der Tagung der Schweiz. Phys. Ges. im Mai 1941, s. H. P. A. 14, 141, 1941.

I. Beschreibung der Magnetron.

Benützte Literatur:

CLEETON and WILLIAMS: Phys. Rev. **45**, 234, 1934.

MEGAW: The Journal of the Inst. of Electr. Eng. **72**, 326, 1933.

Die experimentellen Angaben für den Bau von Magnetronen, deren Schwingungsbereich zwischen 10^{10} und $3 \cdot 10^{10}$ Hz liegt, waren zur Zeit, als die vorliegende Arbeit begonnen wurde, äusserst spärlich. Es musste deshalb zuerst abgeklärt werden, welcher Teil der Röhre den Schwingbereich begrenzt.

Als Versuchsröhre (Fig. 1) wurde eine von G. R. KILGORE im Jahre 1936 in den Proceedings of the Society of Radio Engineers (Seite 1153) auf dem Bilde 13 angegebene Konstruktion benützt, jedoch mit folgenden Änderungen:

1. Trennung der Energieleitung von der Anode.
2. Zusammenbau von Kathodenhalter und Anode so, dass die Kathode bequem eingebaut und zentriert werden konnte.
3. Der eine Einheit bildende Aufbau wurde in einen aus Kern- und Mantelschliff bestehenden Röhrenkolben eingesetzt.

Das Aggregat war während des Betriebes mit einer Quecksilberdiffusionspumpe luftleer gehalten.

Man ging von der Annahme aus, dass der Schlitz L als Schwingungskreis wirke. Zur Messung der Wellenlänge diente ein Paralleldrahtsystem, welches sich gleichfalls im Röhrenkolben befand. Wenn das Lechersystem kapazitativ angekoppelt wurde, war der Bügel B entfernt. Seine Abwesenheit war jedoch, ebenso wie das Verschliessen des Schlitzes L , ohne Einfluss auf das Verhalten des Magnetrons. Die Röhre konnte auch ohne Bügel und Schlitz erregt werden. Die Änderung der Länge der Kathodenleitung zwischen Kathode und Scheibe S erwies sich belanglos, ebenso wie Änderungen der Länge der Anode und Kathode. Nun wurde die Anode aus dem Halteklötz K entfernt und an ihrer Statt verschiedene Anoden aus Tantalblech, wie die der Fig. 2, eingesetzt.

Wiederum zeigten sich Anoden- und Kathodenlänge für den Schwingbereich belanglos: volle Anoden strahlten eine kleinere Energie aus als an ihrem freien Ende geschlitzte. Über die Winkel-lage im Magnetfeld kann nichts Bestimmtes ausgesagt werden; der Winkelbereich, in welchem Schwingungen nachgewiesen werden konnten, erstreckte sich von 0° — 16° , je nach der Röhre. Es ist mit Recht anzunehmen, dass die kleinen Deformationen, die die stromführenden Teile im Magnetfeld erfahren und die unvermeid-

lichen Unsymmetrien der kleinen Röhren — ihr Anodendurchmesser lag zwischen 0,4 und 0,35 mm — die Winkelangaben sinnlos machen.

Der Betrieb war im allgemeinen bis zu einer Anodenbelastung, die die Anode auf Dunkelrotglut brachte, stabil. Es trat allerdings bei manchen Röhren der Trommeleffekt auf. Ein äusserer Unterschied zwischen den Röhren, welche diese Erscheinung zeigten und

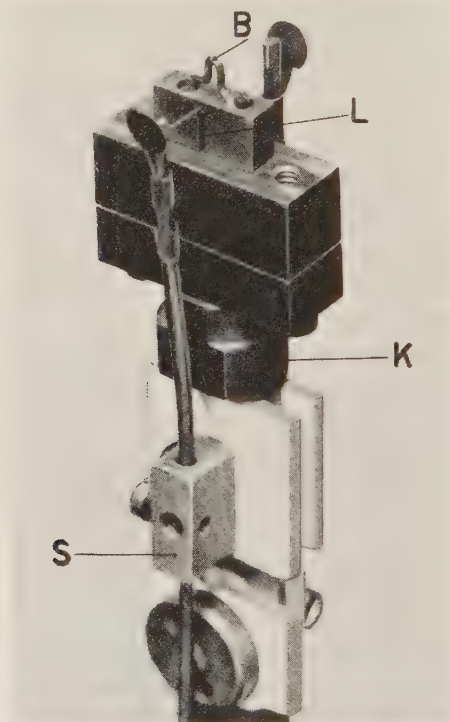


Fig. 1.

Elektrodenaufbau einer der Versuchsröhren. *B* abnehmbarer Bügel, *K* Halteklötz, *L* Längsschlitz, *S* Halter der Kathodenleitung. Vergrösserung: ca. 2,3fach.

solchen, die davon frei waren, war nicht festzustellen. Bei manchen Röhren wurde gleichzeitig mit dem Trommeleffekt eine starke Energieausstrahlung festgestellt, bei manchen auch nicht. Die Wellenlänge dieser Ausstrahlung konnte in keinem Fall gemessen werden, da Anode und Kathode binnen einer kurzen Zeit miteinander verschmolzen.

Die oben erwähnten Einsichten in die Rolle der Abmessungen von Anode und Kathode bestimmten die Konstruktionsgrundsätze

für die Röhrenaufbauten, welche in abgeschmolzenen Kolben betrieben wurden. Diese Röhren sind gleich gebaut wie diejenigen von CLAVIER (*Le Matériel Téléphonique*). Das Bild 2 zeigt den mechanischen Teil der Magnetrone, die Bilder 9, 10, 11 das Äussere und die Abstimmzscheibe, deren Lage längs des Dreileitersystems mit dem Magnetfeld, Anodenspannung, Heizung, Lage im Magnetfeld die Wellenlänge und Anschwingfähigkeit bestimmen.

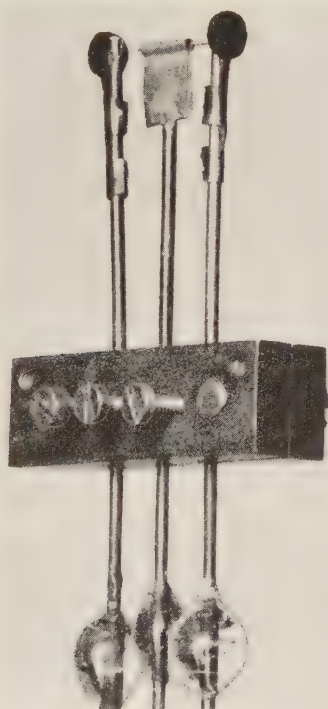


Fig. 2.

Elektrodenaufbau der abgeschmolzenen Röhren. Der auf dem Bild sichtbare Klotz dient einerseits als Matrice beim Blasen des Glasfusses, andererseits als Halter der Schutzhülle während des Blasens. Der Klotz wird nach Fertigstellung des Fusses entfernt. Vergrößerung: ca. 2,2fach.

Allen Röhren gemeinsam waren der Anodendurchmesser zwischen 0,4 und 0,35 mm, der Kathodendurchmesser 0,1 mm, das Material der Anode: Tantalblech, der Kathode: reines Wolfram, der Einschmelzungen: Molybdändraht von 0,8 mm Durchmesser, der gegenseitige Abstand der Einschmelzungen: 3,5 mm. Der Röhrenkolben bestand aus Molybdän- oder Pyrexglas. Einzel-

heiten über die Röhren werden in der nächstens erscheinenden Dissertation ähnlichen Titels mitgeteilt. An dieser Stelle sei nur bemerkt, dass eine der Röhren im Wellenlängenbereich von 1,5 bis 2,2 cm während mehr als 2000 Stunden ohne Schaden zu erleiden in intermittierendem Betrieb stand.

II. Die Berechnung der Feldverteilung im Hohlraumleiter.

Die Berechnung der Feldverteilung im beidseitig geschlossenen Hohlraumleiter wurde in folgender Weise durchgeführt:

IIa) Berechnung des Feldes im offenen, aber mit einem homogenen, absorbierenden Medium gefüllten Hohlraumleiter (vgl. CLAVIER's Rechnung für den leeren, runden Hohlraumleiter: Bulletin de la Soc. française des Electriciens, April 1938).

IIb) Berechnung des Verhaltens nicht ebener Wellen an Grenzflächen bei senkrechtem Einfall.

IIc) Berechnung der Feldverteilung im abgeschlossenen Hohlraumleiter, wobei die unter IIb) abgeleiteten Reflexions- und Durchlasskoeffizienten benützt werden.

IId) Berechnung des Energieinhaltes und der Abstimmung des Hohlraumleiters.

IIa) Berechnung des Feldes im offenen, mit absorbierendem Dielektrikum gefüllten Hohlraumleiter.

Benützte Literatur:

- ¹⁾ BARROW: Proc. Inst. Rad. Eng. **24**, 1298, 1936.
- ²⁾ CARSON, MEAD & SCHELKUNOFF: Bell Tel. Syst. Techn. Publ. **15**, 310, 1936.
- ³⁾ SOUTHWORTH: Bell Tel. Syst. Techn. Publ. **15**, 284, 1936.
- ⁴⁾ SOUTHWORTH: Bell Tel. Syst. Techn. Publ. **25**, 807, 1937.
- ⁵⁾ CLAVIER: Bull. Soc. Française d. Electriciens, April 1938.
- ⁶⁾ CLAVIER & ALTOVSKY: Rev. Gén. de l'Electr. **45**, 697, 731, 1939.
- ⁷⁾ CHU und BARROW: Proc. Inst. Rad. Eng., Dezember 1938.
- ⁸⁾ BORGNI: Ann. d. Phys. **35**, 359, 1939.
- ⁹⁾ BRILLOUIN: Electrical Communications April 1938.

¹⁾ — ⁶⁾ behandeln den Hohlraumleiter mit kreisförmigem Querschnitt; ⁷⁾ den mit rechteckigem; ⁸⁾ und ⁹⁾ sind allgemeiner gehalten.

Als Hohlraumleiter diene ein in seiner Axialrichtung unendlich ausgedehnter Rechteck von den Kantenlängen a , b (Fig. 4). Das den Hohlraumleiter füllende Dielektrikum sei homogen, isotrop und absorbierend. Längs der Axe des Hohlraumleiters, die wir zur x -Axe machen wollen, pflanze sich in der positiven Richtung eine elektromagnetische Welle fort. Die Feldkomponenten dieser Welle beschreiben die folgenden Gleichungen, für deren Ableitung auf die oben erwähnte Dissertation verwiesen wird. Um den Vergleich mit der Dissertation zu erleichtern, wurden den Gleichungen dieselben

Nummern wie dort zugeteilt. An dieser Stelle sei nur erwähnt, dass auch in dem Fall, dass das Dielektrikum absorbierend ist, zwei getrennte Gruppen von Lösungen gefunden werden, wenn nur der Wandung des Hohlraumleiters eine unendlich gute Leitfähig-

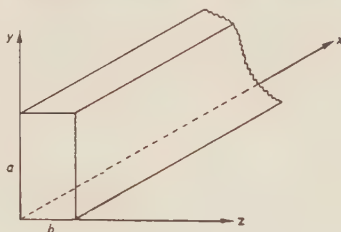


Fig. 4.

keit zugeschrieben werden kann. Die Wellentypen, welche den zwei Lösungen entsprechen, unterscheiden sich dadurch, dass die eine, *E-Wellen genannt*, keine axiale Komponente der magnetischen Feldstärke, die andere, *H-Wellen genannt*, keine axiale Komponente der elektrischen Feldstärke besitzt. Nach dieser Trennung besteht die Aufgabe darin, für beide Gruppen die Randbedingungen befriedigende Lösungen der Wellengleichung $\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$ zu finden.

E-Wellen:

$$E_x = B_E \sin \left(\frac{m\pi}{a} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} z \right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (41a)$$

$$E_y = -i \frac{\gamma'}{k^2} \frac{m\pi}{a} B_E \cos \left(\frac{m\pi}{a} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} z \right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (41b)$$

$$E_z = -i \frac{\gamma'}{k^2} \frac{n\pi}{b} B_E \sin \left(\frac{m\pi}{a} y \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} z \right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (41c)$$

$$H_x \equiv 0 \quad (41d)$$

$$H_y = i \frac{\omega \varepsilon}{k^2} \frac{n\pi}{b} B_E \sin \left(\frac{m\pi}{a} y \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} z \right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (41e)$$

$$H_z = -i \frac{\omega \varepsilon}{k^2} \frac{m\pi}{a} B_E \cos \left(\frac{m\pi}{a} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} z \right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (41f)$$

H-Wellen:

$$E_x \equiv 0 \quad (42a)$$

$$E_y = i \frac{\omega \mu}{k^2} \frac{n\pi}{b} B_H \cos \left(\frac{m\pi}{a} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} z \right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (42b)$$

$$E_z = -i \frac{\omega \mu}{k^2} \frac{m\pi}{a} B_H \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (42c)$$

$$H_x = B_H \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (42d)$$

$$H_y = i \frac{\gamma'}{k^2} \frac{m\pi}{a} B_H \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (42e)$$

$$H_z = i \frac{\gamma'}{k^2} \frac{n\pi}{b} B_H \cos\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cdot e^{i(\omega t - \gamma x) - \beta x} \quad (42f)$$

B_E und B_H sind Amplitudenkonstanten, die die Stärke der Anregung angeben. Formell ist B_E die Amplitude der axialen Komponente der E-Wellen an der Stelle $x = 0$ im Schnittpunkte der diagonalen des Querschnitts. Entsprechendes gilt für B_H .

$$\gamma' = \gamma - i\beta \quad 2\beta\gamma = \omega^2 \varepsilon'' \mu \quad (33a)$$

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \omega^2 \varepsilon' \mu - \gamma^2 + \beta^2 \quad (33b)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\left[\omega^2 \varepsilon' \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 + \omega^4 \varepsilon''^2 \mu^2 + \left[\omega^2 \varepsilon' \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\left[\omega^2 \varepsilon' \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 + \omega^4 \varepsilon''^2 \mu^2 - \left[\omega^2 \varepsilon' \mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]}{2}}$$

ω = Kreisfrequenz.

ε' = reelle Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon'' = 4\pi \frac{\sigma}{\omega} = 2 \frac{\sigma}{\nu}$$

$$\sigma = \text{spezifische Leitfähigkeit} = \frac{\omega \varepsilon''}{4\pi}$$

μ = Permeabilität

m, n = reelle, positive, ganze Zahlen.

in elektro-
magnetischen
c. g. s. Einheiten

Die Ableitung zeigt wiederum die Eigenschaft des rechteckigen Hohlraumleiters, dass zu jedem Zahlenpaar m, n je eine E - und eine H -Welle mit gemeinsamer Dämpfungskonstante β und Phasenmass γ gehören. Solche Wellen haben auch dieselbe Phasengeschwindigkeit v_p und Gruppengeschwindigkeit v_g .

$$v_p = \frac{\omega}{\gamma} \quad (36)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{2\gamma}{\omega \mu} \frac{2\gamma^2 - (\omega^2 \varepsilon' \mu - k^2)}{2\gamma^2 \varepsilon' + \omega^2 \varepsilon''^2 \mu} \quad (37)$$

$$v_d v_g = \frac{2}{\mu} \frac{2\gamma^2 - (\omega^2 \varepsilon' \mu - k^2)}{2\gamma^2 \varepsilon' + \omega^2 \varepsilon''^2 \mu} \quad (38)$$

Wenn a und b gegen Unendlich zunehmen, dann gehen γ und β in die entsprechende Formel für freie ebene Wellen über.

Wenn ε'' verschwindet, dann nimmt (38) den folgenden Wert an:

$$\varepsilon'' = 0 \quad v_d v_g = \frac{1}{\varepsilon' \mu} = v_\infty^2$$

v_∞ = Lichtgeschwindigkeit im unbegrenzten, verlustfreien Medium.

Ausserdem gibt es in diesem Fall eine von 0 verschiedene Frequenz $\omega_K = 2\pi\nu_K$, bei welcher λ_1 , die Wellenlänge im Hohlraumleiter, unendlich wird.

$$\omega_K = 2\pi\nu_K = \sqrt{\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\varepsilon' \mu}} \quad (39)$$

Ist das Dielektrikum verlustfrei, dann kann keine Strahlung von einer Kreisfrequenz kleiner als ω_K durch den Hohlraumleiter übertragen werden. In einem mit Verlust behafteten Dielektrikum gefüllten Hohlraumleiter besteht keine solche kritische Frequenz.

Diese Erkenntnis legte es nahe, die Bestimmung der Feldverteilung abzuleiten.

Wenn $\omega = \omega_K$ haben γ und β denselben Wert:

$$\omega = \omega_K \quad \gamma_K = \beta_K = \omega_K \sqrt{\frac{\varepsilon'' \mu}{2}} \quad (40a)$$

$$\gamma_K = \beta_K = \sqrt{2\sigma} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]} \quad (40b)$$

Bei der kritischen Frequenz wird folglich die Amplitude der Strahlung nach Durchlaufen eines Weges vom Betrage einer Wellenlänge auf ihren 2π -ten Teil gedämpft.

Die E -Welle niedrigster Ordnung ist die mit $m = n = 1$; wäre eine der Zahlen m, n gleich null, dann würden alle Feldkomponenten verschwinden; demgegenüber gibt es auch solche H -Wellen, bei welchen eine der charakteristischen Zahlen m, n gleich null ist.

II b. Verhalten der nicht-ebenen Wellen an Grenzflächen bei senkrechtem Einfall.

Um das Verhalten der Wellen an der Grenzfläche verschiedener Medien zu untersuchen, kann an eine Gleichung in der Ableitung der Feldverteilung angeknüpft werden, die noch keine weitere Annahmen über die Feldvektoren enthält, als dass ihre Abhängigkeit von der Zeit durch den Faktor $e^{i\omega t}$, ihr Verlauf längs der x -Achse durch den Faktor $e^{\mp i\gamma'x}$ ausgedrückt werden. (Siehe Dissertation.)

Die Anordnung sei nach Fig. 5 getroffen:

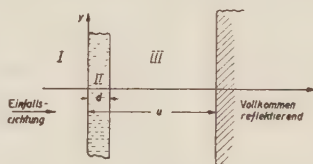


Fig. 5.

Die Wellen sollen sowohl auf die ebene Platte (Medium II), als auch auf die Metallwand senkrecht auffallen. Die Platte und die Wand sind folglich zur y - z -Ebene parallel, in diesen Richtungen sollen sie sich ins Unendliche erstrecken. In allen drei Medien treten auch reflektierte Wellen auf; diese laufen in Richtung der negativen x -Achse; ihre Fortpflanzungskonstante γ'^r ist gleich jener der in der positiven x -Richtung laufenden „einfallenden“ Wellen γ'^e , aber mit negativem Vorzeichen: $\gamma'^r = -\gamma'^e$.

Aus der Einsicht, dass in einer mathematischen Fläche weder Energieanhäufung noch Energieverbrauch möglich sind, folgt die Grenzbedingung der Maxwell'schen Gleichungen des Inhalts, dass die in der Trennungsebene liegenden Komponenten der Feldvektoren die Fläche stetig passieren.

Da die Medien isotrop sind und die Wellen senkrecht einfallen, werden die y - und z -Komponenten in gleichem Masse reflektiert und gebrochen; deshalb ist die Untersuchung des Verhaltens der einen Komponente der elektrischen Feldstärke zum Beispiel der y -Komponente und der damit verbundenen z -Komponente der magnetischen Feldstärke, hinreichend um die Vorgänge an den Trennflächen zu beschreiben.

Versteht man unter $E_{yI}^e(0)$ die in I auftretende, in der Ebene $x = 0$ liegende elektrische Komponente der aus I in II eintretenden Strahlung; unter $E_{yI}^r(0)$ die entsprechende Grösse der aus II

nach Reflexion bei $x = 0$, $x = d$, $x = u$ und Schwächung in II und III in I zurücktretenden Strahlung, dann bedeutet

$$\mathbf{r} = \frac{E_{y_I}^r(0)}{E_{y_I}^e(0)} \quad (46)$$

den Reflexionskoeffizienten des ganzen, rechts von der YZ -Ebene liegenden Gebildes.

Versteht man unter $E_{y_{III}}^e(0)e^{-i\gamma_3'd}$ die nach Reflexion bei $x=0$, $x=d$ und Schwächung in II und III in der Ebene $x=d$ liegende elektrische Komponente der in III eintretenden Strahlung, dann bedeutet

$$\mathbf{d} = \frac{E_{y_{III}}^e(0)}{E_{y_I}^e(0)} \quad (49)$$

den Durchlasskoeffizienten der aus I in III eingetretenen Strahlung.

Man erhält die Reflexionskoeffizienten der E -Type \mathbf{r}_E und den Durchlasskoeffizienten \mathbf{d}_E :

$$\mathbf{r}_E = \frac{g_1 g_2 \cos \gamma_2' d - i g_2^2 \sin \gamma_2' d + i g_3 \operatorname{ctg} \gamma_3' (u-d) [g_2 \cos \gamma_2' d - i g_1 \sin \gamma_2' d]}{g_1 g_2 \cos \gamma_2' d + i g_2^2 \sin \gamma_2' d - i g_3 \operatorname{ctg} \gamma_3' (u-d) [g_2 \cos \gamma_2' d + i g_1 \sin \gamma_2' d]} \quad (53a)$$

$$\mathbf{d}_E = \frac{(\mathbf{r}_E - 1) g_1 \sin \gamma_2' d - i (\mathbf{r}_E + 1) g_2 \cos \gamma_2' d}{2 g_2 \sin \gamma_3' (u - d)} e^{i \gamma_3' u} \quad (53b)$$

$$g_i = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i'} \quad (53c)$$

Und für die H -Welle:

$$\mathbf{r}_H = \frac{h_1 h_2 \cos \gamma_2' d - i h_2^2 \sin \gamma_2' d + i h_3 \operatorname{ctg} \gamma_3' (u-d) [h_2 \cos \gamma_2' d - i h_1 \sin \gamma_2' d]}{h_1 h_2 \cos \gamma_2' d + i h_2^2 \sin \gamma_2' d - i h_3 \operatorname{ctg} \gamma_3' (u-d) [h_2 \cos \gamma_2' d + i h_1 \sin \gamma_2' d]} \quad (54a)$$

$$\mathbf{d}_H = \frac{(\mathbf{r}_H - 1) h_1 \sin \gamma_2' d - i (\mathbf{r}_H + 1) h_2 \cos \gamma_2' d}{2 h_2 \sin \gamma_3' (u - d)} e^{i \gamma_3' u} \quad (54b)$$

$$h_i = \frac{\gamma_i'}{\mu_i} \quad (54c)$$

Wenn u unendlich wird, dann nehmen (53a, b) (54a, b) die Form an, welche von der Interferenz an planparallelen Platten her bekannt ist:

$$\mathbf{r}_E = \frac{g_2 (g_1 - g_3) + i (g_1 g_3 - g_2^2) \operatorname{tg} \gamma_2' d}{g_2 (g_1 + g_3) + i (g_1 g_3 + g_2^2) \operatorname{tg} \gamma_2' d} \quad (53d)$$

$$\delta_E = \frac{\frac{2 g_1 g_2}{\cos \gamma_2' d}}{g_2(g_1 + g_3) + i(g_1 g_3 + g_2^2) \operatorname{tg} \gamma_2' d} e^{i \gamma_2' d} \quad (53e)$$

$$r_H = \frac{h_2(h_1 - h_3) + i(h_1 h_3 - h_2^2) \operatorname{tg} \gamma_2' d}{h_2(h_1 + h_3) + i(h_1 h_3 + h_2^2) \operatorname{tg} \gamma_2' d} \quad (54d)$$

$$\delta_H = \frac{\frac{2 h_1 h_2}{\cos \gamma_2' d}}{h_2(h_1 + h_3) + i(h_1 h_3 + h_2^2) \operatorname{tg} \gamma_2' d} e^{i \gamma_2' d} \quad (54e)$$

Die nach (53a) und 54a) dargestellten Reflexionskoeffizienten können, wenn die Platte (Medium II) absorbiert, unter gewissen Bedingungen verschwinden. Für r_H lauten diese Bedingungen, wenn $h_1 = h_3$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$$\begin{aligned} & (\cos 2 \gamma_2 d + ch 2 \beta_2 d) \gamma_1 [\gamma_2 + \beta_2 \operatorname{ctg} \gamma_1 (u - d)] \\ & + \sin \gamma_2 d [\gamma_1^2 + \operatorname{ctg} \gamma_1 (u - d)] - (\gamma_2^2 - \beta_2^2) sh 2 \beta_2 d = 0 \\ & (\cos 2 \gamma_2 d + ch 2 \beta_2 d) \gamma_1 [\gamma_2 \operatorname{ctg} \gamma_1 (u - d) - \beta_2] \\ & - (\gamma_2^2 - \beta_2^2) \sin 2 \gamma_2 d - [\gamma_1^2 \operatorname{ctg} \gamma_1 (u - d) - 2 \gamma_2 \beta_2] sh 2 \beta_2 d = 0. \end{aligned}$$

IIc. Die Feldverteilung im geraden, abgeschlossenen, rechteckigen Hohlraumleiter, dessen Dielektrikum in der Achenrichtung zwei Unstetigkeitsstellen hat.

Es sei angenommen, dass die im vorhergehenden Abschnitt IIb für unendlich ausgedehnte Trennflächen berechneten Reflexions- und Durchlasskoeffizienten auch für die Wellen im Hohlraumleiter gelten; ist dem aber so, dann kann mit ihrer Hilfe die Feldverteilung im abgeschlossenen Hohlraumleiter bestimmt werden.

Im folgenden seien die Annahmen, die zur Berechnung der Feldverteilung im abgeschlossenen Hohlraumleiter getroffen wurden, zusammengestellt.

1. Die Wellen fallen auf beide Abschlusskolben senkrecht ein.
2. Alle Medien sind isotrop.
3. Die Antenne soll folgende Eigenschaften haben: a) Sie soll die gewünschte Wellentypen einstrahlen; b) die an den beiden Enden des Hohlraumleiters reflektierten Wellen sollen den Ort der Antenne so passieren, als wäre diese nicht vorhanden.
4. Der in den Formeln der eingestrahnten Wellen vorkommende Amplitudenfaktor B sei vom Ort und der Beschaffenheit der den Hohlraumleiter begrenzenden Abschlusskolben unabhängig.

5. Wenn das Dielektrikum im Hohlraumleiter nicht absorbiert, und die beiden Abschlusskolben vollkommen reflektieren, dann wird im Hohlraumleiter keine Energie verbraucht. Da aber die Antenne ständig Energie einstrahlt, müssten im Resonanzfall die Feldstärken unendlich werden. Es ist die sonst vernachlässigbare Dämpfung in der Metallumrandung, die verhindert, dass dies eintritt. Diese Dämpfung α sei so klein, dass sie die Feldverteilung im Querschnitt nicht beeinflusst, bloss eine mit wachsender Entfernung von der Sendeantenne schwache Abnahme der Amplitude verursacht.

Wenn $\beta = 0$, dann lautet die Formel für eine Feldkomponente, z. B. für H_y der H -Wellen, im rechteckigen Hohlraumleiter, der in seiner Axenrichtung unbegrenzt ist:

$$H_y = i \frac{\gamma}{k^2} \frac{m\pi}{a} B_H \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) e^{i(\omega t - \gamma x) - \alpha x}$$

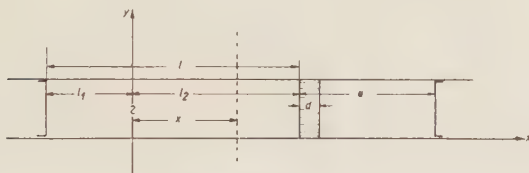


Fig. 7.

Sie geht aus Gleichung (42e), die für absorbierendes Medium und unendlich gut leitende Metallumhüllung gilt, so hervor, dass überall, mit Ausnahme des Exponenten β zu Null gesetzt, im Exponenten selber durch α ersetzt wird. α sei nach CHU und BARROW (loc. cit.) berechnet.

Die Feldstärke an der Stelle x zur Zeit t setzt sich zusammen aus dem Strahl, welcher von der Antenne kommend eben eintrifft und aus Strahlen, die von der Antenne früher eingestrahlt, zwischen den Enden hin- und herreflektiert, die Stelle x eben passieren. Der Teil des Hohlraumleiters, welcher sich jenseits $x - l_2$ erstreckt, wirkt so auf den übrigen Teil zurück, als befände sich an der Stelle $x = l_2$ eine Substanz mit dem Reflexionskoeffizienten r_2 .

Um die nach (46), (53a), (54a) definierten Reflexionskoeffizienten benutzen zu können, ist es vorteilhaft, die Summation für eine im Querschnitt liegende elektrische Feldkomponente durchzuführen, die andere im Querschnitt liegende elektrische Komponente erfährt durch die wiederholten Reflexionen die gleiche Veränderung. Die andern Feldkomponenten bekommt man unter Zuhilfenahme der Maxwell'schen Gleichungen.

In den folgenden Formeln sind unter r_i (den Reflexionskoeffizienten bei $x = -l_1$ und $x = +l_2$) je nach der Wellentype r_E oder r_H zu verstehen. r_1 und r_2 müssen einander nicht gleich sein. Mit dem Index ∞ sei, bis auf den von x abhängigen Faktor, der Wert der Feldstärke im beidseitig offenen Hohlraumleiter bezeichnet. Vor und hinter der Platte (Medium II) sei der Hohlraumleiter mit derselben Substanz gefüllt. (Die Gleichungen (55) und (56) gelten zwar auch dann, wenn $\gamma_1' \neq \gamma_3'$.) Die Permeabilitäten μ_i können in allen Gleichungen gleich μ_0 , Permeabilität des Vakuums, gesetzt werden.

Für die Feldverteilung in den anderen Abschnitten des Hohlraumleiters sei auf die Dissertation verwiesen.

$$0 < x < l_2$$

$$\gamma_1' = \gamma_3' = \gamma'; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon$$

E-Wellen:

$$E_x = E_{x\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma' 2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma' 2l}} [e^{-i\gamma' x} - r_2 e^{-i\gamma' (2l_2 - x)}] \quad (55a)$$

$$E_y = E_{y\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma' 2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma' 2l}} [e^{-i\gamma' x} + r_2 e^{-i\gamma' (2l_2 - x)}] \quad (55b)$$

$$E_x = E_{z\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma' 2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma' 2l}} [e^{-i\gamma' x} + r_2 e^{-i\gamma' (2l_2 - x)}] \quad (55c)$$

$$H_x = H_{x\infty} \equiv 0 \quad (55d)$$

$$H_y = H_{y\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma' 2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma' 2l}} [e^{-i\gamma' x} - r_2 e^{-i\gamma' (2l_2 - x)}] \quad (55e)$$

$$H_z = H_{z\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma' 2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma' 2l}} [e^{-i\gamma' x} - r_2 e^{-i\gamma' (2l_2 - x)}] \quad (55f)$$

H-Wellen:

$$E_x = E_{x\infty} \equiv 0 \quad (56a)$$

$$E_y = E_{y\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma' 2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma' 2l}} [e^{-i\gamma' x} + e^{-i\gamma' (2l_2 - x)}] \quad (56b)$$

$$E_z = E_{z\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma' 2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma' 2l}} [e^{-i\gamma' x} + e^{-i\gamma' (2l_2 - x)}] \quad (56c)$$

$$H_x = H_{x\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma'2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma'2l}} [e^{-i\gamma'x} + e^{-i\gamma'(2l_2-x)}] \quad (56d)$$

$$H_y = H_{y\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma'2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma'2l}} [e^{-i\gamma'x} - r_2 e^{-i\gamma'(2l_2-x)}] \quad (56e)$$

$$H_z = H_{z\infty} \frac{1 + r_1 e^{-i\gamma'2l_1}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\gamma'2l}} [e^{-i\gamma'x} - r_2 e^{-i\gamma'(2l_2-x)}] \quad (56f)$$

Die Feldverteilung im Raum $-l_1 < x < 0$ wird erhalten durch Ersetzen von l_1 durch l_2 , r_1 durch r_2 .

IIId. Energie-Inhalt und Abstimmung des Hohlraumleiters.

1. Der Energieinhalt. — Der Hohlraumleiter nimmt vom Sender fortlaufend Energie auf. Nachdem sich der Beharrungszustand ausgebildet, dient diese Energie zur Deckung des Verlustes, welcher dadurch entsteht, dass die Leitfähigkeit der metallischen Umrandung nicht vollkommen, die des Dielektrikums nicht Null ist; da der Hohlraumleiter abgeschlossen ist, kommen Strahlungsverluste nicht in Betracht.

Der direkte Weg zur Bestimmung der Energieaufnahme des Hohlraumleiters wäre die Berechnung der Ausstrahlung der Erregerantenne unter Berücksichtigung der vom Hohlraumleiter auf sie ausgeübten Rückwirkung. Diese Rechnung dürfte recht schwierig sein. Wenn man sich aber damit begnügt, zu wissen, wie es sich um die Energieaufnahme bei gegebener Lage einer gegebenen Substanz bei verschiedenen Lagen der Abschlusskolben verhält, dann kommt man auch anders zum Ziel.

Die entstehenden Verluste sind um so grösser, je grösser der elektromagnetische Energieinhalt Q des Hohlraumleiters. Da die Feldverteilung im ganzen Hohlraumleiter bekannt ist, kann dieser Energieinhalt berechnet werden. Die Schwierigkeit der Rechnung läge nicht im Aufwand an Mathematik, sondern in der Unhandlichkeit der Formeln. Ein einfacher Fall, welcher auch zur Bestimmung der elektrischen Konstanten der zu untersuchenden Substanzen benützt wird, sei im folgenden durchgerechnet.

Die Versuchsanordnung sei so getroffen, dass die Platte aus der zu untersuchenden Substanz auf dem Kolben bei l_2 aufliegt; nach Fig. 7 bedeutet dies: $u = d$. Wenn der Abschlusskolben bei $x = -l_1$ aus einem vollkommen leitenden Metall besteht, dann wird $r_1 = -1$. In diesem Fall kommt in den Formeln nur der Reflexionskoeffizient des aus Substanz und Metallkolben bestehenden Gebildes, r_2 , vor.

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_E \text{ oder } \mathbf{r}_H; \quad \varepsilon_1'' = 0 \quad \beta_1 = 0 \quad \gamma_1' = \gamma_1 \quad \varepsilon_2'' \neq 0 \quad \gamma_2' = \gamma_2 - i\beta_2$$

$$\underline{u = d} \quad \mathbf{r}_H = - \frac{\gamma_2' - i\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2' d}{\gamma_2' + i\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2' d} \quad (63a)$$

$$\mathbf{r}_E = - \frac{\gamma_1 \varepsilon_2 - i\gamma_2' \varepsilon_1 \operatorname{tg} \gamma_2' d}{\gamma_1 \varepsilon_2 + i\gamma_2' \varepsilon_1 \operatorname{tg} \gamma_2' d} \quad (63b)$$

Die Energiedichte

$$w = \frac{1}{8\pi} (\overline{\mathfrak{E}^2} + \overline{\mathfrak{H}^2}) = \frac{1}{16\pi} (\mathfrak{E} \mathfrak{E}^* + \mathfrak{H} \mathfrak{H}^*) \quad (64a)$$

Der Energieinhalt des ganzen Hohlraumleiters Q :

$$Q = \iint df \left(\int_{-l_1}^0 w dx + \int_0^{l_2} w dx + \int_{l_2}^{l_2+d} w dx \right) \quad (64b)$$

Die Summe der zwei ersten Integrale gibt den Energieinhalt des leeren Teiles des Hohlraumleiters, das dritte Glied stellt den Anteil des mit der Substanz gefüllten Abschnittes dar. Dieses dritte Integral liefert, da die Ausgangsgleichungen selber recht umfangreich sind, sehr unübersichtliche Formeln. Man kann es aber leicht abschätzen, ob es erlaubt wäre, dieses letzte Glied zu vernachlässigen.

Aus der Kontinuität der Energieströmung an Trennflächen folgt, dass das Produkt aus Energiedichte und Gruppengeschwindigkeit an beiden Seiten der Trennfläche konstant ist.

$$w_{30} v_{g3} = w_2 v_{g2}. \quad (65)$$

Unter w_2 sei die Energiedichte im Raum $0 < x < l_2$ unter w_{30} , die im Dielektrikum längs der Ebene $x = l_2$ verstanden. w_2 ist im ganzen Raum $0 < x < l_2$ konstant, w_3 nimmt in der Substanz wie $e^{-2\beta_2 x}$ ab.

$$\begin{aligned} Q_2 &= \iint df \int_0^{l_2} w_2 dx = f l_2 w_2; \quad Q_3 = \iint df \int_{l_2}^{l_2+d} w_3 dx \\ &= f w_{30} \int e^{-2\beta_2 x} dx = f \frac{w_{30}}{2\beta_2} (1 - e^{-2\beta_2 d}) e^{-2\beta_2 l_2} \\ \frac{Q_3}{Q_2} &= \frac{v_{g2}}{v_{g3}} \frac{1 - e^{-2\beta_2 d}}{2\beta_2 l_2} e^{-2\beta_2 l_2} \quad (66) \\ v_{g2} &= \frac{\gamma_1}{\omega \varepsilon_1' \mu_0} \quad (\text{aus 37}) \end{aligned}$$

$$v_{g3} = \frac{2 \gamma_2}{\omega \mu_0} \frac{1 - \frac{\omega^2 \varepsilon_2' \mu_0 - k^2}{2 \gamma_2^2}}{\varepsilon_2' + \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2''^2}{2 \gamma_2^2}} \quad (\text{aus 37})$$

Wenn die Betriebsfrequenz des Hohlraumleiters genügend weit entfernt von der kritischen Frequenz ist, dann kann die Wellenlänge im Hohlraumleiter gleich der Wellenlänge im unbegrenzten Dielektrikum gesetzt werden, in einer Näherung, welche zur vorliegenden Abschätzung gut genug ist.

$$\omega \gg \omega_K$$

$$\gamma_1 = \frac{2 \pi}{\lambda_1} \approx \omega \sqrt{\varepsilon_1' \mu_0}; \quad \gamma_2 = \frac{2 \pi}{\lambda_2} \approx \omega \sqrt{\frac{\mu_0}{2} [\sqrt{\varepsilon_2'^2 + \varepsilon_2''^2} + \varepsilon_2']};$$

$$\beta_2 \approx \omega \sqrt{\frac{\mu_0}{2} [\sqrt{\varepsilon_2'^2 + \varepsilon_2''^2} - \varepsilon_2']}$$

$$1. \beta_2 = 0$$

$$v_{g3} = \frac{\gamma_2}{\omega \varepsilon_2' \mu_0}; \quad \lim_{\beta_2 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\beta_2 d}}{2 \beta_2} = d; \quad \lim_{\beta_2 \rightarrow 0} e^{-2 \beta_2 l_2} = 1$$

$$\frac{v_{g1}}{v_{g3}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'}}$$

$$\frac{Q_3}{Q_2} = \frac{d}{l_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'}} \quad (67)$$

In den Versuchen sind: $d \leq 1 \text{ cm}$; $l_2 \sim 100 \text{ cm}$.

$$\frac{Q_3}{Q_2} \sim 10^{-2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'}}$$

$$2. \varepsilon_2'' \rightarrow \infty; \beta_2 \rightarrow \infty$$

$$v_{g3} \text{ verschwindet wie } \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2''}}$$

$$\beta_2 \text{ wird unendlich wie } \sqrt{\varepsilon_2''}$$

$$\frac{Q_3}{Q_2} = \frac{v_{g2}}{v_{g3}} \int_{l_2}^{l_2+d} e^{-2 \beta_2 x} dx; \quad \text{wenn } \varepsilon_2'' \rightarrow \infty, \text{ dann:}$$

$$\frac{1}{v_{g3}} \int_{l_2}^{l_2+d} e^{-2 \beta_2 x} dx \approx \sqrt{\varepsilon_2''} \int_{l_2}^{l_2+d} e^{-\sqrt{\varepsilon_2''} x} dx$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \int_{l_2}^{l_2+d} e^{-zx} dx = 0$$

$$\frac{Q_3}{Q_2} = 0$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten; ist nämlich das Medium verlustbehaftet, dann wird die eintretende Energie zerstreut und findet sich nicht wieder als elektromagnetischer Energieinhalt.

Da der Anteil des Dielektrikums am Energieinhalt durch Verkleinerung von d/l_2 beliebig klein gemacht werden kann (67), gilt in guter Näherung:

$$Q = \iint df \left(\int_{-l_1}^0 w dx + \int_0^{l_2} w dx \right)$$

Für E-Wellen:

$$(\mathbf{r} = r e^{i\delta}) \quad \epsilon_1 = \epsilon_0, \text{ DK. des Vakuums.}$$

$$Q_E = \epsilon_0 B_E^2 \frac{ab}{1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos(2\gamma_1 l - \delta)} \left\{ [1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos(2\gamma_1 l_2 - \delta)] \right. \\ \left. \left[\left(1 + \frac{\gamma_1}{k^2} \right) \gamma_1 l_1 + \frac{\sin 2\gamma_1 l_1}{2} \right] \right. \\ \left. + (1 - \cos 2\gamma_1 l_1) \left[(1 + r_2^2) \left(1 + \frac{\gamma_1}{k^2} \right) \gamma_1 l_2 - 2 r_2 \sin \gamma_1 l_2 \cos(\gamma_1 l_2 - \delta) \right] \right\} \quad (68a)$$

Für H-Wellen:

$$(\mathbf{r} = r e^{i\delta}) \quad \epsilon_1 = \epsilon_0 \quad \text{DK. des Vakuums.}$$

$$Q_A = \mu_0 B_H^2 \frac{ab}{1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos(2\gamma_1 l - \delta)} \left\{ [1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos(2\gamma_1 l_2 - \delta)] \right. \\ \left. \left[\left(1 + \frac{\gamma_1^2}{k^2} \right) \gamma_1 l_1 - \frac{\sin 2\gamma_1 l_1}{2} \right] \right. \\ \left. + (1 - \cos 2\gamma_1 l_1) \left[\left(1 + \frac{\gamma_1^2}{k^2} \right) \gamma_1 l_2 + 2 r_2 \sin \gamma_1 l_2 \cos(\gamma_1 l_2 - \delta) \right] \right\}$$

$|\sin 2\gamma_1 l_1|$ und $|\sin \gamma_1 l_2 \cdot \cos(\gamma_1 l_2 - \delta)|$ sind maximal eins; man kann sie, wenn $\gamma_1 l_1$ und $\gamma_2 l_2$ viel grösser als eins sind, neben

$\left(1 + \frac{\gamma_1^2}{k^2}\right) \cdot \gamma_1 l_1$, bzw. $\left(1 + \frac{\gamma_1^2}{k^2}\right) \gamma_1 l_2$ vernachlässigen. In diesem Falle wird der Energieinhalt am grössten, wenn $1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos (2 \gamma_1 l - \delta)$ am kleinsten, $1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos (2 \gamma_1 l_2 - \delta)$ und $1 - \cos 2 \gamma_1 l_1$ am grössten sind.

Das Minimum von $1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos (2 \gamma_1 l - \delta)$ wird erreicht, wenn $\cos (2 \gamma_1 l - \delta) = -1$. Daraus folgt:

$$2 \gamma_1 (l_1 + l_2) - \delta = (2 p + 1) \pi \quad (69a)$$

Das Maximum von $1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos (2 \gamma_1 l_2 - \delta)$ wird erreicht, wenn $\cos (2 \gamma_1 l_2 - \delta) = +1$, daraus folgt:

$$2 \gamma_1 (l_2 - \delta) = 2 q \pi \quad (69b)$$

$1 - \cos 2 \gamma_1 l_1$ wird maximal, wenn $\cos 2 \gamma_1 l_1 = -1$; folglich:

$$2 \gamma_1 l_1 = (2 s + 1) \pi \quad (69c)$$

p, q, s beliebige positive ganze Zahlen.

(69b) + (69c) gibt (69a). Folglich können die drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden.

Dieses Ergebnis ist auch anschaulich: Wenn die bei $+l_2$ reflektierten Wellen in den Raum $-l_1 < x < 0$ gleichphasig mit der direkten Antennenstrahlung eintreten, dann ist die Amplitude der Wellen in diesem Raum am grössten. Um die Gleichphasigkeit zu erreichen, muss der optische Weg von der Antenne zu l_2 und zurück ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge im Hohlraumleiter sein: Bedingung (69b). Eine ähnliche Überlegung für den Raum $0 < x < l_2$ führt zu (69c).

Wenn $2 \gamma_1 l_1 \neq (2 s + 1) \pi$, dann gibt es in Abhängigkeit von l_2 Maxima des Energie-Inhaltes, für welche l_2 nicht der Bedingung (69b) gehorcht; der Betrag dieser Maxima ist kleiner, als wenn die Bedingungen (69b, c) erfüllt werden. Analoges gilt für den Fall, dass $(2 \gamma_1 l_2 - \delta) \neq 2 q \pi$.

Wurde irgendwie eine Einstellung der Reflexionskolben festgestellt, für welche die Energieaufnahme am grössten ist, dann folgen von dieser Einstellung ausgehend, die andern nach den Gleichungen (69b), (c).

2. Die Abstimmung. — Ein in den Hohlraumleiter eingeführter Detektor zeigt in Abhängigkeit von der Einstellung der beiden Abschlusskolben verschieden grosse Ausschläge. Im folgenden sei eine solche „Resonanzkurve“ berechnet und ihre Symmetrieeigenschaft

ten diskutiert. Die Resonanzlängen, das heisst die Distanzen l_1 und l_2 , für welche der Detektorausschlag maximal wird, werden errechnet und ihr Zusammenhang mit den im vorhergehenden Abschnitt gezeigten Bedingungen für maximalen Energieinhalt dargelegt.

Die folgenden Rechnungen beruhen auf der Annahme, dass der im Hohlraumleiter befindliche Detektor das Feld nicht merklich stört. Seine Anzeige wird deshalb dem quadratischen zeitlichen Mittelwert der Feldstärke verhältnismässig gesetzt, die in seiner Abwesenheit an seinem Orte herrschte.

Für den schon oben behandelten Fall, dass $u = d$, $r_1 = -1$, sei E_y als Funktion von l_1 , l_2 , r_2 und dem Orte des Detektors untersucht. Die Rechnung sei auf den Raum $0 < x < l_2$ beschränkt.

$$0 < x < l_2:$$

$$\overline{E_y^2} = E_{y\infty} E_{y\infty}^* (1 - \cos \gamma_1 l_1) \frac{1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos [2 \gamma_1 (l_2 - x) - \delta]}{1 + r_2^2 + 2 r_2 \cos (2 \gamma_1 l - \delta)}$$

$$l = |l_1| + |l_2|$$

E-Wellen:

$$E_{y\infty} E_{y\infty}^* = \frac{\gamma_1^2}{k^4} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 B_E^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} y \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} z \right)$$

H-Wellen:

$$E_{y\infty} E_{y\infty}^* = \frac{(\omega \mu)^2}{k^4} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 B_H^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} y \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} z \right)$$

Wenn $\overline{E_y^2}$ in Abhängigkeit von l_1 , l_2 , r_2 und x untersucht wird, dann ist $E_{y\infty} \cdot E_{y\infty}^*$ konstant, gleich A_1 . $1 + r_2^2 = A_2$; $2 r_2 = A_3$; A_2 und A_3 sind positiv.

Die Nullstellen von $\overline{E_y^2}$, falls es solche gibt, fallen mit seinen Minima zusammen.

$$\overline{E_y^2} = A_1 (1 - \cos 2 \gamma_1 l_1) \frac{A_2 + A_3 \cos [2 \gamma_1 (l_2 - x) - \delta]}{A_2 + A_3 \cos (2 \gamma_1 l - \delta)} \quad (70)$$

Aus (70) folgt, dass bei festgehaltenem l_1 , l_2 und r_2 $\overline{E_y^2}$ eine Cosinusfunktion mit der räumlichen Periode $\lambda/2$ des Ortes x ist.

$\bar{E}_y^2(x)$

wird

$$\text{wenn } 2\gamma_1(l_2 - x) - \delta = (2q + 1)\pi \text{ Minimum} \quad (71a)$$

$$\text{wenn } 2\gamma_1(l_2 - x) - \delta = 2q\pi \quad \text{Maximum} \quad (71b)$$

$$\bar{E}_{y\min}^2(x) = A_1(1 - \cos 2\gamma_1 l_1) \frac{A_2 - A_3}{A_2 + A_3 \cos(2\gamma_1 l - \delta)} \quad (71c)$$

$A_2 - A_3 = (1 - r_2)^2$, wäre $|r_2| = 1$, dann würde kein Energietransport nach der dielektrischen Platte stattfinden, es bestünde keine fortlaufende Welle, das Minimum wäre eine Nullstelle.

$$\bar{E}_{y\max}^2(x) = A_1(1 - \cos 2\gamma_1 l_1) \frac{A_2 + A_3}{A_2 + A_3 \cos(2\gamma_1 l - \delta)} \quad (71d)$$

 $\bar{E}_y^2(l_1):$

$$\text{wenn } 2\gamma_1 l_1 = 2q\pi; \quad l_1 = q\lambda/2 \quad (72a)$$

$$\text{dann} \quad \bar{E}_y^2(l_1) = 0$$

Die Extrema als Funktion von l_1 werden erhalten aus:

$$\frac{\partial \bar{E}_y^2}{\partial l_1} = 0; \quad 2 \sin \gamma_1 l_1 \{A_2 \cos \gamma_1 l_1 + A_3 \cos [\gamma_1(l_1 + 2l_2) - \delta]\} = 0$$

$\sin \gamma_1 l_1 = 0$ gibt (72a), den Ort des senderseitigen Abschlusskolbens, für welchen \bar{E}_y^2 verschwindet; setzt man den Inhalt der geschweiften Klammer zu Null, dann erhält man:

$$\text{tg } \gamma_1 l_1 = \frac{A_2 + A_3 \cos(2\gamma_1 l_2 - \delta)}{A_3 \sin(2\gamma_1 l_2 - \delta)} \quad (72b)$$

Die Orte des senderseitigen Kolbens, für welche \bar{E}_y^2 maximal wird, hängen vom Betrage und Phase von r_2 , und von l_2 ab. Da die Orte, für welche \bar{E}_y^2 verschwindet, unabhängig von den obigen Grössen sind, sind im allgemeinen die Resonanzkurven unsymmetrisch. Wenn

$$2\gamma_1 l_2 - \delta = q\pi, \quad (72c)$$

wird die Resonanzkurve symmetrisch, ihre Maxima erhält man für:

$$l_1 = (2s + 1)\lambda/4 \quad (72d)$$

Wenn q in (72c) gerade ist, dann kann \bar{E}_y^2 in Abhängigkeit von l_1 zu einem absoluten Maximum werden. In diesem Falle gilt:

$$2\gamma_1 l_1 - \delta = 2q\pi \quad (72e)$$

$$\underline{E_y^2(l_2):}$$

Die Extrema erhält man aus:

$$\frac{\partial \bar{E}_y^2}{\partial l_2} = 0; \quad A_2 \cos [\gamma_1(l_1 + 2l_2 - x) - \delta] + A_3 \cos \gamma_1(l_1 + x) = 0 \quad (73a)$$

Die Resonanzkurve wird nur dann symmetrisch, wenn

$$\begin{aligned} \gamma_1(l_1 + x) &= (2s + 1)\pi/2 \\ l_1 + x &= (2s + 1)\lambda_1/4 \end{aligned} \quad (73b)$$

In diesem Falle geht (73a) über in:

$$\sin [2\gamma_1(l_2 - x) - \delta] = 0; \quad 2\gamma_1(l_2 - x) - \delta = m\pi \quad (73c)$$

Mit (73b) geht (70) über in die Form:

$$\bar{E}_y^2 = A_1(1 + \cos 2\gamma_1 x) \frac{A_2 - A_3 \cos (2\gamma_1 l - \delta)}{A_2 + A_3 \cos (2\gamma_1 l - \delta)} \quad (73d)$$

welche symmetrisch zu den Extrema ist; mit (73b) und (73c) in die Form:

$$\bar{E}_y^2 = A_1(1 + \cos 2\gamma_1 x) \frac{A_2 + A_3 \cos m\pi}{A_2 + A_3 \cos [m\pi + (2s + 1)\pi]} \quad (74e)$$

Für gerade m wird (73e) ein Maximum, für ungerade m ein Minimum. Ist ausserdem $2\gamma_1 x = 2n\pi$, dann ist \bar{E}_y^2 als Funktion von l_2 und x absolutes Maximum. Wenn

$$x = n\lambda_1/2 \quad (73f)$$

dann

$$l_1 = (2s + 1)\lambda_1/4 \quad (73g)$$

und

$$2\gamma_1 l_2 - \delta = 2t\pi \quad (73h)$$

Die Bedingungen (72d, e) (73g, h) fallen mit den Bedingungen (69b, c), welche für maximalen Energieinhalt gelten, zusammen. Stellt man die beiden Abschlusskolben so ein, dass der Energieinhalt und mit diesem die Energie-Aufnahme zu einem Maximum werden, und verschiebt man den Detektor bei festgehaltenem Abschlusskolben, bis das damit verbundene Galvanometer den grössten Ausschlag zeigt, dann erhält man sowohl in Abhängigkeit von l_1 wie von l_2 symmetrische Resonanzkurven.

Zum richtigen Verständnis des Inhaltes der Gleichungen (69b, c), (72d, e), (73g, f) ist zu beachten, dass: Da sowohl die

Sendeantenne wie auch der Detektor auf die im Hohlraumleiter hin und her reflektierten Wellen wie Gebilde mit komplexem Reflexions- und Durchlasskoeffizienten wirken, ausserdem die Sendeantenne sicherlich ein Nahfeld, in welchem die Wellentypen noch nicht ausgebildet ist, hat, zeigen die oben erwähnten Gleichungen bloss das an, dass es Orte der Abschlusskolben und des Detektors gibt, für welche die Resonanzkurven symmetrisch werden und die Resonanzlängen unabhängig vom Betrage des Reflexionskoeffizienten der Abschlusskolben sind.

III. Die Messmethode.

Die elektrischen Konstanten (ϵ' , σ) der zu untersuchenden Substanz kommen in allen Gleichungen, welche das Verhalten des abgeschlossenen Hohlraumleiters beschreiben, vor. Prinzipiell können sie alle zur Bestimmung von ϵ' , σ dienen.

Wenn es sich um die Untersuchung einer isotropen Platte handelt, dann ist es gleichgültig, welche Wellentypen zur Messung benützt wird. Die H_{01} -Wellen haben aber den Vorzug, dass ihre elektrischen Feldlinien je nach der Erregung zur y - oder z -Achse parallel polarisiert sind. Aus diesem Grunde eignet sich diese Wellentypen auch zur Untersuchung von Kristallen.

Um dies einzusehen, sei daran erinnert, dass die H_{01} -Wellen in zwei ebene Wellen zerlegt werden können (siehe auch CUR und BARROW, loc. cit.). Ist nun der zu untersuchende Kristall so geschliffen, dass eine der Hauptachsen seiner Indikatrix zur Schwingungsrichtung der elektrischen Feldstärke der H_{01} -Wellen parallel liegt, dann tritt keine Doppelbrechung auf und der Kristall verhält sich wie ein isotroper Körper, wenn er nicht optisch aktiv ist.

Die weiteren Rechnungen beschränken sich deshalb auf die Untersuchung von $H_{m,n}$ -Wellen.

Die schon oben diskutierte Anordnung, bei welcher die zu untersuchende Substanz auf dem empfängerseitigen Abschlusskolben aufliegt ($u = d$), ermöglicht es, mit der Gleichung (56) allein auszukommen. Man kann folgendermassen verfahren: 1. Man misst den absoluten Betrag des Reflexionskoeffizienten $|r|$ und den Phasensprung δ ; 2. man misst in Abhängigkeit von der Dicke der Substanz *entweder* den absoluten Betrag des Reflexionskoeffizienten *oder* den Phasensprung.

Bestimmt man den Betrag des Reflexionskoeffizienten, dann müssen zwei Detektorausschläge ihrer Grösse nach verglichen werden. Da aber sowohl die Detektorempfindlichkeit als auch die vom Sender ausgestrahlte Energie Schwankungen unterworfen sind, ist

diese Methode nicht zuverlässlich. Ist noch hierzu die Absorption in der zu untersuchenden Substanz nicht viel grösser als in der metallischen Umhüllung, dann darf die Wand des Hohlraumleiters nicht als vollkommener Leiter betrachtet werden.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass, wenn l_1 ein ungerades Vielfaches der Viertel-Wellenlänge, x ein ganzes Vielfaches der halben Wellenlänge sind, dann die Resonanzlänge von l_2 einzig von δ abhängt. Vergleicht man die Resonanzlänge bei eingeführter Substanz mit der Resonanzlänge bei beidseitig metallischem Abschluss, dann kann der Phasensprung δ gemessen werden. Aus der Messung von δ für zwei verschiedene Dicken δ der Substanz können ε' und σ berechnet werden. Bei dieser Messmethode spielen die Schwankungen der Detektorempfindlichkeit keine Rolle, da man nur auf Maxima einstellt und die Grösse der Ausschläge nicht miteinander vergleicht. Die Veränderung der vom Sender ausgestrahlten Energie spielt nur sofern eine Rolle, als damit eine Frequenzänderung und eine Änderung der Resonanzlänge aufgetreten wären. Die Unsicherheit in der Messung der Resonanzlänge ist gleich der Unsicherheit in der Bestimmung der Wellenlänge und beträgt etwa 1%.

Die Dämpfung in den Metallwänden tritt in der Resonanzlänge auf. Der Phasensprung bei der Reflexion an der Oberfläche eines idealen Leiters beträgt π . Die Änderung der Resonanzlänge, welche durch die Endlichkeit der Leitfähigkeit der Wände des Hohlraumleiters verursacht wird, kann in zwei Beträge aufgeteilt werden: 1. in den durch die Reflexion am Abschlusskolben verursachten; 2. in den durch die exponentielle Abnahme der Amplitude bedingte örtliche Verschiebung der Maxima der pseudostehenden Wellen. Der erste Anteil folgt aus (54a), wenn berücksichtigt wird, dass für hohe Leitfähigkeit $\gamma \sim \beta$:

$$r \sim - \left[1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - i \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right] \quad (74)$$

$$(\text{tg } \delta)_1 \sim \delta \sim \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{Al}}\omega\mu_0}}$$

$\sigma_{\text{Al}} = 27 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$; λ Wellenlänge im Vakuum, ca. 2,2 cm; λ_1 ca. 3,1 cm; γ_1 ca. 2/cm.

$$\delta_1 = 4\pi \frac{(\Delta l_2)_1}{\lambda} \sim 6 \cdot 10^{-5} \quad (\Delta l_2)_1 \sim 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \quad (75)$$

Den zweiten Anteil kann man aus der nach Bemerkung 5, Seite 20 umgeformten Gleichung (56b) berechnen:

$$\overline{E_y^2} = E_{y\infty} E_{y\infty}^* \frac{\operatorname{ch} 2\alpha l_1 - \cos 2\gamma_1 l_1}{\operatorname{ch} 2\alpha(l_1+l_2) - \cos 2\gamma_1(l_1+l_2)} [\operatorname{ch} 2\alpha(l_2-x) - \cos 2\gamma_1(l_2-x)] \quad (76)$$

mit

$$l_i = l_i \circ_{A1=\infty} + \Delta l_1; \quad (\Delta l_1)_2 = (\Delta l_2)_2 = \left(\frac{\Delta l}{2}\right)_2; \quad x \sim n \frac{\lambda_1}{2};$$

$$\alpha \sim 10^{-4} \text{ neper/cm} \quad (\Delta l)_2 \sim -2 \left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right)^2 (l_1 + l_2) \sim 10^{-6} \text{ cm} \quad (77)$$

$$|(\Delta l_2)_1| + |(\Delta l)_2| < 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

Die durch die Dämpfung im Metall verursachte Änderung der Resonanzlänge liegt folglich innerhalb der Messgenauigkeit.

Die Gleichung (76) zeigt, dass grosse Gesamtlänge wie grosser Abstand zwischen Abschlusskolben und Detektor die Resonanzkurve abflachen.

Da $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$; $\mu_0 h_1 = \gamma_1' = \gamma_1$; $\mu_0 h_2 = \gamma_2 = \gamma_2 - i\beta_2$, erhält man aus (63a), wenn die folgenden Grössen eingeführt werden:

$$D = \gamma_1 d; \quad \xi = \gamma_2 d; \quad \eta = \beta_2 d \quad (78)$$

$$\operatorname{tg} \delta = -2D \frac{(\cos 2\xi + \operatorname{ch} 2\eta)(\eta \operatorname{sh} 2\eta + \xi \sin 2\xi)}{(\xi^2 + \eta^2)(\cos 2\xi + \operatorname{ch} 2\eta)^2 - D^2(\sin^2 2\xi + \operatorname{sh}^2 2\eta)} \quad (79)$$

Durch Änderung der Dicke der zu untersuchenden Substanz kann es erreicht werden, dass $\operatorname{tg} \delta$ verschwindet. Wenn dieser Fall eintritt, dann ist $\delta = q\pi$. Wenn q ungerade ist, dann ist die Resonanzlänge l_2 bei Messung mit der auf dem Metallkolben aufliegenden Substanz gleich der Resonanzlänge bei der Messung mit rein metallischem Abschlusskolben; wenn q gerade ist, dann erreicht die Abweichung zwischen den beiden obengenannten Resonanzlängen ihren grössten Wert: $\lambda_1/2$.

In beiden Fällen gilt: $\operatorname{tg} \delta = 0$, folglich wird

$$\underline{\underline{\eta \operatorname{sh} 2\eta = -\xi \sin 2\xi}} \quad (80a)$$

und

$$r = \frac{D^2(\sin^2 2\xi + \operatorname{sh}^2 2\eta) - (\xi^2 + \eta^2)(\cos 2\xi + \operatorname{ch} 2\eta)^2}{[\xi(\cos 2\xi + \operatorname{ch} 2\eta) + D \operatorname{sh} 2\eta]^2 + [\eta(\cos 2\xi + \operatorname{ch} 2\eta) - D \sin 2\xi]^2} \quad (80b)$$

Durch den Versuch kann man zwei Werte d_1 und d_2 bestimmen, welche die Gleichung (80a) befriedigen. Aus der graphischen Darstellung der Funktion $\eta \operatorname{sh} 2\eta = -\xi \sin 2\xi$ sucht man zwei Wertepaare ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 auf, welche die Bedingung

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{d_1}{d_2} \quad (81a)$$

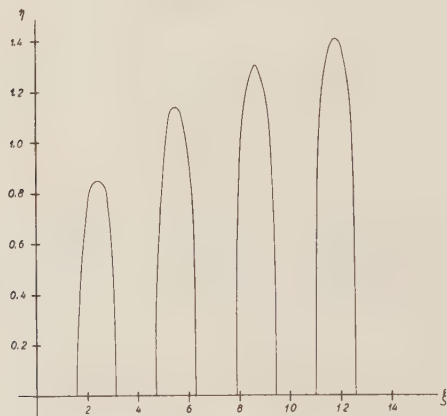


Fig. 8.

Die vier ersten Äste der Funktion $\eta \operatorname{sh} 2\eta = -\xi \sin 2\xi$. $\eta = f(\xi)$ hat nur für solche Werte von ξ , welche zwischen $(2n+1)\pi/2$ und $2(n+1)\pi/2$ liegen eine reelle Lösung.

erfüllen. Daraus ergibt sich wegen 78:

$$\gamma_2 = \frac{\xi_1}{d_1} = \frac{\xi_2}{d_2}; \quad \beta_2 = \frac{\eta_1}{d_1} = \frac{\eta_2}{d_2} \quad (81b)$$

Endlich erhält man vermöge (17a), (33a, b), (78) die elektrischen Konstanten ε_2' und σ :

$$\varepsilon_2' = \left(k^2 + \frac{\xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2}{d_1 d_2} \right) \frac{1}{\omega^2 \mu_0} \quad (82a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2}}{2 \pi \mu_0 \omega d_1 d_2} \quad (82b)$$

In (82a) und (82b) wurden gesetzt:

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{\xi_1}{d_1} \frac{\xi_2}{d_2}}; \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\eta_1}{d_1} \frac{\eta_2}{d_2}}$$

IV. Die Beschreibung der Apparatur und ihres Betriebes.

a) Die Beschreibung der Apparatur:

Die Fig. 9 zeigt die Übersicht der Versuchsanordnung: Magnetron mit Magnet und Hohlraumleiter.

Die Beschreibung des Magnetron findet sich in der Elektrotechnischen Zeitschrift 1909, S. 446.

Das Magnetron und der Senderteil des Hohlraumleiters sind auf einen Schlitten montiert. Dieser kann auf einer Zeißscheine zwischen den Magnetpolen senkrecht zur Feldrichtung verschoben werden. Fig. 10 zeigt diesen Schlitten (Hauptschlitten).

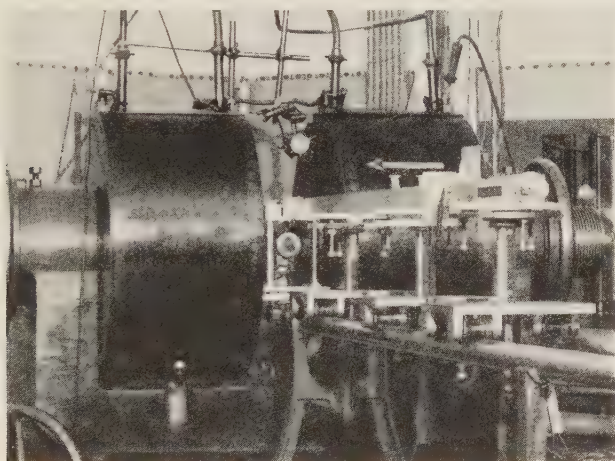


Fig. 9.

Übersicht der Apparatur.

Auf diesem Bilde befindet sich rechts vom Magnetron der Kontrollempfänger (Thermokreuz 4003P der Standard Comp.; Anzeiginstrument Siemens-Halske Drehspulgalvanometer, Empfindlichkeit $5 \cdot 10^{-9}$ A/mm/m). Das die Ankopplung des Kontrollempfängers bewerkstelligende Doppeldrahtsystem dient unter Umständen zur Messung der Wellenlänge der Magnetronschwingungen. Die Grundplatte, auf welche das Thermokreuz mit seinem Doppeldrahtsystem montiert ist, ist in Schlitzen geführt verschiebbar; dadurch kann die Ankopplung variiert werden.

Das Magnetron ist unabhängig von den andern auf dem Hauptschlitten montierten Teilen in der Höhe verstellbar und um zwei aufeinander und auf die Bewegungsrichtung des Hauptschlittens senkrechte Achsen drehbar. Fig. 10, 11 und 12 zeigen, wie das

Magnetron mit dem dazugehörenden Dreileitersystem und Abstimmbrücke relativ zu den andern Teilen liegt und wie es in seinem Halter befestigt ist.

Der Senderteil des Hohlraumleiters besteht aus der erregenden Antenne mit ihrer Energieleitung und Abstimmvorrichtung und dem senderseitigen Abschlusskolben. Dieses Ganze ist in einem Stutzen des Hohlraumleiters zusammengebaut. Dieser Stutzen sitzt in einem rahmenförmigen Halter (Fig. 10, 11, 12) fest. Letzterer ist in der Höhe verstellbar und um eine vertikale Achse drehbar, ausser-

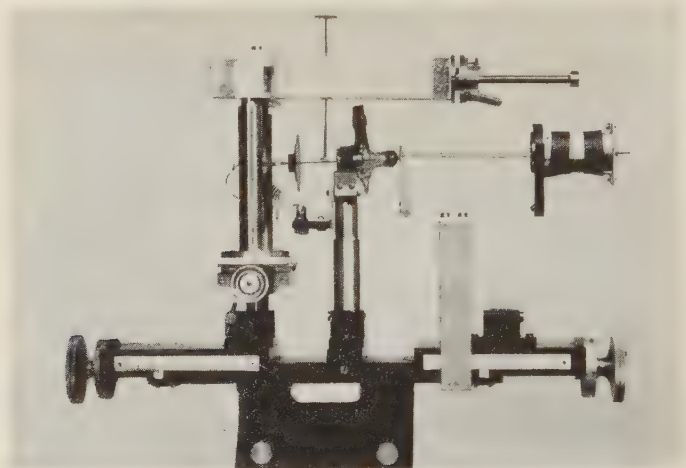


Fig. 10.

Das Magnetron mit Kontrollempfänger und Senderteil des Hohlraumleiters. Der Hauptschlitten, Grössenverhältnisse an der Skala des Längsschlittens ersichtlich.

dem parallel und quer zum Dreileitersystem des Magnetrons mit Hilfe von Schlittenführungen verschiebbar. Fig. 9 zeigt den Überblick, Fig. 10 den Querschlitten, welcher vom Längsschlitten getragen wird.

Als Hohlraumleiter wurde ein normales Antikorodalprofil mit den inneren Massen: 16×31 mm benützt.

Aus den früher erwähnten Gründen wurde angestrebt, im Hohlraumleiter die H_{01} -Welle zu erregen. Dazu dient eine gerade Antenne, wie sie in der Fig. 11 gezeigt wird. Als Speiseleitung und Abstimmorgan dieser Antenne dient ein posaunenartig ausgebildetes Dreileitersystem, welches, wie aus den Fig. 10, 11, 12 hervorgeht, mit dem Magnetron gekoppelt ist. Die Bolzen der

Posaunen sind in einem in die Wand des Stützens eingelassenen Trolitulblock mit Gewinde und Trolitulack befestigt; der mittlere Bolzen ist durchgehend und dient als Antenne, mit welcher die Erregung der H_{01} -Welle angestrebt wurde, die zwei seitlichen endigen im Block bündig mit der Innenfläche des Hohlraumleiters. Die obere Hülse der Posaune wird durch eine kupferne Kurzschluss-

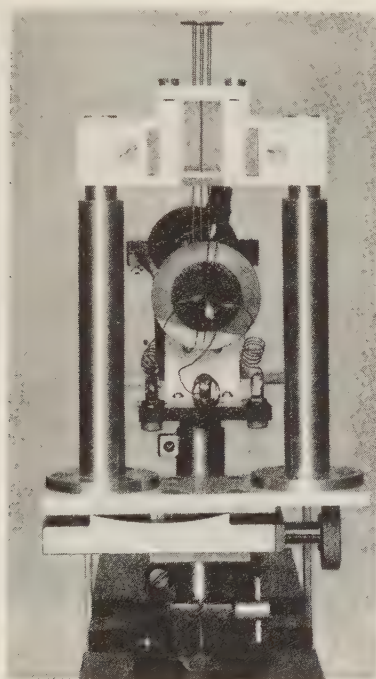


Fig. 11.

Vorderansicht und Befestigung des Senderteiles.

brücke, die untere durch ein Distanzstück aus Trolitul abgeschlossen. Der Abstand der Leiter ist gleich wie beim Magnetron und beträgt 3,5 mm; der Durchmesser der Bolzen 0,8 mm.

Die Fig. 13 zeigt den in einem Stützen des Hohlraumleiters befindlichen Empfänger. Er ist parallel zur Sendeantenne angebracht und besteht in seinem unteren Teil aus dem 2 mm dicken Kristallhalter, im oberen aus der Spitze, die von einer 0,4—0,5 mm dicken stählernen Nähnadel gebildet wird. Als Kristall wurde Silizium benützt. Der Detektor zeigte sich auf Erschütterung, Kontaktdruck, Güte der Spitze sehr empfindlich. Die Anzeigeempfind-

lichkeit war gelegentlichen Schwankungen unterworfen. In der oberen Säule des Empfängerstutzens befindet sich eine Molybdaefeder, mit welcher der Kontaktdruck eingestellt werden kann. Die zwei Buchsen rechts dienen zum Anschluss der Galvanometerleitung (Leybold'sches Drehspul-Galvanometer, Empfindlichkeit ca. $5 \cdot 10^{-9}$ Amp./mm/m). Der Empfängerstutzen ist eine Einheit für sich und kann, wo zwei Abschnitte des Hohlraumleiters zusammenstossen, eingefügt werden. Der Abstand Sendeantenne/Detektor ist in Sprüngen von 0,5 mm durch Zwischenlagen, die bei Stossstellen der einzelnen Abschnitte angebracht werden, einstellbar.

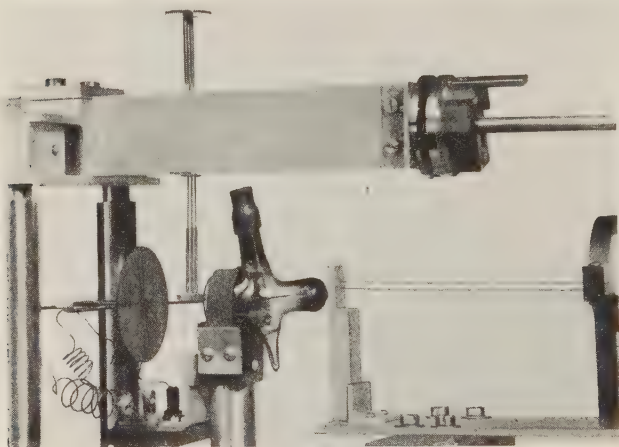


Fig. 12.

Ankopplung des Hohlraumleiters und Abstimmposaunen.

Der empfängerseitige Abschlusskolben ist gleich gebaut wie der senderseitige. Beide können mit Hilfe einer feststehenden Mutter und beweglichem Bolzen bewegt werden. Das Bolzengevinde hat eine Steigung von 0,5 mm. Zwecks rascher Verschiebung kann die Mutter geöffnet werden.

Im Hohlraumleiter sind zwei gut verschliessbare Schlitzte angebracht, der eine in der Nähe des Senderteiles, der andere, nach Belieben, hinter oder vor dem Empfänger.

Die Wellenlänge in der Luft wurde mittelst eines koaxialen Wellenmessers bestimmt. Der Wellenmesser (Fig. 9 oben, zwischen den Magnetpolen, in nicht angekoppeltem Zustand abgebildet) wurde mit der oberen Posaune gekoppelt.

Als Stromquelle des Magneten diente eine Akkumulatoren-batterie von 162 Ampèrestunden Kapazität. Es durfte ausser dem Magneten keine andere Belastung an der Batterie liegen, da sonst die Energieausstrahlung des Magnetrons zu stark schwankte.

Die Heizbatterie des Magnetrons war eine 6-Volt-Akkumulatorenbatterie von 64 Ampèrestunden Kapazität.

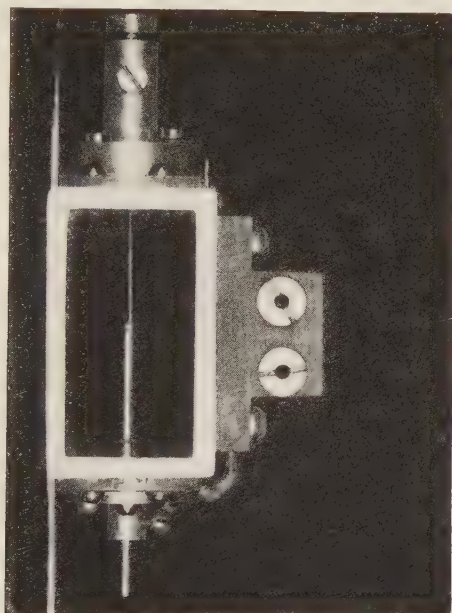


Fig. 13.

Ansicht des in dem Hohlraumleiter eingebauten Detektors.
Vergrößerung ca. 1,5fach.

Eine Hochspannungsmaschine, deren Ausgangsspannung mit Hilfe eines Stabilisators konstant gehalten wurde, lieferte die Anodenspannung des Magnetrons. Der Stabilisator war im wesentlichen gleich gebaut wie derjenige, welchen NEHER und PICKERING als zweite Variante in der Februarnummer 1939 der *Review of Scientific Instruments* angaben. Die Schwankungen der Ausgangsspannung des Stabilisators waren kleiner als $1\frac{0}{100}$ des Nennwertes.

Erregerstrom des Magneten, Heizstrom, Anodenstrom und Anodenspannung des Magnetrons sollen in feineren Sprüngen als 1% des jeweiligen Nennwertes verstellt werden können. Es ist ganz besonders dafür zu sorgen, dass im Heizkreis des Magnetrons kein schlechter Kontakt vorkommt.

b) Der Betrieb der Apparatur:

Die Inbetriebsetzung erfolgt in zwei wohl getrennten Schritten: 1. Die Erregung von Schwingungen der gewünschten Wellenlänge im Magnetron, 2. die Einstellung des Hohlraumleiters.

An Hand früher aufgenommenener Protokolle ist die Anregung der Magnetron nicht schwierig; der Kontrollempfänger zeigt an, ob es gelang, die richtige Abstimmung zu treffen.

Mehr Geduld erfordert die Einstellung des Hohlraumleiters. Die Grundsätze, nach welchen während dieser Arbeit im allgemeinen verfahren wurde, seien im folgenden beschrieben.

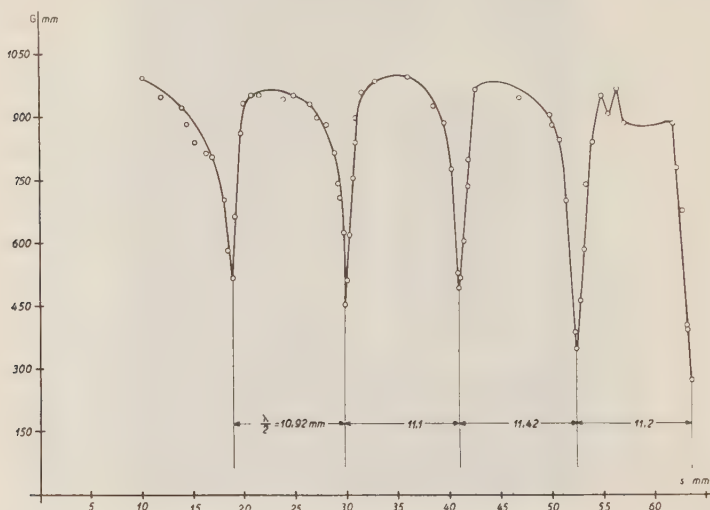


Fig. 14.

G = dem Detektorstrom proportionaler Galvanometerausgang. s = Verschiebung des Kolbens im koaxialen Wellenmesser.

$$\lambda_{\text{mittel}} = 22,32 \text{ mm} \quad \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{mittel}}} \right) = 1,16\%$$

Der Hohlraumleiter ist auf die vorhandene Frequenz eingestellt, wenn: a) er am richtigen Ort längs des Dreileitersystems des Magnetrons an dieses angekoppelt ist; b) die Abstimmposaunen der Erregerantenne ihre richtige Länge haben; c) die beiden Abschlusskolben an ihrem richtigen Ort sind; d) der eingebaute Detektor anzeigt. Die Reihenfolge der Schritte, in welcher die Einstellung vorstatten geht, ist die der obigen Aufzählung. Wenn einer der drei ersten Schritte erreicht worden ist, dann nimmt jedesmal der Ausschlag des in der Beschreibung erwähnten Kontrollempfängers um ein weiteres ab. Wenn der Detektor richtig

eingestellt ist, so merkt man das an der Anzeige seines Galvanometers. Ist die Resonanzkurve, die man nach erfolgter Einstellung aufnimmt, symmetrisch, dann kann zur Messung der elektrischen Konstanten geschritten werden. Zeigt sie aber Unregelmässigkeiten, wie Unsymmetrie, zusätzliche, der zu erregenden Wellentype nicht entsprechende Extrema, dann müssen die Unregelmässigkeiten zuerst behoben, oder ihr Einfluss auf die Bestimmung der elektrischen Konstanten abgeschätzt werden.

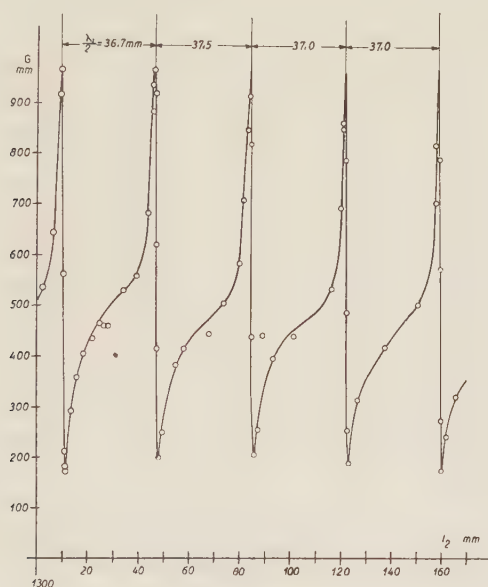


Fig. 15.

G = dem Detektorstrom proportionaler Galvanometerausgang.

l_2 = Abstand des empfängerseitigen Abschlusskolbens von der Antenne.

($x = 1200$ mm, $l_1 = 72,5$ mm)

Vakuumwellenlänge 29,4 mm

Der Abstand der Extrema der Resonanzkurven, welche der zu erregenden Wellentype entsprechen, sind bekannt, da sie aus der Vakuum-Wellenlänge mit Hilfe der Dispersionsformel berechnet werden können. Die Vakuum-Wellenlänge wird mit dem koaxialen Wellenmesser, nachdem der Hohlraumleiter soweit eingestellt ist, dass sein Detektor anzeigt, gemessen. Der Wellenmesser wird mit der obern Posaune gekoppelt und auf die Wellenlänge des Magnetrons abgestimmt; ist die Abstimmung erreicht, dann nimmt der Ausschlag des Detektors im Hohlraumleiter ab. Nun kann dieser Detektorausgang entweder in Abhängigkeit des Ortes des Wellen-

messers längs der Posaune, oder in Abhängigkeit der Abstimmung des Wellenmessers aufgenommen werden. Eine nach der letztern Methode aufgenommene Kurve zeigt die Fig. 14.

Ist die Resonanzkurve, die man durch Verschieben des einen Abschlusskolbens aufnimmt, unsymmetrisch, aber ohne Nebenmaxima, dann kann diese Unregelmässigkeit zur Ursache haben, dass die Orte des feststehenden Kolbens und des eingebauten Detektors die Bedingungen, welche in den Gleichungen (73f, g, h)

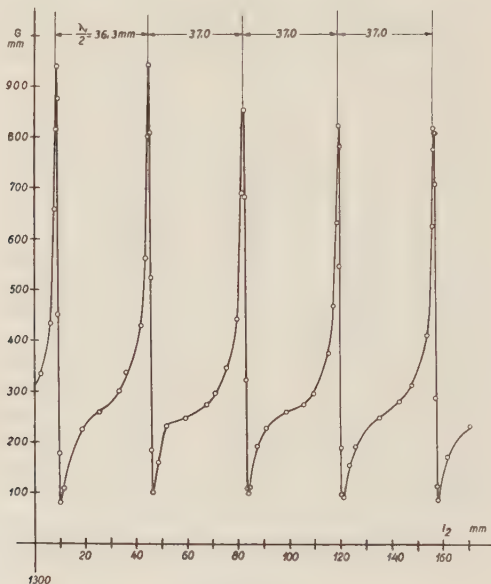


Fig. 16.

G = dem Detektorstrom proportionaler Galvanometerausschlag.

l_2 = Abstand des empfängerseitigen Abschlusskolbens von der Antenne.

($x = 1200$ mm, $l_1 = 72,5$ mm)

Messung mit einem Gitterpaar zwischen Antenne und Detektor, Ort und gegenseitiger Abstand des Gitterpaares so aufgesucht, dass der Detektorausschlag am grössten ist.

Vakuumwellenlänge 29,4 mm.

enthalten sind, nicht erfüllen. Einen weiteren Grund zur Unsymmetrie liefert die unsaubere Erregung durch die Antenne dann, wenn die Stromverteilung in ihr dem Feldverlauf der zu erregenden Wellentypen nicht entspricht. Die Fig. 15 zeigt eine Resonanzkurve für den Fall, dass die erregende Frequenz so ausgesucht wurde, dass der Hohlraumleiter ausser der H_{01} -Welle keine andere mehr durchlässt, und die Sendeantenne länger als die Wellenlänge im

Vakuum ist. In diesem Fall ist es möglich, mit Hilfe entsprechend angebrachter Drahtgitter die Resonanzkurve weitgehend zu korrigieren (Fig. 16). Die Stäbe der verwendeten Gitter waren senkrecht zur Erregerantenne angeordnet, der Ort der Gitter und ihr gegenseitiger Abstand durch Probieren gefunden. Der auf Seite 674 erwähnte Schlitz in der Nähe des Senderteiles diente zur Aufnahme der Gitter. Die Gitter können die Resonanzfähigkeit des Hohlraumleiters erhöhen, da man durch entsprechende Wahl ihrer Orte erreichen kann, dass der Ausschlag des hinter ihnen liegenden Detektors grösser wird, als er vor dem Anbringen der Gitter war. Die Gitter ändern auch die Resonanzlänge.

In dem Masse, wie die Antenne länger als die Vakuumwellenlänge wird, kommt die zweite Störung: die der Wellenlänge der zu erregenden Wellentype nicht entsprechende Extrema der Resonanzkurve, zum Vorschein. Es gelang nicht, diese Kurven mit Hilfe der Gitter oder Änderung der Lage der Abstimmposaunen zu korrigieren (Fig. 17, 18).

Die Verlängerung des Dreileitersystems der Erregerantenne in den Hohlraumleiter hinein, so, dass nur ein 8 mm langes Mittelstück der Antenne abstrahlen konnte, schuf auch keine Abhilfe.

Diese „Nebenmaxima“ entstehen nicht durch Rückwirkung des Hohlraumleiters auf das Magnetron: Änderte man die Ankopplung des Hohlraumleiters in den weitesten Grenzen, die noch eine Messung erlaubten, so konnte kein Einfluss auf das Auftreten der Nebenmaxima nachgewiesen werden.

Die bei einer längeren Messdauer auftretende Abnahme der Maxima des Detektorausschlages kann darauf zurückgeführt werden, dass die Spannungsquellen sich, wenn auch langsam, verändern.

Die Unregelmässigkeiten der Resonanzkurve stören insofern in der Bestimmung der elektrischen Konstanten, als man im unklaren ist: erstens über das Feldbild im Hohlraumleiter; zweitens über die Anwendbarkeit der Gl. (80a).

Der Feldverlauf längs der Achse des Hohlraumleiters gibt über das Feldbild Aufschluss. Würde es sich etwa zeigen, dass das Feldbild bei festgehaltenen Abschlusskolben sogar in dem Fall der gewünschten Wellentype entspricht, wenn die Resonanzkurve Nebenmaxima aufweist, dann hat man sich um die Sauberkeit des Feldbildes nicht weiter zu kümmern.

Die im Abschnitt III entwickelte Messmethode beruht auf der Annahme, dass, wenn bei der Messung mit rein metallischem Abschlusskolben und bei der Messung mit der auf dem Metallkolben aufliegenden dielektrischen Platte, die Resonanzlänge die gleiche

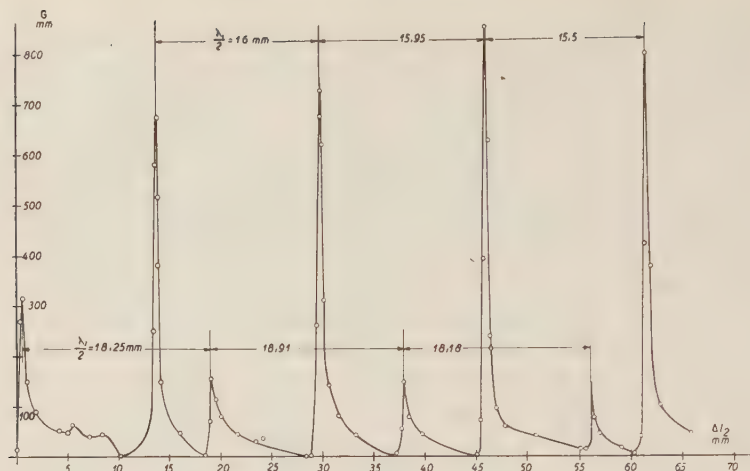


Fig. 17.

G = dem Detektorstrom proportionaler Galvanometerausgang.

Δl_2 = Verschiebung des empfängerseitigen Abschlusskolbens.

Auftreten von Nebenmaxima; ein Gitter zwischen Antenne und Detektor.
Vakuumwellenlänge 22 mm.

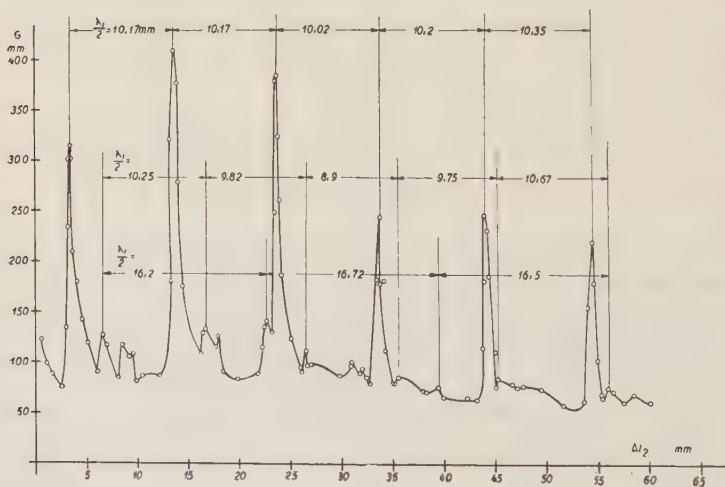


Fig. 18.

G = dem Detektorstrom proportionaler Galvanometerausgang.

Δl_2 = Verschiebung des empfängerseitigen Abschlusskolbens.

Auftreten von Nebenmaxima; ein Gitter und eine Blende $a = 3,1$ cm, $b = 0,8$ cm
zwischen Antenne und Detektor.

Vakuumwellenlänge 14,9 mm.

ist, dann in beiden Fällen der Phasensprung bei der Reflexion π beträgt. Bei Benützung symmetrischer Resonanzkurven besteht diese Annahme zu Recht. Wird die Unsymmetrie dadurch verursacht, dass die Bedingungen (72d, e), (73g, h) nicht erfüllt sind, die Erregung durch die Senderantenne aber sauber ist, dann kann die Abweichung des Phasensprunges von π wie folgt geschätzt werden:

Der Reflexionskoeffizient des aus der zu untersuchenden Substanz und dem Metallkolben bestehenden Gebildes ist nie stark von Eins verschieden; wenn die benützte Resonanzkurve eingermassen scharfe Maxima besitzt ($2\gamma_1(l_1 + x) \pm 2q\pi$), kann die Dämpfung des Hohlraumleiters für die Bestimmung der Resonanzlängen vernachlässigt werden. Die Resonanzlänge von l_2 berechnet sich bei Messung

mit rein metallischem Kolben:

$$\text{aus } \cos 2\gamma_1(l_1 + l_2) = +1; \quad 2\gamma_1(l_1 + l_2) = 2m\pi \quad \text{aus (76)}$$

mit dem zusammengesetzten Kolben:

$$\text{aus } A_2 \cos [\gamma_1(l_1 + 2l_2 - x) - \delta] + A_3 \cos \gamma_1(l_1 + x) = 0 \quad \text{aus (73a)}$$

$$A_2 = 1 + r_2^2; \quad A_3 = 2r_2; \quad A_2 \geq A_3; \quad A_2 = A_3(1 + \varphi); \quad \varphi \leq 1$$

$$A_3 \{ \cos \gamma_1(l_1 + x) + \cos [\gamma_1(l_1 + 2l_2 - x) - \delta] \\ + \varphi \cdot \cos [\gamma_1(l_1 + 2l_2 - x) - \delta] \} = 0$$

$$2 \cos \left[\gamma_1(l_1 + l_2) - \frac{\delta}{2} \right] \cos \left[\gamma_1(l_2 - x) - \frac{\delta}{2} \right] \\ + \varphi \cos [\gamma_1(l_1 + 2l_2 - x) - \delta] = 0$$

Werden die Resonanzlängen einander gleich gesetzt, dann gilt:

$$\gamma_1(l_1 + l_2) = m\pi; \quad \cos \gamma_1(l_1 + l_2) = (-1)^m$$

Bei unsymmetrischer Resonanzkurve und von Eins verschiedenem Reflexionskoeffizienten ist δ nicht gleich π .

Setzt man:

$$\delta = \pi + \zeta; \quad \varphi = l_2 - x$$

so erhält man

$$(1 + \varphi) \operatorname{tg} 2\gamma_1\varphi \cdot \sin \zeta - (1 - \varphi) \cos \zeta + 1 = 0$$

Entwickelt man nach Potenzen von ζ und vernachlässigt alle nichtlinearen Glieder, dann erhält man für die Abweichung des Phasensprunges von π :

$$\zeta = - \frac{A_2 - A_3}{A_2} \operatorname{ctg} \gamma_1 (l_2 - x) = - \frac{(1 - r_2)^2}{1 + r_2^2} \operatorname{ctg} \gamma_1 (l_2 - x) \quad (83)$$

$\operatorname{ctg} \gamma_1 (l_2 - x)$ wird in der Nähe der Minima gröss.

Um zu prüfen, welche Werte $\operatorname{ctg} \gamma_1 \psi$ für das Maximum einer noch einigermaßen scharfen Resonanzkurve in Funktion der Unsymmetrie, das heisst $2\gamma_1(l_1 + x)$, annimmt ist es von Vorteil, Gleichung (76) in die folgende Form zu bringen:

$$\overline{E_y^2} = A_1 (\operatorname{ch} 2\alpha l_1 - \cos 2\gamma_1 l_1) \frac{\operatorname{ch} 2\alpha \psi - \cos 2\gamma_1 \psi}{\operatorname{ch} 2\alpha (l_1 + x + \psi) - \cos 2\gamma_1 (l_1 + x + \psi)}$$

Da uns nur der Kurvenverlauf bei Änderung von ψ interessiert, kann geschrieben werden:

$$K \overline{E^2} = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha \psi - \cos 2\gamma_1 \psi}{\operatorname{ch} 2\alpha (l_1 + x + \psi) - \cos 2\gamma_1 (l_1 + x + \psi)}$$

Mit den Werten: $a = 3,1$ cm; $b = 1,6$ cm; $\lambda = 2,94$ cm;
 $\lambda_1 = 7,4$ cm; folglich, nach CHU und BARROW l. c.
 $\alpha \sim 3,45 \cdot 10^{-4}$ neper/cm, kann die folgende Tabelle aufgestellt werden:

$2\gamma_1(l_1 + x)$	ψ für Maximum	$K \overline{E^2}$	$ \operatorname{ctg} \gamma_1 (l_2 - x) $
$(2n+1)\pi$	$(\frac{1}{4})\lambda_1$	500	0
$(2n+1)\pi - (\frac{3}{8})\pi$.	$(\frac{11}{32})\lambda_1$	350	0,412
$(2n+1)\pi - (\frac{6}{8})\pi$.	$(\frac{14}{32})\lambda_1$	98	2,4
$(2n+1)\pi - (\frac{15}{16})\pi$	$(\frac{31}{64})\lambda_1$	5	10

Diese Zusammenstellung zeigt, dass sogar in einem so ungünstigen Fall, wo die Resonanzkurve dermassen flach wird, dass sie nicht mehr aufgenommen werden kann, $|\operatorname{ctg} \gamma_1 (l_2 - x)|$ erst ungefähr 10 ist. Mit diesem Wert und einem Reflexionskoeffizienten von 0,8, einem Wert, der immer überschritten werden kann, wird für die Abweichung des Phasensprunges δ von π erhalten:

$$|\zeta| \approx \frac{(1 - 0,8)^2}{1 + (0,8)^2} \cdot 10 = 0,244$$

Diese Abweichung beläuft sich auf ungefähr 7,8% von π . Die Unsicherheit in der Messung der Resonanzlänge beträgt ca. 1%:

$$\frac{\Delta \lambda_1}{\lambda_1} \sim 1\%; \quad \Delta \delta = 4\pi \frac{\Delta \lambda_1}{\lambda_1} \sim 12\%$$

Die durch die Unsymmetrie verursachte Abweichung ζ des Phasensprunges von π ist auch in einem sehr ungünstigen Fall kleiner als die Unsicherheit in der Messung der Resonanzlänge. Dieser günstige Sachverhalt wird dadurch bedingt, dass der Reflexionskoeffizient nicht viel kleiner als Eins werden kann.

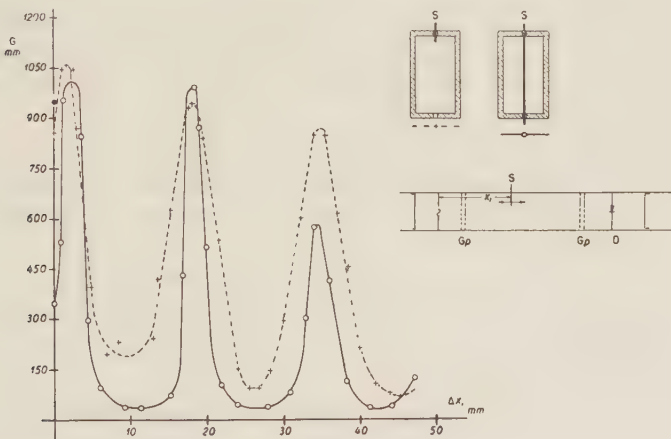


Fig. 19.

G = dem Detektorstrom proportionaler Galvanometeraus Schlag.

ΔX_1 = Verschiebung der Sonde.

Die zwei Gitterpaare so eingestellt, dass ein Nebenmaximum am kleinsten wurde.

* = Detektoraus Schlag am Anfang der Messung, ohne Sonde.

S = Sonde; Gp = Gitterpaare; D = Detektor.

Zur Messung des Feldverlaufes längs der Achse des Hohlraumleiters wurde in einem der auf Seite 674 erwähnten Schlitzte ein parallel zur Antenne gerichteter Draht eingeführt und in Abhängigkeit von seinem Ort der Ausschlag des eingebauten Detektors aufgezeichnet. Man kann zum unerwarteten Ergebnis, dass die Länge, mit welcher die Sonde in den Querschnitt ragt, auf den Verlauf der Kurve fast ohne Einfluss ist. Die Fig. 19 zeigt zwei solche Kurven und die dazugehörige Anordnung der Sonde. Die bei derselben Einstellung aufgenommene Resonanzkurve wies Nebenmaxima auf. Zur Messung mit der Sonde wurden die Abschlusskolben so ein-

gestellt, dass der eingebaute Detektor ein „Hauptmaximum“ anzeigte und die Sonde dann eingeführt. Sie hat, wie auch die Gitter, die Resonanzfähigkeit des Hohlraumleiters verändert: nachdem die Sonde eingeführt wurde, nahm der Detektorausschlag zu.

Das Ergebnis, das durch die Fig. 18 dargestellt ist, legt es nahe, dass im Hohlraumleiter bei festgehaltenen Abschlusskolben diese Feldverteilung vorherrschend ist, welche der mit der Sonde festgestellten Wellenlänge entspricht. Diese Folgerung stützt sich auf die Überlegung, dass erstens nur solche Wellentypen erregt werden können, welche eine zur Erregerantenne parallele Komponente des elektrischen Feldes besitzen, zweitens die eingeführte Sonde zur Antenne parallel orientiert war und somit die Felder aller möglichen Wellentypen hätte stören können. Die Folgen der unsauberen Erregung sind demnach kein prinzipielles Hindernis der Messung der elektrischen Konstanten, da das Feldbild als bekannt vorausgesetzt werden darf.

Eine noch so unregelmässige Resonanzkurve kann als eine Überlagerung regelmässiger Resonanzkurven mit verschiedenen Werten von γ_1 , l_1 , x aufgefasst werden. Auf Grund der Messung mit der Sonde kann behauptet werden, dass bei Einstellung auf ein scharfes Maximum nur eine dieser Resonanzkurven zur Geltung kommt. Der Fehler, welcher dadurch in die Messung kommt, dass diese Resonanzkurve unter Umständen unsymmetrisch ist, ist nach Gleichung (88) zu schätzen.

Mit der Wellentype H_{01} wurden bei der Vakuumwellenlänge von 2,2 cm, unter Vernachlässigung der Absorption in der Substanz, die Dielektrizitätskonstanten von Trolitul und Kochsalz roh gemessen:

Trolitul: gemessen DK 2,5 (nach KEBBEL 2,1),

Kochsalz: gemessen DK 4,7.

Physikalisches Institut der E.T.H. Zürich.

Sättigungscharakter der Kernkräfte und Mesontheorie

von G. Wentzel.

(3. XI. 1942.)

Die Mesontheorie lässt bei Annahme starker Kopplung die Existenz von Isobaren des Protons mit höheren Ladungs- und Spinwerten erwarten; der für die Kernkräfte charakteristische Austauschoperator enthält dann Terme, die den Umwandlungen in diese Zustände entsprechen, und diese Terme gefährden nach R. SERBER den Sättigungscharakter der Kernkräfte. Da in der Wirklichkeit eher starke als schwache Kopplung vorliegen dürfte, ist es notwendig, die Stabilität der schweren Kerne auf Grund der verschiedenen Mesontheorien neu zu untersuchen. Es wird vorgeschlagen, hierzu eine Thomas-Fermi-Näherung heranzuziehen, bei der aber zu den räumlichen Koordinaten der Nucleonen weitere Koordinaten hinzutreten, z. B. in der Theorie des skalaren geladenen Mesonfeldes die Winkelvariablen, die den Ladungszahlen der Nucleonen kanonisch konjugiert sind.

§ 1. Dass es in der Mesontheorie der Kernkräfte so schwierig ist, zu rechnerisch einwandfreien Ergebnissen zu gelangen, beruht bekanntlich grossenteils darauf, dass man für den dimensionslosen Kopplungsparameter $g^2/\hbar c$ (der dem elektrischen $e^2/\hbar c = 1/137$ entspricht) einen Zahlwert annehmen muss, der grössenordnungsmässig nicht weit unter 1 liegt; die störungstheoretischen Entwicklungen, als Entwicklungen nach steigenden Potenzen dieses Parameters, konvergieren daher schlecht wenn überhaupt¹⁾. Während also die Störungsmethode nur im Falle „schwacher Kopplung“ brauchbar ist, hat man andererseits den Grenzfall „starker Kopplung“, in dem Näherungslösungen durch Entwicklung nach *fallenden* Potenzen des Kopplungsparameters erhalten werden können. Diese Näherungsmethode ist zuerst vom Verfasser am Beispiel des skalaren (PAULI-WEISSKOPF'schen) Feldes entwickelt worden²⁾; in etwas vereinfachter Form wurde sie von OPPENHEIMER und

¹⁾ Vgl. besonders STUECKELBERG und PATRY, Helv. Phys. Acta **13**, S. 167, 1940.

²⁾ WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13**, S. 269, 1940 (im folgenden als I zitiert) und **14**, S. 633, 1941 (als II zitiert). Es sei gestattet, die Arbeit I hier noch in einem Punkte zu berichtigen: In § 10 wurde behauptet, dass die Selbstenergie von N Nucleonen in den Termen der Ordnung g^0 nicht additiv sei, d. h. dass sie nicht linear von N abhängt. Diese Behauptung beruht auf einem Rechenfehler. Tatsächlich besteht die Additivität, wenigstens in dieser Näherung.

SCHWINGER³⁾, PAULI, SERBER und DANCOFF⁴⁾ auf andere Feldtypen übertragen. Die Bedingung dafür, dass die Entwicklung nach fallenden Potenzen von g brauchbar ist, lautet im Fall des skalaren Feldes:

$$\frac{g^2}{\hbar c} \gg 1 \quad (1, a)$$

(s. Zitate 3 und 2, II); bei anderen Feldtypen (vektorielles oder pseudoskalares Feld oder Mischungen dieser beiden Felder), mit Wechselwirkungsansätzen, die spin-abhängige Kernkräfte liefern, hat man statt dessen die Bedingung

$$\frac{g^2}{\hbar c} \gg \kappa a \quad (1, b)$$

oder

$$\frac{g^2}{\hbar c} \gg (\kappa a)^2, \quad (1, c)$$

wo κ die reziproke Comptonwellenlänge der Mesonen bedeutet und a den Radius des Nucleons (Proton-Neutrons), den man einführen muss, um die Impulsraumintegrale konvergent zu machen⁵⁾. Nun liegt es im Sinne der Feldtheorie der Kernkräfte,

$$\kappa a \ll 1 \quad (2)$$

anzunehmen; denn es ist ja einer der Grundgedanken der YUKAWA-schen Theorie, dass die Reichweite der Kernkräfte durch die Meson-Comptonwellenlänge κ^{-1} bestimmt sein soll, während sie durch den Radius a bestimmt wäre, falls dieser $\gtrsim \kappa^{-1}$ angenommen würde. Unter der Voraussetzung (2) sind aber die Bedingungen (1, b und c) schwächer als (1, a), und es zeigt sich, dass man in Wirklichkeit mit so grossen Zahlwerten von $g^2/\hbar c$ rechnen muss, dass die Kopplung durch pseudoskalare oder vektorielle Felder bereits als stark gelten kann, d. h. dass die Entwicklung nach fallenden Potenzen von g eine gute Näherung liefert, während die Störungsmethode ganz unbrauchbar ist.

Ein charakteristisches Ergebnis der Näherung für starke Kopplung ist die Aussage, dass das Nucleon imstande ist, Mesonen an

³⁾ OPPENHEIMER und SCHWINGER, Phys. Rev. **60**, S. 150, 1941.

⁴⁾ DANCOFF und PAULI, DANCOFF und SERBER, Bull. Amer. Phys. Soc. **16**, Nr. 7, Notizen Nr. 7 und 43. Dies sind nur kurze Mitteilungen; die ausführlichen Veröffentlichungen in Phys. Rev. sind, wenn schon erschienen, mir noch nicht zugänglich gewesen.

⁵⁾ In den Arbeiten des Verfassers (Zitat 2) spielt die Gitterkonstante l des Gitterraumes die Rolle der Abschnidelänge a . Die Bedingungen (1, a—b—c) gelten übrigens in dieser Form nur, wenn $\kappa a \lesssim 1$ angenommen wird.

sich zu binden, so dass stationäre Zustände mit höheren Ladungszahlen oder Spinwerten entstehen. Die Energien oder Massen dieser „Proton-Isobaren“ variieren in quadratischer Weise mit der Ladungs- bzw. Spin-Quantenzahl. Im Falle des skalaren geladenen Mesonfeldes z. B. gibt es Isobaren mit den Ladungszahlen $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, während der Spin unverändert $\frac{1}{2}$ ist; die Massen-Ladungsbeziehung ist von der Form:

$$M_n = \text{const} + \frac{\delta}{2} (n - \frac{1}{2})^2, \quad (3)$$

wo die Konstante δ die Grössenordnung $(g^2/\hbar c)^{-1}$ mal Mesonmasse μ hat, also nach (1, a) klein gegen μ ist (vgl. I und Berichtigung in II, Ziffer 2). Wird die YUKAWA'sche Hypothese von der β -Instabilität des Mesons akzeptiert, so sind natürlich auch die Proton-Isobaren β -instabil. Die höheren Isobaren können auch unter Meson-Emission zerfallen, wenn nämlich die Massendifferenz gegenüber dem nächstleichteren Isobar $> \mu$ ist. Die Existenz der Isobaren würde sich unter anderm bei der Streuung von Mesonen an Protonen äussern: das Meson kann beim Streuprozess seine Ladung wechseln, während das Nucleon eine entsprechende Umladung um ± 2 Einheiten erleidet (vgl. I, § 7).

Die Existenz der Proton-Isobaren ist auch von Wichtigkeit für die Theorie der Kernkräfte. Betrachten wir zwei Nucleonen, deren Abstand r grösser als der Protonradius a ist, so ist nach der skalaren Theorie bei starker Kopplung das statische Wechselwirkungspotential gleich

$$-g^2 \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} \cdot 2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (4)$$

(vgl. I, Gl. (127); $\kappa = \mu c/\hbar$). Die r -Abhängigkeit sowie die Proportionalität mit g^2 ergibt sich also in formaler Übereinstimmung mit dem bekannten störungstheoretischen Ergebnis für schwache Kopplung; ferner hat auch der Faktor $2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ die Bedeutung eines Austauschoperators, doch ist es nicht — wie bei schwacher Kopplung — der für die Heisenbergkraft charakteristische Operator, der die Ladungen von Proton und Neutron vertauscht, vielmehr stellt er ausserdem Umwandlungen in höhere Isobare dar. ϑ_1, ϑ_2 sind nämlich die Winkelvariablen, die zu den Ladungszahlen n_1, n_2 der beiden Nucleonen, genauer gesagt: zu $p_{\vartheta_1} = \hbar(n_1 - \frac{1}{2})$ und $p_{\vartheta_2} = \hbar(n_2 - \frac{1}{2})$, kanonisch konjugiert sind; $e^{\pm i\vartheta_s}$ bedeutet also den Operator, der die Ladungszahl n_s in $n_s \pm 1$ verwandelt. Der Ausdruck

$$2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = e^{+i\vartheta_1} e^{-i\vartheta_2} + e^{-i\vartheta_1} e^{+i\vartheta_2}$$

ist also die Summe zweier Operatoren, die die Ladungszahlen n_1, n_2 in $n_1 + 1, n_2 - 1$ bzw. in $n_1 - 1, n_2 + 1$ verwandeln (vgl. I, S. 296). So wird beispielsweise das Paar „Neutron-Proton“ nicht nur in das Paar „Proton-Neutron“, sondern auch in das Paar „negatives Proton-doppeltpositives Proton“ verwandelt. Im Falle von Feldern mit Spinkopplung treten entsprechend Operatoren auf, die Spinänderungen der beiden Nucleonen beschreiben.

Denken wir uns nun etwa ein Neutron und ein Proton in so grossem Abstand fixiert, dass die Wechselwirkungsenergie (4) klein ist gegen die Isobaren-Anregungsenergie ($\delta \cdot c^2$ in der Bezeichnung der Gl. (3)), so werden die Übergänge in die höheren Isobaren keine Rolle spielen, und die Eigenwerte des Wechselwirkungsoperators (4) werden dieselben sein wie bei Annahme einer Heisenbergkraft (die Eigenwerte des Heisenberg'schen Austauschoperators sind bekanntlich: 0 für das Neutron-Neutron und das Proton-Proton, ± 1 für das Proton-Neutron mit in den Ladungszahlen symmetrischer bzw. antisymmetrischer Eigenfunktion). Anders wird dies aber, wenn die Teilchen in genügend kleinen Abstand gebracht werden. Ausser der Wechselwirkungsenergie (4) (in der r konstant ist; die Teilchen gelten immer noch als ruhend) haben wir dann die Isobaren-Energien zu berücksichtigen, die nach (3) geschrieben werden können:

$$\frac{\delta c^2}{2} (n_s - \frac{1}{2})^2 = \frac{\varepsilon}{2} p_{\vartheta_s}^2$$

($p_{\vartheta_s} = \hbar (n_s - \frac{1}{2})$, wo n_s ganzzahlig; $\varepsilon = \delta c^2 / \hbar^2$); man erhält so eine Hamiltonfunktion von der Form:

$$H = \frac{\varepsilon}{2} (p_{\vartheta_1}^2 + p_{\vartheta_2}^2) - J \cos (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (5)$$

Durch Einführung von Schwerpunkts- und relativen Koordinaten

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad \psi = \vartheta_1 - \vartheta_2$$

wird H separiert, und man erkennt leicht, dass im Falle $J \gg \varepsilon \hbar^2 = \delta c^2$ die untersten stationären Zustände nichts anderes sind als Nullpunktsschwingungen in tiefen Potentialmulden; die kleinsten Eigenwerte von H sind also im wesentlichen gleich der Tiefe der Potentialmulden, d. h. gleich $-J = -g^2 e^{-\kappa r} / 2 \pi r^6$). Der Unterschied gegenüber dem Fall von Heisenbergkräften ist evident. Hat

⁶⁾ Die Kenntnis dieser von R. SERBER stammenden Überlegung verdanke ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von W. PAULI.

man mehr als 2 Nucleonen in einem genügend kleinen Volumen, so tritt ebenfalls ein „Einfrieren“ der relativen Winkelkoordinaten in Potentialmulden ein; bei hoher Teilchenzahl N wächst die Bindungsenergie proportional zu N^2 , d. h. *es findet keine Absättigung der Kräfte statt*. In Feldtheorien, die Isobaren höheren Spins liefern, sind die Verhältnisse analog⁷⁾.

Die obige Abschätzung der Energie-Eigenwerte bezieht sich aber, wie betont wurde, nur auf den Fall ruhender (festgehaltener) Nucleonen, und es erhebt sich die Frage, wieweit die Berücksichtigung der Translationsbewegungen das Ergebnis ändern könnte. Wäre es nicht doch denkbar, dass die kinetische Energie einer zu starken Schrumpfung des Kerns entgegenwirkt, so dass der mittlere Abstand der Kernpartikeln noch genügend gross bliebe, um den Sättigungscharakter der Kräfte zu gewährleisten?

Die Näherungsverfahren, die bisher zur Diskussion der Stabilitätsverhältnisse schwerer Kerne herangezogen wurden, eignen sich nicht ohne weiteres zur Beantwortung dieser Frage. Im Folgenden soll auf ein Verfahren hingewiesen werden, das beim Vorhandensein von Austauschkräften vom Typus (4) besonders angemessen scheint. Zur Erläuterung stützen wir uns auf die Hamiltonfunktion, die der Theorie des skalaren geladenen Mesonfeldes bei starker Kopplung entspricht.

§ 2. Wir untersuchen also einen Kern bestehend aus N Nucleonen, die – vom Spin abgesehen – durch je 4 Koordinaten charakterisiert sind: die Ortskoordinaten x_i, y_i, z_i und die Ladungswinkelvariable ϑ_i ($0 \leq \vartheta_i < 2\pi$). Die Wechselwirkungsenergie der Partikeln sei gemäss (4):

$$-\sum_{i < k} J(r_{ik}) \cos(\vartheta_i - \vartheta_k),$$

wo etwa $J(r) = g^2 e^{-\alpha r} / 2\pi r$ (vgl. I, Gl. (133); die dort mit V'', V''', \dots bezeichneten Terme, die nur für $r_{ik} \lesssim a$ von Bedeutung werden, seien vernachlässigt). Hinzu kommt die Isobaren-Energie

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum_i p_{\vartheta_i}^2.$$

Nach der Feldtheorie wären hier streng genommen die Koeffizienten ε durch gewisse Funktionen der Abstände r_{ik} zu ersetzen; doch soll diese Abstandsabhängigkeit ignoriert werden: $\varepsilon = \text{const.}$ Für Nucleonen unrelativistischer Geschwindigkeiten wird man die statische Wechselwirkungsenergie in erster Näherung einfach über-

⁷⁾ Nach Mitteilung von W. PAULI. Vgl. auch DANCOFF und SERBER, Zitat in Fussnote 4, S. 686.

nehmen können, d. h. man wird die kinetische Energie der Nucleonen einfach hinzuaddieren können, so dass man die Hamiltonfunktion erhält:

$$H = \sum_i \left\{ \frac{1}{2M} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) + \frac{\varepsilon}{2} p_{\vartheta_i}^2 \right\} - \sum_{i < k} J(r_{ik}) \cos(\vartheta_i - \vartheta_k). \quad (6)$$

Unter Zugrundelegung dieser Hamiltonfunktion sollen im Folgenden die Grundzustände schwerer Kerne ($N \gg 1$) untersucht werden.

Es liegt nahe, hierfür eine *Thomas-Fermi-Näherung* zu verwenden, wobei aber anstelle der sonst in dieser Methode betrachteten dreidimensionalen Dichteverteilung $\varrho(x, y, z)$ eine vierdimensionale $\varrho(x, y, z, \vartheta)$ zu treten hat. Die Potentialfunktion dieser Dichteverteilung ist dann gemäss dem obigen Wechselwirkungsansatz folgendermassen zu definieren:

$$U(x, y, z, \vartheta) = - \iiint dx' dy' dz' d\vartheta' \cdot \varrho(x', y', z', \vartheta') \cdot J(\sqrt{(x' - x)^2 + \dots + \dots}) \cos(\vartheta' - \vartheta).$$

Im Innern des Kerns werden ϱ und U von x, y, z unabhängig sein; indem wir Oberflächeneffekte vernachlässigen, nehmen wir ϱ und U über das ganze Kernvolumen v als konstant an:

$$\varrho = \varrho(\vartheta), \quad U = U(\vartheta) \text{ innerhalb } v, \quad = 0 \text{ ausserhalb.}$$

Damit wird

$$U(\vartheta) = - A \int_0^{2\pi} d\vartheta' \varrho(\vartheta') \cos(\vartheta' - \vartheta), \quad (7)$$

wo

$$A = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 J(r). \quad (8)$$

Andererseits bestimmt sich die Dichteverteilung $\varrho(\vartheta)$ durch die Potentialfunktion $U(\vartheta)$ wie folgt: Im Phasenraum mit den Koordinaten $x, y, z, \vartheta, p_x, p_y, p_z, p_\vartheta$ konstruieren wir die Fläche

$$\frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\varepsilon}{2} p_\vartheta^2 + U(\vartheta) = W = \text{const}$$

und denken uns die Zellen vom Volumen h^4 innerhalb dieser Fläche von je zwei Nucleonen besetzt (entsprechend dem Spin $\frac{1}{2}$). Damit wird (in v)

$$\varrho dx dy dz d\vartheta = \frac{2}{h^4} dx dy dz d\vartheta \iiint dp_x dp_y dp_z dp_\vartheta,$$

wo das p -Raum-Integral über das Innere des Ellipsoids

$$\frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\varepsilon}{2} p_\vartheta^2 < W - U(\vartheta) \quad (9)$$

zu erstrecken ist⁸⁾; d. h. ϱ ist gleich dem Volumen dieses Ellipsoids multipliziert mit $2h^{-4}$:

$$\varrho(\vartheta) = \begin{cases} B \cdot (W - U(\vartheta))^2, & \text{solange } U(\vartheta) \leq W, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (10)$$

wo

$$B = (2\pi)^2 h^{-4} M^{3/2} \varepsilon^{-1/2} (> 0). \quad (11)$$

Die Gesamtzahl der vorhandenen Partikeln bestimmt sich durch

$$v \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) = N. \quad (12)$$

Was die Energie des Kerns anbelangt, hat man zunächst die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{2}{h^4} v \int_0^{2\pi} d\vartheta \int \int \int d p_x d p_y d p_z d p_\vartheta \left\{ \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\varepsilon}{2} p_\vartheta^2 \right\},$$

wo das p -Raum-Integral wieder über das Innere des Ellipsoids (9) zu erstrecken ist, was ergibt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{2}{3} v \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) (W - U(\vartheta)) = \frac{2}{3} \left\{ NW - v \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) U(\vartheta) \right\}.$$

Durch Hinzufügung der potentiellen Energie $\frac{1}{2} \int d\vartheta \varrho(\vartheta) U(\vartheta)$ kommt für die Gesamtenergie:

$$E = \frac{2}{3} NW - \frac{1}{6} v \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) U(\vartheta). \quad (13)$$

Zur Lösung der Gleichungen (7), (10) und (12) beachten wir, dass $U(\vartheta)$ nach (7) der Differentialgleichung $U'' = -U$ genügt, so dass der allgemeinste Ansatz lautet:

$$U = C \cdot \cos(\vartheta - \alpha).$$

⁸⁾ Die Halbachse des Ellipsoids in der p_ϑ -Richtung ist $\{2(W - U(\vartheta))/\varepsilon\}^{1/2}$; sie wird hier (wenigstens für die hauptsächlichen ϑ -Werte) als gross gegen h angenommen. Sonst kann die p_ϑ -Verteilung nicht als kontinuierliche Verteilung approximiert werden. Vgl. hierzu § 3. — Bezüglich der hier vernachlässigten Austauschenergie vgl. Fussnote 11, S. 697.

Die Phasenkonstante α kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit nullgesetzt werden (es besteht natürlich Invarianz gegenüber der Translation $\vartheta \rightarrow \vartheta - \alpha$); es genügt also der Ansatz:

$$U = C \cdot \cos \vartheta, \quad \text{wo } C \geq 0. \quad (14)$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\text{a) } C = 0, \quad \text{b) } 0 < C \leq W, \quad \text{c) } C > W.$$

Fall a): $C = 0$. Da $U = 0$ ist, wird nach (10) und (12):

$$\varrho = B \cdot W^2 = \frac{N}{2\pi v}, \quad W = (2\pi B \cdot v/N)^{-\frac{1}{2}} (> 0).$$

Die Gleichung (7) ist mit $\varrho = \text{const}$ identisch erfüllt. Aus (13) folgt:

$$\frac{E}{N} = \frac{2}{3} (2\pi B)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{v}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Fall b): $0 < C \leq W$. Nach (10) ist dann:

$$\varrho(\vartheta) = B(W - C \cos \vartheta)^2,$$

und zwar gilt dies im ganzen Intervall $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, da überall $U(\vartheta) \leq W$. Geht man mit diesem Ausdruck in die Gleichung (7) ein, so erweist sich diese als identisch erfüllt, wenn

$$W = \frac{1}{2\pi A B} \quad (16)$$

gesetzt wird. Hier ist zu beachten, dass W in diesem Falle b) nach Definition nur positiv sein kann; da auch B positiv ist, kann also der Fall b) nur eintreten, wenn die durch (8) definierte Konstante A positiv ist⁹⁾:

$$A > 0.$$

Dann folgt weiter aus (12):

$$2W^2 + C^2 = \frac{1}{\pi B} \cdot \frac{N}{v}. \quad (17)$$

Die Ungleichungen $0 < C \leq W$ besagen also:

$$2W^2 < \frac{1}{\pi B} \cdot \frac{N}{v} \leq 3W^2$$

oder mit (16):

$$2\pi A^2 B > \frac{v}{N} \geq \frac{4\pi}{3} A^2 B. \quad (18)$$

⁹⁾ In der skalaren Mesontheorie ist das der Fall.

Dies ist eine weitere Bedingung für die Möglichkeit des Falles b). Um die Energie zu berechnen, beachten wir, dass nach (7) und (14):

$$C = U(0) = -A \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) \cos \vartheta = -\frac{A}{C} \int_0^{2\pi} d\vartheta \varrho(\vartheta) U(\vartheta),$$

also nach (13):

$$E = \frac{2}{3} NW + \frac{vC^2}{6A}, \quad (19)$$

Entnimmt man hier W aus (16) und C^2 aus (17), so kommt schliesslich:

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{2\pi AB} \left(1 - \frac{1}{6\pi A^2 B} \cdot \frac{v}{N} \right), \quad (20)$$

Fall c): $C > W$. Nach (7) und (14) ist jetzt:

$$\varrho(\vartheta) = \begin{cases} B(W - C \cos \vartheta)^2, & \text{solange } \cos \vartheta \leq W/C, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (21)$$

Die Dichteverteilung erstreckt sich also nur noch über das Intervall

$$\vartheta_0 \leq \vartheta \leq 2\pi - \vartheta_0, \quad \text{wo } \cos \vartheta_0 = W/C. \quad (22)$$

Die Bedingungen (7) und (12) können dann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{ABC} = f(\vartheta_0), \quad \frac{1}{BC^2} \cdot \frac{N}{v} = g(\vartheta_0), \quad (23)$$

wo die Funktionen f und g von ϑ_0 wie folgt definiert sind:

$$\left. \begin{aligned} f(\vartheta_0) &= - \int_{\vartheta_0}^{2\pi - \vartheta_0} d\vartheta (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)^2 \cos \vartheta \\ &= 2 \left\{ \sin \vartheta_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \vartheta_0 + (\pi - \vartheta_0) \cos \vartheta_0 \right\}, \\ g(\vartheta_0) &= \int_{\vartheta_0}^{2\pi - \vartheta_0} d\vartheta (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)^2 \\ &= \frac{3}{2} \sin 2\vartheta_0 + (\pi - \vartheta_0) (2 + \cos 2\vartheta_0). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Da f (wie auch g) für alle Werte von ϑ_0 ($0 < \vartheta_0 < \pi$) positiv ist, ist auch der Fall c) nach (23) nur möglich für

$$A > 0.$$

Durch Elimination von C aus den Gleichungen (23) erhält man das Kernvolumen v als Funktion des Parameters ϑ_0 :

$$\frac{v}{N} = A^2 B \cdot \frac{[f(\vartheta_0)]^2}{g(\vartheta_0)}. \quad (25)$$

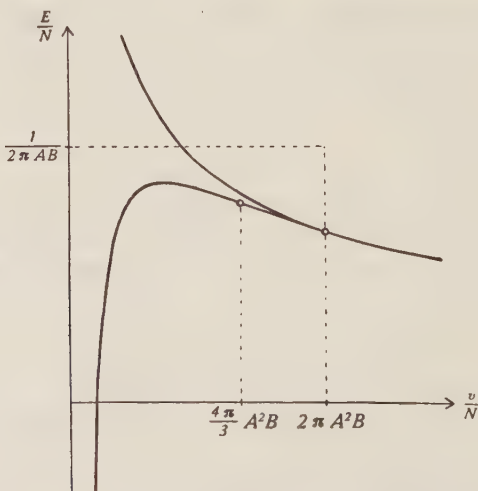
Lässt man ϑ_0 von 0 bis π anwachsen, so nimmt v/N monoton ab von $\frac{4\pi}{3} A^2 B$ bis 0; für den Fall c) ist also notwendig:

$$\frac{4\pi}{3} A^2 B > \frac{v}{N} > 0. \quad (26)$$

Dieses Intervall für v/N grenzt am oberen Rande $\left(\frac{4\pi}{3} A^2 B\right)$ an das Intervall (18) für Fall b). Für die Energie gilt auch hier wieder die Formel (19), wo $W = C \cdot \cos \vartheta_0$ (≥ 0 , je nachdem $\vartheta_0 \leq \pi/2$); mit (23) und (25) erhält man:

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{AB} \left(\frac{2 \cos \vartheta_0}{3 f(\vartheta_0)} + \frac{1}{6 g(\vartheta_0)} \right). \quad (27)$$

Die Gleichungen (25), (27) gestatten, E/N als Funktion von v/N zu berechnen.



Die Ergebnisse sind in der beistehenden graphischen Darstellung zusammengefasst: Der obere Kurvenzweig entspricht dem Fall a), bzw. der Gleichung (15); die betreffenden Kernzustände sind möglich für beliebige Werte von v/N und bei beliebigem Vorzeichen von A (8). Wenn A positiv ist, gibt es ausserdem im Intervall $v/N < 2\pi A^2 B$ den unteren Kurvenzweig; er ist im Intervall (18) durch (20) und im Intervall (26) durch (25) und (27)

bestimmt. Die verschiedenen Kurvenstücke schliessen sich überall stetig und mit stetiger Tangente aneinander an (sowohl bei $v/N = 2\pi A^2 B$ als auch bei $v/N = \frac{4\pi}{3} A^2 B$).

Da die Energie E als Funktion des Kernvolumens v kein Minimum aufweist, ist klar, dass *die Kerne mit der Hamiltonfunktion (6) innerhalb des Gültigkeitsbereiches unserer Thomas-Fermi-Näherung keinen Gleichgewichtszustand besitzen*. Charakteristisch ist speziell der asymptotische Verlauf des unteren Kurvenzweiges ($A > 0$) für sehr kleine Werte von v/N ; es wird nämlich

$$E \approx -\frac{A}{2} \cdot \frac{N^2}{v} \quad \text{für} \quad v/N \ll A^2 B. \quad (28)$$

Dieses asymptotische Verhalten ist dasselbe, wie wenn nur gewöhnliche anziehende Kräfte endlicher Reichweite, aber ohne Austauschcharakter vorhanden wären; der sich selbst überlassene Kern würde zusammenbrechen. Aus der Formel (25) kann man entnehmen, dass dieser Verlust des Sättigungscharakters mit dem früher erwähnten „Einfrieren der Winkel“ Hand in Hand geht: mit abnehmendem Kernvolumen v zieht sich die Verteilung $\varrho(\vartheta)$ auf ein immer kleineres Intervall

$$\pi - \left(\frac{15 v}{4 A^2 B N} \right)^{1/5} < \vartheta < \pi + \left(\frac{15 v}{4 A^2 B N} \right)^{1/5}$$

zusammen. Dass andererseits für $A < 0$ (oberer Kurvenzweig, Fall a)) immer $\varrho = \text{const}$, $U = 0$ ist, dürfte mit dem Umstand zusammenhängen, dass je zwei Partikeln — wenn man das Vorzeichen des Wechselwirkungspotentials (4) umkehrt — die Tendenz haben, mit der Phasendifferenz $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \pi$ — statt 0 — einzufrieren.

§ 3. In der obigen Rechnung wurden einige Vernachlässigungen begangen, die aber für das Ergebnis nicht entscheidend sein können, solange die Thomas-Fermi-Methode als solche eine gute Näherung liefert. Was zunächst die Oberflächeneffekte anlangt, so werden sie den Zusammenbruch eines sehr grossen und dicht gepackten Kerns nicht verhindern können. Die ebenfalls vernachlässigte Austauschenergie ist im Limes $v \rightarrow 0$ gegenüber dem Term (28) sicher belanglos, und das gleiche gilt von der Coulomb-Energie der positiven Überschussladung¹⁰⁾. Ferner könnte man noch kurzreich-

¹⁰⁾ In der obigen Näherung ist der Mittelwert von p_θ aus Symmetriegründen Null, d. h. die Kernladung ist gleich $\frac{1}{2} Ne$, und die Coulomb-Energie ist von der Ordnung $(Ne)^2 v^{-1/2}$. Die Berücksichtigung der Coulombkräfte in der Hamiltonfunktion (6) würde den Ladungsschwerpunkt nach der negativen Seite verschieben und damit die Coulomb-Energie eher verringern.

weitige abstossende Kräfte ohne Austauschcharakter als zusätzlich wirkend annehmen. In der Tat liefert die skalare Mesontheorie solche Zusatzkräfte, die allerdings nur über Entfernungen von der Grössenordnung des Protonradius a wirksam sind (vgl. I, Gl. (132), erster Term; die weiteren Terme stellen Dreikörperkräfte dar). In dieser Hinsicht brauchen wir aber die Aussagen der Feldtheorie nicht einmal als bindend anzusehen, da ja Kräfte der Reichweite a den Charakter von „Nahewirkungen“ haben, über die man im Prinzip nach Belieben verfügen kann. Doch wird auch dadurch das Resultat nicht verbessert, wenigstens solange die Thomas-Fermi-Näherung als zuverlässig gelten kann. Die entsprechende Verallgemeinerung der obigen Rechnung ergibt nämlich nur einen Zusatzterm $\text{const} \cdot N^2/v$ in der Energie, so dass z. B. statt (28) gilt:

$$E \approx \frac{A' - A}{2} \cdot \frac{N^2}{v} \quad \text{für} \quad v/N \ll A^2 B. \quad (29)$$

Unter der Voraussetzung $A' > A$ wird also zwar $\lim_{v=0} E = +\infty$ (auch noch für $A' = A$); doch ergibt sich auch dann kein Gleichgewichtszustand, da E mit zunehmendem v (auch im Bereich $v/N \sim A^2 B$) monoton abfällt.

Nun ist aber zu beachten, dass unsere Näherungsrechnung für v/N -Werte oberhalb eines kritischen Wertes unbrauchbar wird. Die Vorstellung einer Thomas-Fermi-Verteilung im 8-dimensionalen Phasenraum $(xyz\vartheta, p_x p_y p_z p_\vartheta)$ ist nämlich (wie schon bemerkt wurde; vgl. Fussnote 8 auf S. 691) nur dann sinnvoll, wenn der realisierte Maximalwert von $|p_\vartheta|$ gross gegen \hbar ist, d. h. wenn Isobare hoher Ladungszahl im Kern tatsächlich vorhanden sind. Der Maximalwert von $|p_\vartheta|$ ist aber nach (9) und (14) gleich

$$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} (W - U(\pi))} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} (W + C)};$$

mit zunehmendem v/N fällt er monoton gegen 0 ab, und zwar sowohl für $A > 0$ als für $A < 0$ (untere bzw. obere Kurve in der Figur). Wir können also den kritischen v/N -Wert V definieren durch die Gleichung

$$W + C = \varepsilon \hbar^2 = \delta c^2.$$

Während für $v/N < V$ die obigen Formeln verwendet werden können, wird für $v/N > V$ die bekannte Kerntheorie mit gewöhnlichen Austauschkräften gelten; denn bei diesen geringen Kerndichten ist eben die maximale kinetische Energie $(W + C)$ der Nucleonen so gering, dass ihre höheren Zustände nicht angeregt

sind, d. h. dass sie sich nur im Proton- oder Neutron-Zustand befinden können. Wird $A < 0$ angenommen, so findet man mittels der Formeln für den Fall a) für den kritischen Wert:

$$V = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{h}{c\sqrt{M\delta}} \right)^3. \quad (30)$$

Ist dagegen $A > 0$, so kann V noch in die Intervalle

$$0 \text{ bis } \frac{4\pi}{3} A^2 B, \quad \frac{4\pi}{3} A^2 B \text{ bis } 2\pi A^2 B, \quad \text{oder } 2\pi A^2 B \text{ bis } \infty$$

fallen (vgl. (18), (26)); sind die Konstanten so beschaffen, dass $V \ll A^2 B$ wird, so ergibt sich auf Grund der asymptotischen Formeln für Fall c):

$$V = \frac{1}{8} \left(\frac{15}{2\pi} \right)^{2/3} h^2 M^{-1} A^{1/3} (\delta c^2)^{-4/3} (\ll A^2 B). \quad (31)$$

In allen Fällen ist das kritische Volumen V umso kleiner, je grösser — ceteris paribus — die Isobaren-Anregungsenergie δc^2 angenommen wird¹¹⁾.

Man kann nun offenbar δc^2 so gross annehmen, dass V wesentlich kleiner wird als die tatsächlichen v/N -Werte der schweren Kerne; dann würden sich die Stabilitätsbetrachtungen wieder auf Grund der bekannten Theorie durchführen lassen, in der man nur Protonen und Neutronen mit gewöhnlichen Austauschkräften hat. Natürlich ist dabei vorauszusetzen, dass im Bereich $v/N < V$, wo die Thomas-Fermi-Näherung gilt, die Energie E als Funktion von v/N so beschaffen ist, dass kein Kernzusammenbruch stattfindet; im Falle $A > 0$ wären also etwa abstossende Nicht-Austauschkräfte anzunehmen, so dass die asymptotische Formel (29) mit $A' > A$ gilt (an der Formel (31) ändert dies nichts). Freilich wäre eine Theorie, die ohne Annahmen ad hoc auskommt, vorzuziehen.

¹¹⁾ Berücksichtigt man die Austauschenergie nach dem Verfahren von DIRAC (Proc. Cambr. Phil. Soc. 26, S. 376, 1930), so erweist sich der Austauschterm als belanglos für $v/N \ll V'$, wo V' durch die Gleichung

$$W + C = \frac{1}{8\pi^4} \left(\frac{g^2}{\hbar c} \right)^2 M c^2$$

bestimmt ist, vorausgesetzt dass die r -Abhängigkeit der Potentialfunktion $J(r)$ gemäss (4) gewählt wird. Im Falle

$$V \ll V', \text{ d. h. } \frac{\delta}{M} \gg \frac{1}{8\pi^4} \left(\frac{g^2}{\hbar c^2} \right)^2,$$

kann also die Austauschenergie im ganzen Gültigkeitsbereich der Thomas-Fermi-Näherung vernachlässigt werden. Andernfalls ist die Rechnung für $V' \lesssim v/N \lesssim V$ zu korrigieren, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll.

Fordert man also, dass V genügend klein sei, so zeigt sich, dass es kaum möglich ist, die charakteristische Massendifferenz der Isobaren δ kleiner als die Mesonmasse anzunehmen; eher kommt die Grössenordnung der Protonmasse in Betracht. Mit der Annahme starker Kopplung, d. h. mit der Bedingung (1, a), wäre dies nicht mehr verträglich. Es lohnt sich nicht, genauer auf diese Abschätzungen einzugehen, da sie sich in den Einzelheiten zu sehr auf die *skalare* Mesontheorie stützen, die ja aus bekannten Gründen nicht ausreichend ist.

Was die anderen Varianten der Mesontheorie anlangt, dürfte aus den obigen Ergebnissen soviel hervorgehen, dass es unerlässlich ist, eine *jede* Feldtheorie nicht nur in ihrer Anwendung auf leichte Kerne zu prüfen sondern auch hinsichtlich der Stabilität der schweren Kerne zu diskutieren, weil sich hieraus stark einschränkende Kriterien für ihre Brauchbarkeit ergeben können. Dies gilt besonders von solchen Feldtheorien (wie der pseudoskalaren und der vektoriellen Theorie), bei denen die Kopplung tatsächlich als stark zu gelten hat, so dass man mit der Existenz der Isobaren rechnen muss. Es ist der Zweck dieser Arbeit, darauf hinzuweisen, dass für eine solche Diskussion der schweren Kerne die Thomas-Fermi-Näherung gute Dienste leisten kann.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

Versuche über die Keimbildung in übersättigten Lösungen

von J. Amsler.

(4. IX. 1942.)

Zusammenfassung. Die Vorgänge bei der Bildung einer neuen Phase aus der übersättigten alten Phase sind heute theoretisch weitgehend abgeklärt. Ein Überblick über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand des Problems ist von M. VOLMER¹⁾ gegeben worden. Zahlreiche Untersuchungen über die Bildung von Tröpfchen in unterkühlten Dämpfen, die besonders im Zusammenhang mit der Wilson'schen Nebelkammermethode gemacht wurden, ergaben eine sehr befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie. Im Falle der *Keimbildung aus übersättigten Lösungen* wurden jedoch Resultate erhalten, die mit den theoretischen Aussagen nicht in Einklang zu bringen waren. Es erhob sich daher die Frage, ob hier vielleicht noch andere Gesetzmässigkeiten eine Rolle spielen. Die vorliegende Arbeit wurde zu dem Zwecke unternommen, diese Verhältnisse zu klären.

Untersucht wurden die wässerigen Lösungen von KCl, KBr und KJ. Ferner eine Lösung von KCl in einem Gemisch von Alkohol und Wasser: Wir wählten diese Substanzen, weil sie infolge ihres einfachen Gitterbaues der Berechnung zugänglich sind. Die bei 30° C genau gesättigten Lösungen wurden durch schnelles Abkühlen auf einen bestimmten bekannten Übersättigungsgrad gebracht. Darauf bestimmten wir die Zeit, die bis zum Eintritt der Kristallisation verstrich. *Dieses Ereignis kündigt sich durch eine plötzlich einsetzende Veränderung der elektrischen Leitfähigkeit an*, so dass der entsprechende Zeitpunkt mittels Brückenschaltung und Verstärker sehr genau festgelegt werden kann.

Die in Vorversuchen erhaltenen Resultate zeigten, dass sich infolge der relativ geringen Diffusionsgeschwindigkeit der Ionen in der Lösung um die wachsenden Kriställchen ein Hof geringerer Konzentration ausbildet. Die Keime wachsen daher gar nicht in der makroskopisch gegebenen Konzentration, wodurch sich die Abweichungen vom erwarteten Verhalten erklären lassen. Der Gedanke liegt nahe, die Ausbildung dieses Hofes durch intensivstes Rühren zu verhindern. In der Tat zeigen die so behandelten Lösungen genau das von der Theorie geforderte Verhalten. Bei kleinen Übersättigungen konnte auch nach tagelangem Rühren keine Kristallisation mehr erhalten werden. Mit steigender Übersättigung kommt man jedoch zu einer scharf bestimmbaren Grenze, oberhalb welcher die Kristallisation schon innerhalb weniger Minuten eintritt. Mit zunehmender Oberflächenspannung der ausfallenden Kristalle bezüglich der Lösung verschiebt sich diese Grenze im Sinne steigender Übersättigung. Der Wert der Übersättigung an der Grenze lässt sich theoretisch angenähert berechnen. Die Übereinstimmung mit den gemessenen Werten ist sehr befriedigend. Die Theorie ist somit imstande, die Gesetzmässigkeiten bei der Keimbildung in übersättigten Lösungen wiederzugeben.

A. Einleitung.

Die Übersättigung und alle damit verbundenen Erscheinungen waren schon sehr frühzeitig Gegenstand der Forschung. Um die Jahrhundertwende gab W. OSTWALD durch Zusammenfassen der hauptsächlich an übersättigten Lösungen gewonnenen Beobachtungsergebnisse eine Übersicht über dieses verwickelte Gebiet. Die in der Folge unternommenen experimentellen Arbeiten wurden hauptsächlich an Dämpfen (C. T. R. WILSON²) und an Schmelzen (G. TAMMANN³) ausgeführt. M. VOLMER⁴) gelang es, im Anschluss an die lange nicht beachteten thermodynamischen Arbeiten von GIBBS⁵), im einfachsten Falle der Tröpfchenbildung aus dem übersättigten Dampfe zu einer quantitativen Theorie zu kommen. Eine strengere kinetische Begründung dieser Theorie wurde von L. FARKAS⁶) gegeben. Hinsichtlich der Kristallkeimbildung aus Dämpfen brachten die Arbeiten von VOLMER und ESTERMANN⁷), VOLMER⁸, KOSSEL⁹) und I. N. STRANSKI¹⁰) eine weitere Klärung. Es gelang darauf R. KAISCHEW und I. N. STRANSKI¹¹), die kinetische Theorie der Kristallkeimbildung aus Dämpfen zu entwickeln. Schliesslich führten die theoretischen Arbeiten von R. BECKER und W. DÖRING¹²) zu einer vollständigen Beherrschung der ungeheuren Mannigfaltigkeit der molekularen Einzelvorgänge beim Aufbau eines Kristalls.

M. VOLMER¹) verdanken wir eine bis in alle Einzelheiten gehende Darstellung der bisherigen Entwicklung dieses Wissensgebietes. Die experimentelle Prüfung bietet jedoch besonders bei Lösungen noch grosse Schwierigkeiten. Vor einiger Zeit ist eine Arbeit von U. DEHLINGER und E. WERTZ¹³) über die Keimbildung in übersättigten Alaunlösungen erschienen. Die Autoren glauben, auf Grund ihrer Resultate die Gibbs-Volmer'sche Keimbildungstheorie in ihrer Anwendung auf Lösungen ablehnen zu müssen. Im Verlaufe der vorliegenden Arbeit, die zu dem Zwecke unternommen wurde, die Keimbildung in übersättigten Lösungen einer weiteren Klärung zuzuführen, werden wir noch einmal Gelegenheit haben, auf die eben besprochene Arbeit näher einzugehen.

B. Theoretischer Teil.

Im vorliegenden Abschnitt wird die Theorie der Keimbildung in übersättigten Dämpfen kurz dargestellt. Es kann sich im Rahmen dieser Arbeit nicht darum handeln, ein in jeder Einzelheit gut fundiertes Bild zu entwerfen, vielmehr sind nur die prinzipiellen Gesichtspunkte, die zum Verständnis der nachfolgenden experimentellen Untersuchungen notwendig sind, behandelt worden. Bezüg-

lich der Einzelheiten muss auf die einschlägige Literatur verwiesen werden. (Vgl. etwa M. VOLMER¹.) Es wurde im weiteren untersucht, in welcher Weise sich die Gesetze, die die Keimbildung in Dämpfen bestimmen, auch auf Lösungen anwenden lassen. Am Schlusse dieses Abschnittes wurden schliesslich die wesentlichen theoretischen Aussagen zusammengestellt, die einer experimentellen Prüfung zugänglich sind.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse für die Bildung von Flüssigkeitströpfchen aus dem zugehörigen übersättigten Dampf. Die Grundgedanken der Keimbildung seien deshalb an diesem Beispiel entwickelt. Sie lassen sich sinngemäss auf den komplizierteren Fall der Kristallkeimbildung aus übersättigten Lösungen erweitern.

Wir betrachten ein abgeschlossenes System, das aus einer flüssigen und einer gasförmigen Phase gebildet wird, also etwa Wasser mit dem darüber befindlichen Wasserdampf. Ein solches System strebt einem Gleichgewichtszustand zu. Das Gleichgewicht ist dann erreicht, wenn in der Zeiteinheit ebensoviele Moleküle pro cm^2 der Flüssigkeitsoberfläche verdampfen, wie aus dem Dampf-Moleküle dahin zurückkehren. Sei n^{\nearrow} die Zahl der sekundlich pro Flächeneinheit verdampfenden Moleküle und n^{\nwarrow} die Zahl der zurückkehrenden, dann ist die Bedingung für das Gleichgewicht gegeben durch die Gleichung $n^{\nearrow} = n^{\nwarrow}$. Die Zahl n^{\nearrow} ist bestimmt einerseits durch die Abreissarbeit der Moleküle von der Flüssigkeitsoberfläche, die wir mit φ bezeichnen; andererseits durch die Zahl der günstig gelegenen Moleküle, die, infolge der Schwankungserscheinungen der thermischen Energie, einen genügend grossen Bewegungsimpuls besitzen, um die Abreissarbeit leisten zu können. Die Maxwell-Verteilung der kinetischen Energie der Moleküle und ihre Abhängigkeit von der absoluten Temperatur bringt es mit sich, dass je Zeiteinheit um so mehr Moleküle die Oberflächeneinheit verlassen können, je höher die absolute Temperatur ist. n^{\nearrow} ist somit eine Funktion von T und φ allein, so dass wir schreiben können: $n^{\nearrow} = f(T, \varphi)$.

Die Zahl der sekundlich pro Flächeneinheit kondensierenden Moleküle n^{\nwarrow} berechnet sich, homogene Verteilung der Dampfmoleküle vorausgesetzt, sehr einfach. Die Rechnung, die hier nicht ausgeführt werden soll, ergibt, dass n^{\nwarrow} proportional ist zur Zahl der pro cm^3 vorhandenen Moleküle, die wir mit n bezeichnen wollen, so dass wir setzen können: $n^{\nwarrow} = p(T) \cdot n$. In dieser Gleichung bedeutet p lediglich einen von der Temperatur abhängigen Faktor.

Setzen wir die Ausdrücke für n^{\nearrow} und n^{\nwarrow} in die Gleichgewichtsbedingung ein, dann erhalten wir die Gleichung:

$$p(T) \cdot n = f(T, \varphi). \quad (1)$$

Bei gegebener Temperatur T ist demnach die Gleichgewichtsdampfdichte n nur durch die Abreissarbeit φ bestimmt. Die Abreissarbeit ist nun aber für ein und dieselbe Flüssigkeit keine konstante Grösse, vielmehr hängt sie von der äusseren Form des betreffenden Flüssigkeitsvolumen ab. Da ein Flüssigkeitstropfen bei Abwesenheit äusserer Kräfte immer Kugelform annimmt, können wir uns auf diesen Fall beschränken. Die Flüssigkeitskugel bildet sich unter dem Einfluss der Oberflächenspannung. Bei der Verkleinerung des Kugelvolumens leistet diese Spannung Arbeit. Gerade das geschieht aber, wenn ein Molekül von der Kugeloberfläche verdampft. Dadurch verkleinert sich das Volumen der Kugel ein wenig und die dabei geleistete Arbeit kommt dem verdampfenden Molekül zugute, dessen Abreissarbeit um diesen Betrag geringer wird. Wir schreiben deshalb folgerichtig für die Abreissarbeit φ_r , wobei der Index r andeutet, dass φ vom Kugelradius abhängig ist.

Die Folgerung, die aus dieser Abhängigkeit zu ziehen ist, liegt auf der Hand. Dadurch wird bei konstanter Temperatur T die Gleichgewichtsdampfdichte abhängig von der Tröpfchengrösse. Unter der Voraussetzung, dass sich der Dampf wie ein ideales Gas verhält, wird der Zusammenhang zwischen Dampfdichte und Tröpfchenradius durch folgende Gleichung wiedergegeben:

$$R T \ln (n_r/n_\infty) = (2 \sigma \cdot M/r \cdot \varrho) . \quad (2)$$

Diese Gleichung wurde von W. THOMSON erstmals abgeleitet. (Vgl. M. VOLMER¹.) Es bedeuten darin:

R = Gaskonstante des idealen Gases.

T = Absolute Temperatur.

n_r = Zahl der Moleküle pro cm^3 des Dampfes, der mit dem kugelförmigen Tröpfchen vom Radius r im Gleichgewicht steht.

n_∞ = Zahl der Moleküle pro cm^3 des gesättigten Dampfes, der mit der ebenen Flüssigkeitsoberfläche ($r = \infty$) im Gleichgewicht steht.

σ = Oberflächenspannung der flüssigen Phase.

M = Molekulargewicht.

ϱ = Dichte (gr/cm^3).

In der Fig. 1 ist n_r in Funktion von r dargestellt. Es ist daraus ersichtlich, dass die Gleichgewichtsdampfdichte erst mit sehr kleinen Radien merklich zunimmt. Bei der Keimbildung in übersättigten Dämpfen haben wir es aber gerade mit Tröpfchen von dieser Grössenordnung zu tun.

Die Zunahme der Oberflächenkrümmung ist nicht die einzige Ursache für das Anwachsen der Gleichgewichtsdampfdichte. Wir

haben noch zu berücksichtigen, dass wir mit abnehmendem r schliesslich die Wirkungssphäre der atomaren Anziehungskräfte unterschreiten, so dass wir nicht mehr mit der makroskopisch definierten Oberflächenspannung rechnen dürfen. Qualitativ tritt dadurch keine Änderung im Mechanismus der Keimbildung ein. Für quantitative Berechnungen ist dieser Einfluss jedoch zu berücksichtigen.

Zu jeder Dampfdichte, die grösser ist als die Sättigungsdampfdichte über der ebenen Oberfläche existiert also eine ganz bestimmte Tröpfchengrösse, die mit dieser Dampfdichte im Gleichgewicht steht. Dieses Gleichgewicht ist aber keineswegs stabil, wie man sich leicht überlegen kann. Denn eine kleine zufällige Verkleinerung

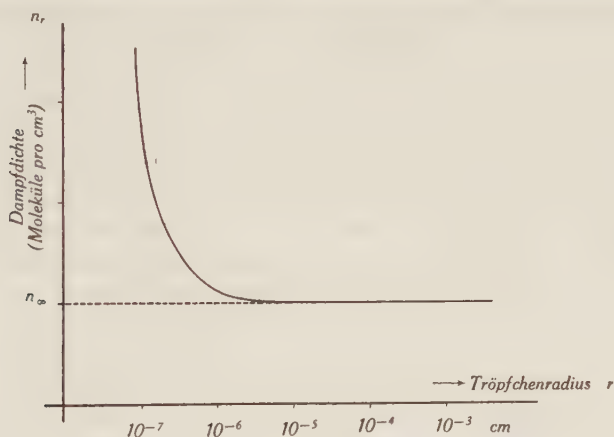


Fig. 1.

Dampfdichte in Funktion des Tröpfchenradius.

des Tröpfchens hat, wie ein Blick auf die Fig. 1 lehrt, sofort eine Erhöhung seines Dampfdruckes zur Folge. Das Tröpfchen hat deshalb die Tendenz, noch kleiner zu werden. Ebenso ist es im umgekehrten Fall. Hat sich das Gleichgewichtströpfchen zufällig einmal ein wenig vergrössert, dann sinkt sein Dampfdruck und damit steigt, konstante Dampfdichte der Umgebung vorausgesetzt, die Tendenz zur weiteren Vergrösserung.

Die Gleichgewichtströpfchengrösse stellt somit eine Art Schwelle dar, gleich einem Potentialberg, der von einer Flüssigkeitspartikel überschritten werden muss, damit sie sich zu makroskopischen Dimensionen auswachsen kann. Verfolgen wir das Wachstum einer solchen Partikel im übersättigten Dampf von der Dichte n_{r0} . In dem zunächst völlig molekular-dispers gedachten Dampf treten zufällig einige Moleküle zu einem Komplex zusam-

men mit dem Radius $r < r_0$. Dieser Komplex ist, über längere Zeit betrachtet, nicht beständig, da seine Gleichgewichtsdampfdichte ja grösser ist als die Dampfdichte der Umgebung. Die Schwankungen der kinetischen Energien der Moleküle, oder, was gleichbedeutend ist, die Schwankungen der Temperatur innerhalb kleiner Bezirke geben unserem Komplex jedoch die Möglichkeit, kurze Zeit zu bestehen oder sogar noch weiter zu wachsen. Ist die Übersättigung genügend gross und damit nach Gleichung (2) der Radius r_0 genügend klein, so wird es vorkommen, dass der Molekülkomplex die Grösse des Gleichgewichtströpfchens r_0 erreicht oder überschreitet. Damit wird er stabil und wächst bei konstant gehaltener Übersättigung über alle Grenzen weiter. Wir bezeichnen alle diejenigen Partikel, die infolge der Schwankungserscheinungen die Grösse des Gleichgewichtströpfchens erreichen konnten, als *Keime*, da sie befähigt sind, als Keime für die später makroskopisch sichtbar werdenden Flüssigkeitströpfchen zu dienen. Es bleibt uns nun noch übrig, einen exakten Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit einer solchen Schwankung der thermischen Energie der Moleküle zu finden, wie sie zur Bildung eines Keimes notwendig ist. Zu diesem Zweck kehren wir wieder zu unserem kleinen Tröpfchen vom Radius r zurück und führen damit ein Gedankenexperiment aus. Durch Anlagerung von Molekülen aus der Dampfphase lassen wir es auf den Radius $r + dr$ anwachsen, wozu wir einen bestimmten Arbeitsbetrag $-dA$ aufwenden müssen. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass es sich um einen von uns geleisteten Arbeitsbetrag handelt. Die damit verbundene Volumenzunahme beträgt $dV = 4\pi r \cdot dr$. Nun verbinden wir das Tröpfcheninnere mittels eines kleinen Röhrchens mit dem Innern des Gleichgewichtströpfchens und lassen das Flüssigkeitsvolumen dV hinüberfliessen. Dann gewinnen wir einerseits wegen der Verkleinerung der Kugeloberfläche um $dF = -8\pi r \cdot dr$ die positiv zu nehmende Arbeit $+\sigma \cdot 8\pi r \cdot dr$. Andererseits müssen wir aber wegen der Vergrösserung der Oberfläche des Gleichgewichtströpfchens, die der Volumenzunahme dV entspricht, die negativ zu nehmende Arbeit $-\sigma \cdot (4\pi r^2/r_0) \cdot dr$ leisten. Schliesslich lassen wir die dem Volumen dV entsprechende Zahl von Molekülen von der Oberfläche des Gleichgewichtströpfchens wieder verdampfen, wozu keine Arbeitsleistung notwendig ist, da sich das Tröpfchen mit seiner Umgebung ja im Gleichgewicht befindet. Damit haben wir einen isothermen Kreisprozess ausgeführt, für den die algebraische Summe der einzelnen Beiträge verschwinden muss. Diese Bedingung führt zu der Beziehung

$$dA = \sigma \left(8\pi r - \frac{4\pi r^2}{r_0} \right) \cdot dr;$$

worin dA den zur Vergrößerung des Tröpfchenradius von r auf $r + dr$ notwendigen Arbeitsbeitrag darstellt. Die gesamte Arbeit A_r , die für die Bildung eines Tröpfchens vom Radius r aus der Dampfphase aufgewendet werden muss, ergibt sich durch Integration über dA in den Grenzen von 0 bis r :

$$\begin{aligned} A_r &= \int_0^r dA = \sigma \int_0^r \left(8\pi r - \frac{4\pi r^2}{r_0} \right) \cdot dr = \\ &= \sigma \left(4\pi r^2 - \frac{4\pi r^3}{3 \cdot r_0} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gleichung (2) gibt uns die Möglichkeit, an Stelle des experimentell nicht messbaren Gleichgewichtsradius r_0 die zugehörige Übersättigung einzuführen, für die der Ausdruck

$$\delta = \ln(n_r/n_\infty) \quad (4)$$

ein bequemes Mass darstellt. Damit erhalten wir für die Bildungsarbeit eines Tröpfchens vom Radius r aus der Dampfphase mit der Übersättigung δ :

$$A_r = \sigma \cdot 4\pi r^2 - \frac{2\pi r^3}{3} \cdot \frac{R \cdot T}{M} \cdot e^{\delta} \cdot \delta. \quad (5)$$

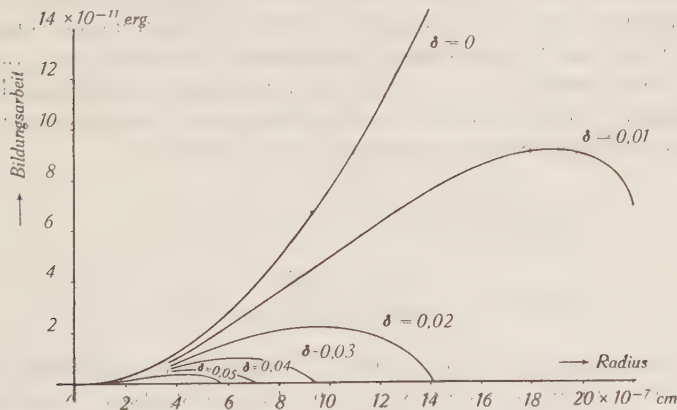


Fig. 2.

Bildungsarbeit für ein Tröpfchen in Funktion des Radius für verschiedene Übersättigungsgrade $\delta = \ln(n_r/n_\infty)$. $\sigma = 10$ dyn/cm; $M/\varrho = 36$ cm³; $T = 300^\circ$ K.

In Fig. 2 ist die Bildungsarbeit A_r in Funktion von r für verschiedene Tröpfchengrößen aufgetragen worden. Man ersieht daraus, wie für eine bestimmte Übersättigung die Bildungsarbeit mit wachsendem Radius zunächst zunimmt, dann ein Maximum durch-

läuft und schliesslich wieder abfällt. Die Höhe des Maximums nimmt ab mit steigender Übersättigung und damit wird die Schwelle niedriger, die eine wachsende Partikel zu überwinden hat, wenn sie als Keim für ein zu makroskopischen Dimensionen auswachsende Tröpfchen dienen soll. Der Radius am Orte des Maximums fällt zusammen mit dem Radius des Tröpfchens, das mit der betreffenden Dampfdichte im Gleichgewicht steht. Die Bedingung für diesen Radius ist ja $(dA_r/dr) = 0$, woraus gerade die Gleichung (2) folgt. Den Maximalwert der Arbeit, den wir *Keimbildungsarbeit* nennen wollen, erhalten wir durch Einsetzen des aus dieser Bedingung erhaltenen Radius in Gleichung (5). Sie ergibt sich zu

$$A_k = \frac{16 \pi}{3} \cdot \frac{M^2}{\rho^2 R^2 \cdot T^2} \cdot \frac{\sigma^3}{\delta^2} \quad (6)$$

Diese Gleichung bietet uns nun die Möglichkeit, den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit der Keimbildung aufzustellen. Wir benutzen dazu den Boltzmann'schen Ansatz $w \sim e^{-(u/kT)}$. Allerdings handelt es sich bei der Keimbildung um einen einseitig verlaufenden Vorgang, da die Tröpfchen, die die Keimgrösse erreicht haben, weiterwachsen, wodurch die Voraussetzung konstanter Übersättigung, die zur Ableitung der Keimarbeit benutzt wurde, hinfällig wird. Brechen wir jedoch das Experiment in dem Moment ab, in welchem die ersten makroskopisch sichtbaren Tröpfchen erscheinen, dann bleibt die Voraussetzung konstanter Übersättigung nahezu erfüllt. Wir dürfen dann mit genügender Annäherung den Boltzmann'schen Ansatz benutzen und gelangen so zu dem folgenden Ausdruck für die Keimbildungswahrscheinlichkeit:

$$w_K \sim e^{-\frac{16 \pi}{3} \cdot \frac{M^2 \cdot N}{\rho^2 \cdot R^2 \cdot T^2} \cdot \frac{\sigma^3}{\delta^2}} = e^{-\frac{C}{\delta^2}} \quad (7)$$

$$\text{mit } C = \frac{16 \pi}{3} \cdot \frac{M^2 \cdot N}{\rho^2 \cdot R^2 \cdot T^2} \cdot \sigma^3. \quad (8)$$

In C sind ausser Temperatur, Gaskonstanten, Lohschmid'schen Zahl und einem Zahlenfaktor die physikalischen Konstanten ρ , M , σ der betrachteten Flüssigkeit zusammengezogen worden.

In Fig. 3 ist die Funktion $e^{-\frac{C}{\delta^2}}$ in Abhängigkeit von der Übersättigung δ für verschiedene Werte von C dargestellt worden. Wir sehen daraus, dass für kleine Werte von δ , also für kleine Übersättigungen die Keimbildungswahrscheinlichkeit äusserst gering ist. Erst von einer bestimmten Übersättigung ab nimmt die Wahr-

scheinlichkeit rapid zu, um für grosse Übersättigungen asymptotisch den Wert 1 zu erreichen. Der Ort, in welchem die Kurve nach oben abbiegt, hängt ausschliesslich von C ab, also nach Gleichung (8) von der Temperatur und von den physikalischen Konstanten der betrachteten Flüssigkeit. Der scharfe Anstieg der Keimbildungswahrscheinlichkeit oberhalb einer bestimmten Übersättigung macht es erklärlich, dass experimentell die Unterteilung des Übersättigungsgebietes in ein metastabiles und ein labiles Gebiet vorgenommen wurde. Der metastabilen Grenze zwischen den beiden Gebieten entspricht dabei der scharfe Anstieg der Keimbildungswahrscheinlichkeit.

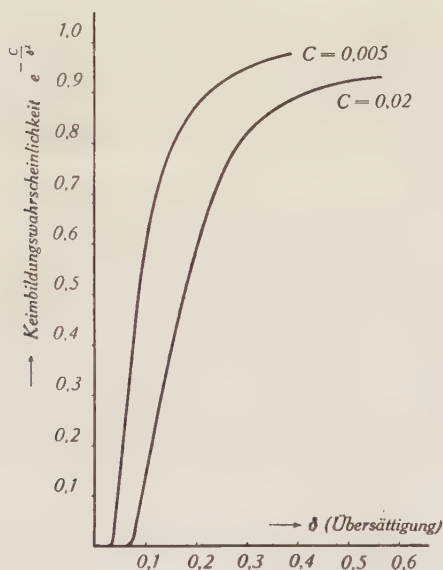


Fig. 3.

Keimbildungswahrscheinlichkeit in Funktion der Übersättigung δ .

Wir haben nun noch zu untersuchen, in welcher Weise sich die in den vorstehenden Ausführungen gefundenen Gesetzmässigkeiten im Falle der Kristallkeimbildung aus übersättigten Lösungen modifizieren. Hier treten vor allem zwei Fragen auf:

1. In welcher Weise ändert sich der Ausdruck für die Keimbildungswahrscheinlichkeit bei Kristallkeimen, die ja nicht kugelförmig wie die Flüssigkeitströpfchen, sondern polyedrisch sind?

2. Wie äussert sich der Einfluss des Lösungsmittels auf die Kristallkeimbildung in Lösungen?

Die erste Frage lässt sich leicht beantworten. Wir haben einfach überall da, wo Flächen-, beziehungsweise Volumberechnungen vorkommen, auf die polyedrische Gestalt der Keime Rücksicht zu nehmen. Es lässt sich dabei immer eine lineare Grösse a bestimmen, die die Rolle des Radius im Falle der Kugel übernimmt. Für den Fall würfelförmiger Kristallkeime, wie z. B. für Ionenkristalle vom Steinsalztyp, drängt sich die Länge a der Würfelkante als charakteristische Grösse auf. Die Rechnung, die hier nicht im einzelnen durchgeführt sei, ergibt für diesen Fall als Ausdruck für die Keimbildungswahrscheinlichkeit

$$w_K \sim e^{-32 \cdot \frac{M^2 \cdot N}{e^3 \cdot R^3 \cdot T^3} \cdot \frac{\sigma^3}{\delta^3}} \quad (9)$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem entsprechenden bei Flüssigkeitströpfchen (7) nur um einen Zahlenfaktor im Exponenten, wie zu erwarten war. Der Einfluss der Keimform ist demnach nur quantitativ. Qualitativ wird dadurch an der Erscheinung nichts geändert.

Bei der Beantwortung der zweiten Frage haben wir die Kräfte zu berücksichtigen, die zwischen den Molekülen des Lösungsmittels und des gelösten Stoffes wirksam sind. Ausserdem ist zu erwarten, dass durch die Gegenwart des Lösungsmittels die Beweglichkeit der gelösten Moleküle herabgesetzt wird, so dass sich Konzentrationsunterschiede nicht so schnell ausgleichen können, wie dies in der Dampfphase der Fall ist. Ein grosser Teil der in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Untersuchungen hatte die Klärung dieses Einflusses zum Gegenstand. Dem Ergebnis dieser Versuche soll hier nicht vorgegriffen werden.

Der Einfluss der Kräfte zwischen Lösungsmittel und gelöster Substanz lässt sich folgendermassen berechnen: Wir stellen uns ein im Wachstum begriffenes würfelförmiges Kriställchen mit der Kantenlänge a innerhalb der Mutterphase vor. Bei der Zunahme von a auf $a + da$ vergrössert sich die Oberfläche des Kriställchens um $df = 12a \cdot da$. Um ebensoviel hat aber auch die Oberfläche des Lösungsmittels zugenommen, die dem wachsenden Kriställchen ja Platz machen muss. Sei σ_I die Oberflächenspannung des Kristalls und σ_{II} diejenige der gesättigten Lösung, dann ist $df(\sigma_I + \sigma_{II})$ die Arbeit, die bei der Vergrösserung der Oberflächen um df geleistet werden muss. Bei diesem Wachstumsvorgang nimmt aber die Berührungsfläche zwischen Kristall und Lösung ebenfalls um df zu, was mit dem Energiegewinn $d\varepsilon_{I\ II}$ verbunden sein möge. Die Bilanz ergibt für den ganzen aufzuwendenden Arbeitsbetrag:

$$dA = df(\sigma_I + \sigma_{II}) + d\varepsilon_{I\ II} \quad (10)$$

Die Grösse des Energiegewinnes $d\varepsilon_{\text{I II}}$ ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Wir tauchen die frische Spaltfläche eines makroskopischen Kristalls aus dem betrachteten Stoff in seine gesättigte Lösung (Fig. 4a). Infolge der Wechselwirkung zwischen Kristall und Lösung stellt sich in jedem Fall der ganz bestimmte Benetzungswinkel φ ein, unabhängig von dem Winkel ψ zwischen Spaltebene und Lösungsmitteloberfläche. Zur Klärung der energetischen Verhält-

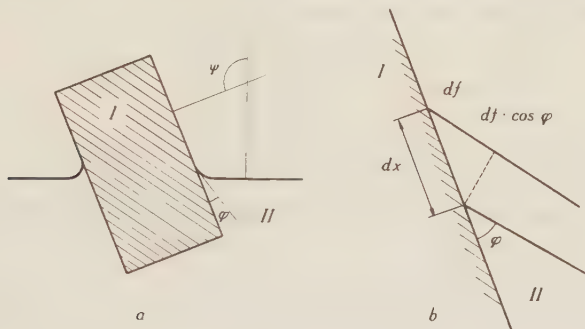


Fig. 4 a u. b.

Bestimmung der wirksamen Oberflächenspannung eines Kriställchens in der Lösung.

nisse betrachten wir die Figur 4b, die einen stark vergrösserten senkrechten Schnitt durch das Grenzgebiet zwischen Kristall und Lösung darstellt. Durch Heben der Grenzkurve um dx vergrössern wir die Berührungsfläche um $df = dx \cdot l$, wenn l die Länge der Grenzkurve bedeutet. Dabei gewinnen wir die Energie $d\varepsilon_{\text{I II}}$. Die Vergrösserung der Oberfläche der Lösung ist $df + df \cdot \cos \varphi$, wie sich aus der Figur 5b direkt ablesen lässt. Hierzu muss der Arbeitsbetrag $\sigma_{\text{II}} \cdot df \cdot (1 + \cos \varphi)$ geleistet werden. Falls Gleichgewicht vorhanden ist, muss die Summe der infinitesimalen Arbeitsbeiträge bei diesen virtuellen Oberflächenvergrösserungen verschwinden. Diese Bedingung führt zur Gleichung

$$d\varepsilon_{\text{I II}} = \sigma_{\text{II}} \cdot df \cdot (1 + \cos \varphi).$$

Die experimentelle Bestimmung des Winkels φ gibt uns Aufschluss über die Grösse des Energiegewinnes $d\varepsilon_{\text{I II}}$. Für einen NaCl-Kristall in Verbindung mit seiner gesättigten Lösung ergab sich $\varphi \cong 0^\circ$. Es ist mit Bestimmtheit anzunehmen, dass diese Beziehung für alle Ionenkristalle vom Steinsalztypus zutrifft, so dass für diesen Fall gilt:

$$d\varepsilon_{\text{I II}} = \sigma_{\text{II}} \cdot df \cdot (1 + \cos 0^\circ) = 2 \cdot \sigma_{\text{II}} \cdot df.$$

Wir setzen diesen Ausdruck in die Gleichung (10) ein und erhalten

$$dA = df \cdot (\sigma_I + \sigma_{II} - 2\sigma_{II}) = df \cdot (\sigma_I - \sigma_{II}). \quad (11)$$

$(\sigma_I - \sigma_{II})$ können wir auffassen als die Oberflächenspannung, die in der Grenzfläche zwischen unserem Kriställchen und der Lösung wirksam ist. Diese ist in dem betrachteten Fall also gleich der Differenz der Oberflächenspannungen von Lösungsmittel und ausfallendem Kristall. Für die Berechnung der Keimbildungswahrscheinlichkeit haben wir nun zu setzen:

$$w_K \sim e^{-32 \cdot \frac{M^2 \cdot N}{\varrho^2 \cdot R^3 \cdot T^3} \cdot \frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^3}{\delta^2}} = e^{-\frac{C}{\delta^2}} \quad (12)$$

$$\text{mit } C = 32 \cdot \frac{M^2 \cdot N}{\varrho^2 \cdot R^3 \cdot T^3} (\sigma_I - \sigma_{II})^3 \quad (13)$$

σ_I = Oberflächenspannung der ausfallenden Kristalle.

σ_{II} = Oberflächenspannung der gesättigten Lösung.

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (7) für den Fall der Tröpfchenbildung in übersättigten Dämpfen. Sie unterscheidet sich von jener Formel ausser dem Zahlenfaktor im Exponenten durch das Hineinspielen der Oberflächenspannung des Lösungsmittels. Wir werden daher qualitativ bei der Keimbildung in übersättigten Lösungen dieselben Erscheinungen erwarten, nämlich die Existenz eines metastabilen und eines labilen Übersättigungsgebietes, die durch eine scharfe Grenze voneinander getrennt sind (vgl. Fig. 3). Es liegt nahe, die Lage dieser Grenze mit dem Ort des steilsten Anstieges der Wahrscheinlichkeitsfunktion in Beziehungen zu bringen. Die Bedingung hierfür ist $d^2(e^{-\frac{C}{\delta^2}})/d\delta^2 = 0$. Daraus folgt

$$\delta_{\text{Grenze}} = \sqrt[3]{6C/4} = \text{Konstante} \cdot \frac{M}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{T^3}} \quad (14)$$

Bei konstanter Temperatur hängt demnach die Grenze nur vom Wert des Ausdrucks $\frac{M}{\varrho} \cdot \sqrt[3]{(\sigma_I - \sigma_{II})^3}$ ab. Die Wahl von Substanzen beziehungsweise Lösungsmitteln mit verschiedenen Oberflächenspannungen ergibt also eine weitere Möglichkeit, die Richtigkeit der Gleichung (12) zu prüfen.

Zum Schlusse dieser Ausführungen seien noch einmal die wesentlichen Aussagen, die eine experimentelle Prüfung der Theorie zulassen, zusammengestellt.

1. Lösungen von festen Körpern in Flüssigkeiten lassen sich bis zu einer bestimmten Grenze übersättigen, ohne dass Keimbil-

dung eintritt (metastabiles Gebiet). Oberhalb dieser Grenzübersättigung ist die Lösung labil. Wir erwarten hier spontane Keimbildung. Die Grenze hat keine absolute Bedeutung. Die Gebiete oberhalb und unterhalb der Grenze unterscheiden sich nur in der Grösse der Keimbildungswahrscheinlichkeit. Diese Wahrscheinlichkeit steigt jedoch innerhalb eines kleinen Gebietes sprunghaft an, so dass man praktisch von einer scharfen Grenze sprechen kann.

2. Der Wert der Übersättigung an der Grenze ist für Kristalle vom NaCl-Typus angenähert gegeben durch den Ausdruck:

$$\delta_{\text{Grenze}} = \frac{M}{\varrho} \sqrt{\frac{(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^3}{T^3}} \cdot \sqrt{32 \cdot \frac{N}{R^3}}.$$

Wir erwarten daher, dass mit steigender Oberflächenspannung der ausfallenden Kristalle beziehungsweise mit sinkender Oberflächenspannung der gesättigten Lösung die Grenze sich im Sinne steigender Übersättigung verschiebt. Es ist jedoch darauf zu achten, dass infolge der kleinen Dimensionen der Keime (Grössenordnung 10^{-7} cm) ihre Oberflächenspannung nicht mit der makroskopischen übereinstimmt. (Vergleiche die Ausführungen auf Seite 703.)

C. Experimenteller Teil.

1. Allgemeines zu den Messungen.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden an Kaliumjodid-, Kaliumbromid- und Kaliumchlorid in Wasser und an Kaliumchlorid in einem Gemisch von Wasser und Athylalkohol (32 Gew. % Alkohol) vorgenommen. Die Gründe, die zur Wahl dieser Substanzen führte, waren folgende:

a) Die genannten Stoffe bilden alle Ionenkristalle vom Steinsalztypus. Sie unterscheiden sich nur in den Oberflächenspannungen, den Molekulargewichten und Dichten. Dies sind aber gerade die Grössen, die in die Gleichung (12) für die Keimbildungswahrscheinlichkeit eingehen. Die erhaltenen Resultate können also unmittelbar miteinander verglichen werden.

b) Der Bodenkörper der drei Salze zeigt in dem interessanten Temperaturgebiet von 0 bis 100° C keine Modifikationen.

c) Die Löslichkeit der drei Salze in Wasser ist stark temperaturabhängig (siehe Tab. 1). Dies ist wichtig, da diese Abhängigkeit dazu benutzt wird, eine homogene Übersättigung zu erreichen. Aus diesem Grunde eignet sich z. B. NaCl für derartige Versuche nicht, weil dort die Abhängigkeit der Löslichkeit von der Tem-

peratur sehr gering ist. Der Verlauf der Temperatur-Löslichkeitskurve liegt auch insofern günstig, als für alle drei Salze die gleiche Temperaturabsenkung nahezu dieselbe Übersättigung hervorruft.

Tabelle 1.

Abhängigkeit der Löslichkeit von der Temperatur.

Solvat	Solvens	10°	20°	30°	40°	50°
KJ	Wasser	136	144	152	160	168
KBr	Wasser	59,5	65,2	70,6	75,5	80,2
KCl	Wasser	31,0	34,0	37,0	40,0	42,6
KCl*	Wasser + 32 Gew. % Aethylalk.	11,9*	14,05*	16,25*	18,4*	20,6*

Die Zahlen bedeuten g Solvat pro 100 g Lösungsmittel.

Diese Werte sind teilweise dem *Handbook of Chemistry and Physics*, 22nd Edition entnommen worden. Die mit * bezeichneten Werte entstammen eigenen Messungen.

d) Der einfache Gitterbau der drei Substanzen erlaubt es, die Oberflächenspannungen für den absoluten Nullpunkt zu berechnen. Die erhaltenen Werte können zwar nicht unmittelbar zur Berechnung der metastabilen Grenze (Gl. (14)) benutzt werden. Denn erstens sind sie unter der Voraussetzung gewonnen worden, dass sich die Atome auch an der Oberfläche der Kristalle streng in den idealen Gitterpunkten befinden. Dies trifft sicher nicht zu, vielmehr wird die Oberfläche infolge der unsymmetrischen Lage etwas deformiert, was mit einer Verminderung der Oberflächenspannung einher geht. Zweitens ist bei den in Frage kommenden kleinen Kriställchen von der Grössenordnung 10^{-7} bis 10^{-6} cm die Oberflächenspannung kleiner als bei makroskopischen Kristallen (vgl. hierzu die Ausführungen auf Seite 703). Immerhin kann man der Berech-

Tabelle 2.

Zusammenstellung der physikalischen Daten der untersuchten Stoffe.

Stoff	Oberflächenspannung		Oberfl. spannung d. Lösung dyn/cm	M g	Dichte g/cm ³
	Kristall* berechnet dyn/cm	Schmelze gemessen dyn/cm			
KCl	107,5	95,8 (800° C)	78,8	74,56	1,98
KBr	91,6	85,7 (775° C)	—	119,02	2,75
KJ	74,0	75,2 (737° C)	—	166,02	3,5

* Diese Berechnungen sind von MADELUNG¹⁴⁾ ausgeführt worden. Die übrigen Zahlen stammen aus dem *Handbook of Chemistry and Physics*, 22nd Edit.

nung entnehmen, dass die Oberflächenspannung von KJ über KBr nach KCl zunimmt. Dies geht ja auch aus der Verschiedenheit der Löslichkeit der drei Salze in ein und demselben Lösungsmittel (Tab. 1) hervor. Als Folge dieser Zunahme der Oberflächenspannung werden wir erwarten, dass sich die metastabile Grenze in der gleichen Reihenfolge nach grösseren Übersättigungen verschiebt. In Tab. 2 sind die physikalischen Daten der drei Salze sowie ihrer Lösungen eingetragen worden, soweit sie bekannt sind.

2. Beschreibung der Messanordnung.

Fig. 5 zeigt eine schematische Darstellung der Messanordnung. Diese bestand im wesentlichen aus zwei Teilen, nämlich aus Thermostat und Messbrücke, die nachstehend beschrieben werden.

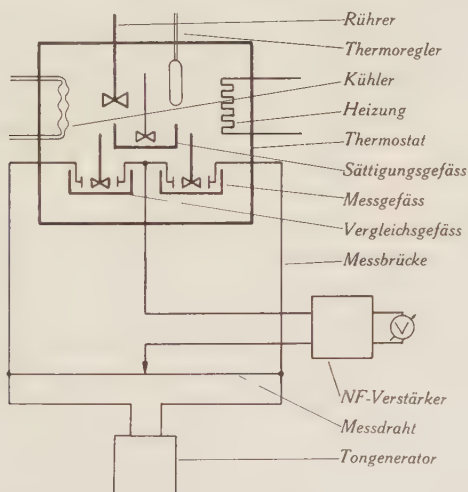


Fig. 5.

Schema der Versuchsanordnung.

a) *Thermostat.* An den Thermostaten wurden hauptsächlich zwei Forderungen gestellt. Erstens musste die Temperatur über einen Bereich von 15° bis 60° C innerhalb einiger Minuten variiert werden können und zweitens musste die einmal eingestellte Temperatur für längere Zeit, oft mehrere Tage, auf weniger als $\frac{1}{10}^{\circ}$ C konstant gehalten werden können.

Die erste Forderung wurde durch Wahl eines kleinen Thermostatengefäßes von 25 cm Länge, 20 cm Breite und 18 cm Tiefe erfüllt. Dieses bestand aus Glas, weil es dadurch möglich wurde, die Vorgänge im Thermostaten dauernd unter Kontrolle zu behalten.

Als Badflüssigkeit wurde reines Paraffinöl gewählt. Dieses verbindet den Vorteil der Durchsichtigkeit mit dem einer kleinen spezifischen Wärme (ca. 0,5 cal/g Grad), was für schnelle Temperaturänderungen von Bedeutung ist. Ausserdem besitzt es einen sehr kleinen Dampfdruck, so dass es praktisch nicht verdunstet.

Ein Messingzylinder von 6 cm Durchmesser und 15 cm Länge tauchte senkrecht bis über den oberen Rand in die Badflüssigkeit ein. Im Inneren dieses Zylinders waren Heizwicklung und Kühlschlange angebracht. In der Achse des Rohres lief die Rührwelle nach unten. Am untern Ende war ein Flügelrad vom gleichen Durchmesser wie das Rohr befestigt. Bei etwa 2000 T/Min. wirkte dieses Flügelrad als kräftige Zentrifugalpumpe, die innerhalb ca. 10 Sekunden die ganze Ölmenge einmal durch das Rohr saugte. Dadurch wurde eine absolut gleichmässige Temperatur im ganzen Gefäss erzielt. Durch intensives Heizen oder Kühlen konnte, dank der kräftigen Bespülung des Heizdrahtes bzw. der Kühlschlange die Temperatur innerhalb 2 Minuten von 20° auf 50° C und innerhalb 10 Minuten wieder auf 20° gebracht werden. Die Anordnung des Rühreres am untern Ende des Rohres hat ausserdem noch den Vorteil, dass trotz kräftiger Rührung die Badoberfläche ruhig bleibt.

b) *Messbrücke*. Es handelte sich bei den Versuchen darum, den genauen Zeitpunkt festzulegen, in welchem die Kristallisation eintrat. Die visuelle Beobachtung ist sehr mühsam und ungenau. Es wurde deshalb die nachstehend beschriebene Methode benutzt.

Das Gefäss, in welchem sich die zu untersuchende Lösung befand, war als elektrolytische Zelle ausgebildet. Diese wurde in den einen Zweig einer sehr empfindlichen Messbrücke eingeschaltet. Im anderen Zweig befand sich ebenfalls ein genau gleich gebautes Gefäss mit einer Vergleichslösung, die nahezu denselben Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit besass. Dadurch konnte der Temperatureffekt eliminiert werden. Mit temperaturunabhängigem Vergleichswiderstand betrug die Verschiebung des Minimums auf dem Messdraht 30 mm pro $\frac{1}{10}^{\circ}$ Temperaturänderung im Messgefäss. Mit der Vergleichslösung sank die Verschiebung des Minimums für die gleiche Temperaturänderung auf weniger als 1 mm. Ferner konnte mit dieser Anordnung auch der störende Polarisations-effekt eliminiert werden. Der Ort des Minimums zeigte sich im Intervall von 200—15000 Hz unabhängig von der Frequenz des Messtromes.

Beim Einsetzen der Kristallisation sinkt die elektrische Leitfähigkeit der Lösung plötzlich ab. Dies äussert sich durch einen bequemer zu beobachtenden sprunghaften Anstieg des Brücken-

stromes. Die Beobachtung kann dadurch erleichtert werden, dass man den Anstieg des Brückenstromes registriert. Auf diese Weise können die zeitraubenden Messungen z. B. auch nachts weitergeführt werden.

Der Bau des Messgefässes und des gleich gebauten Vergleichsgefässes sei an Hand der Fig. 6 beschrieben. Die beiden Glasge-

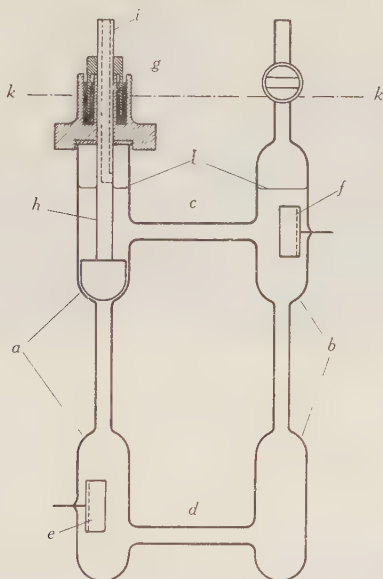


Fig. 6.
Messgefäß.

fässe *a* und *b* tragen zur Erhöhung des elektrischen Widerstandes in ihrem mittleren Teile eine Verengung. Aus dem gleichen Grunde sind auch die Verbindungsröhrchen *c* und *d* eng gehalten. *e* und *f* sind die beiden mit Platinmohr überzogenen Elektroden aus Platinblech. Sie sind je etwa 4 cm^2 gross. Das Rohr *b* trägt oben einen kurzen verschliessbaren Rohrstutzen, der zum Einfüllen der Lösung dient. Der Verschluss des Rohres *a* wird durch das Rührlager *g* gebildet, das mittels eines Ringes aus Bunagummi dicht aufgesetzt werden kann. Die Welle ist, wie aus der Figur ersichtlich, mit Quecksilber abgedichtet. Der Rührer *h* besteht aus gut vernickeltem Messing. An seinem unteren Ende ist ein Blatt angefräst, das sich der Form der Rohrwandung angepasst. Bei einer Tourenzahl von 600 T/Min. wirkt das Blatt als Zentrifugalpumpe, die die ganze Lösungsmenge von etwa 30 cm^3 in 8 Sekunden einmal umwälzt. Damit beim Einfüllen die Luft aus dem oberen Teil des Rohres *a*

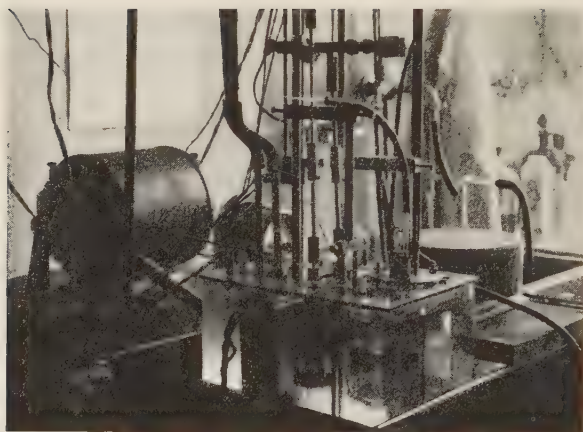


Fig. 7.

Bild des Thermostaten.

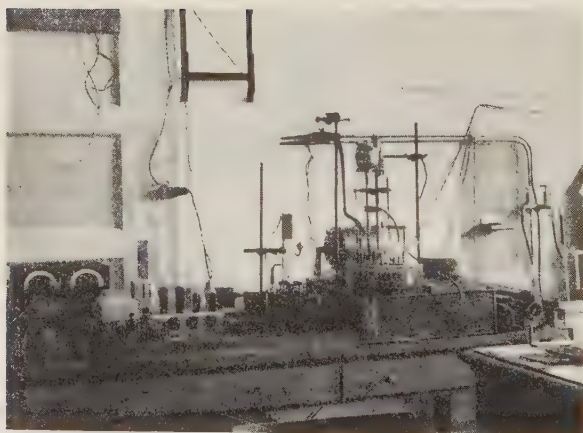


Fig. 8.

Gesamtansicht der Versuchsanlage.

entweichen konnte, musste die Rührwelle *i* hohl gemacht werden. Nach dem Einfüllen wurde sie durch einen Gummistopfen verschlossen. Die Lösung wurde bis zur Höhe *l* eingefüllt. Das ganze Gefäss befand sich bis zur Höhe *k* im Ölbad.

Fig. 7 zeigt ein photographisches Bild des Thermostaten und Fig. 8 eine Gesamtansicht der Versuchsanlage.

3. Beschreibung der Vorversuche.

Die zu untersuchende Lösung wurde bei einer bestimmten Temperatur gesättigt und darauf in das Messgefäss eingefüllt, das sich auf derselben Temperatur befand. Anschliessend wurde die Temperatur mit verschiedenen Geschwindigkeiten abgesenkt und so eine bestimmte Übersättigung erzeugt, die sich aus der Temperatur-Löslichkeitskurve berechnen lässt. Nun wurde die Zeitdauer bestimmt, die bis zum Ausfallen des Bodenkörpers verstrich. Diese Zeitdauer soll im folgenden *Wartezeit* genannt werden. Es wird dabei stillschweigend die Annahme gemacht, dass die Wartezeiten sich umgekehrt proportional zu den Keimbildungswahrscheinlich-

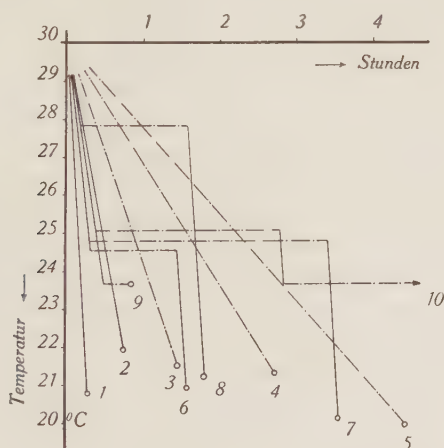


Fig. 9.

Graphische Darstellung der Unterkühlungsversuche an wässrigen KCl-Lösungen.
 — Lösung bleibt in Ruhe; — — — Lösung wird gerührt.

keiten bei den betreffenden Übersättigungen verhalten. Die beobachteten Wartezeiten waren völlig regellos und es schien unmöglich, daraus irgendeine Gesetzmässigkeit ablesen zu können. Eine Unzahl von Versuchen gestattete aber schliesslich, bestimmte Abkühlungsbedingungen zu schaffen, bei denen die gemessenen Warte-

zeiten nur wenig streuten. Es hat natürlich keinen Sinn, sämtliche ausgeführten Versuche zu beschreiben. Es sollen vielmehr nur einige charakteristische Resultate mitgeteilt werden, weil diese Aufschluss geben können über den Einfluss des Lösungsmittels auf die Keimbildung.

In Fig. 9 sind diese charakteristischen Versuche dargestellt worden. Für jeden einzelnen Versuch wurden die Lösungen frisch hergestellt. Die Sättigung wurde immer bei 30° C vorgenommen. Darauf wurden die Lösungen längs der eingezeichneten Kurven abgekühlt, bis schliesslich die Bildung des Bodenkörpers einsetzte. Längs der strichpunktirten Linien waren die Lösungen gerührt worden.

Versuch Nr. 1. Die Lösung wird ohne Rühren rasch abgekühlt. Zwischen 19 und 20° C tritt spontane Kristallisation ein. Es bilden sich wenig Kristalle, die dementsprechend ziemlich gross werden. (Grobe Struktur des Bodenkörpers.)

Versuch Nr. 2. Bei kleinerer Abkühlungsgeschwindigkeit tritt die Kristallisation schon bei kleineren Übersättigungen ein. Die Struktur des Bodenkörpers bleibt dieselbe.

Versuch Nr. 3. Während des Abkühlens wird die Lösung gerührt. Sie lässt sich trotz längerer Abkühlungsdauer stärker übersättigen als in Versuch Nr. 2. Der ausfallende Bodenkörper zeigt feine Struktur.

Versuche Nr. 4 und 5. Mit zunehmender Abkühlungszeit und gleichzeitigem Rühren wird die erreichbare Übersättigung immer grösser. Die Struktur des Bodenkörpers wird feiner.

Versuche Nr. 6 und 7. Es zeigt sich, dass es im wesentlichen auf das Rühren in einem Gebiet geringerer Übersättigung (etwa bei 24°) ankommt. Je länger die Lösung in diesem Gebiet gerührt wird, um so stärker lässt sie sich nachher übersättigen.

Versuche 8 und 9. Wird nach Kurve 8 abgekühlt, so verhält sich die Lösung wie die nach 1 und 2 behandelten. Das Rühren scheint hier keinen Einfluss zu haben. Die nach Kurve 9 abgekühlte Lösung fällt schon während des Rührens mit ziemlich grober Struktur aus.

Versuch Nr. 10. Eine nach Kurve 10 behandelte Lösung kann innerhalb einer Versuchsdauer von mehreren Stunden nicht mehr zur Kristallisation gebracht werden, obwohl die Übersättigung dieselbe ist wie bei Versuch 9.

Diese Versuche zeigen, dass die Vorgeschichte der Lösung bis zur schliesslich einsetzenden Kristallisation ausschlaggebend ist. Die Neigung zur Keimbildung wie auch die Struktur des ausfallenden Bodenkörpers hängt ab von dem Wege, auf dem die Lösung auf den entsprechenden Übersättigungsgrad gebracht worden ist. Besonders das Rühren während des Unterkühlens hat einen grossen

Einfluss. Im folgenden wird versucht, die Ursache für dieses Verhalten zu finden. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Fig. 3. Wir haben hier die Bildungsarbeit für ein Tröpfchen in Funktion des Radius für verschiedene Übersättigungsgrade aufgetragen. Für $\delta = 0$ z. B. wächst diese Bildungsarbeit quadratisch mit dem Radius an. Im Gleichgewichtszustand werden wir Tröpfchen jeder Grösse vorfinden, und zwar so, dass die Zahl der Tröpfchen, deren Radius im Intervall von r bis $r + dr$ liegt, proportional ist zu $e^{-(A_r/kT)} dr$, wo A_r die entsprechende Bildungsarbeit bedeutet. Beim Übergang zu schwach übersättigten Lösungen, z. B. für $\delta = 0,01$, ändert sich die Gleichgewichtsverteilung der Tröpfchen etwas, entsprechend dem geänderten Verlauf der Bildungsarbeit. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Schwelle überschritten werden könnte, was zur Bildung eines makroskopischen Kristalles führen würde, ist hier noch verschwindend gering. Erst wenn die Schwelle so niedrig geworden ist, z. B. für $\delta = 0,04$, dass sie gelegentlich von einem Tröpfchen überschritten werden kann, ändert sich das Bild grundsätzlich. Denn das nun wachstumsfähige Partikel entzieht dem Dampf soviel Moleküle, dass die Ausgangskonzentration zu sinken beginnt sich schliesslich der Sättigungskonzentration nähert.

Lösungen werden prinzipiell dasselbe Verhalten zeigen. Nur müssen wir hier damit rechnen, dass sich die Zeit, die zur Ausbildung eines Gleichgewichtszustandes notwendig ist, entsprechend dem kleineren Diffusionskoeffizienten der Moleküle in der Lösung um ein Vielfaches verlängert. Es lässt sich leicht angeben, wie gross der Einfluss der Diffusion ist. Betrachten wir z. B. ein Kriställchen in einer Lösung mit der Konzentration $c_0 > c_\infty$ ($c_\infty =$ Sättigungskonzentration). Das Kriställchen charakterisieren wir durch den Radius a der umschriebenen Kugel und rechnen im Folgenden so, wie wenn das Kriställchen kugelförmig wäre. Damit begehen wir einen Fehler, der jedoch für die folgende Betrachtung unwesentlich ist. Dem Radius a entspricht gemäss Gleichung (2) (Seite 702) eine ganz bestimmte Konzentration c_a . Wir setzen dabei $n_r/n_\infty = c_r/c_\infty$, was wegen der Proportionalität von n und c erlaubt ist. Unmittelbar an der Oberfläche des Kriställchens ist die Konzentration im Mittel c_a , während sie in der weiteren Umgebung nach Voraussetzung c_0 ist. Je nachdem $c_0 \leq c_a$ ist, bildet sich ein Diffusionsstrom vom oder zum Kriställchen aus, welches infolge dessen ab- bzw. zunimmt. Um diesen Strom zu berechnen, gehen wir aus von der Diffusionsgleichung für das kugelsymmetrische Problem:

$$\partial c / \partial t = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} \right).$$

Darin bedeutet D den Diffusionskoeffizienten. Der Nullpunkt unseres Bezugssystems fällt mit dem Mittelpunkt des Kriställchens zusammen. An der Kristalloberfläche werden die herantransportierten Moleküle angelagert. Dadurch wird im Laufe der Zeit die Konzentration der Lösung sinken. Wir nehmen jedoch das Lösungsvolumen so gross, dass die Konzentrationsänderung innerhalb der Beobachtungszeit nicht ins Gewicht fällt. Damit können wir den Vorgang angenähert als stationär ansehen und $\partial c / \partial t = 0$ setzen. Wir erhalten dann für c die Lösung:

$$c = A/r + B.$$

Die Randbedingungen des Problems sind nach den vorstehenden Bemerkungen

$$r = a \longrightarrow c = c_a$$

$$r = \infty \longrightarrow c = c_0$$

Daraus erhält man

$$A = a(c_a - c_0)$$

$$B = c_0$$

und schliesslich:

$$c = a(c_a - c_0)/r + c_0 \quad (15)$$

mit c = Konzentration in g/cm^3 der gelösten Substanz.

c_a = Gleichgewichtskonzentration des Tröpfchens vom Radius a gemäss Gleichung (2).

c_0 = makroskopisch gemessene Konzentration der Lösung.

a = Radius des Kriställchens.

r = Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkt des Kriställchens.

Diese Gleichung gibt uns den Konzentrationsverlauf in der Umgebung des Kriställchens. Die sekundlich in radialer Richtung durch den Querschnitt 1 cm^2 fliessende Menge ist

$$q = -D \cdot \partial c / \partial r = D \cdot a \cdot (c_a - c) / r^2$$

und damit die sekundlich an den Kristall gelangende Menge in Gramm

$$Q = \oint q \cdot df = 4\pi r^2 \cdot q = 4\pi a \cdot D \cdot (c_a - c_0)$$

Das Volumen dieser Menge ist Q/ϱ , wenn ϱ die Dichte des Kristalls bedeutet. Somit wird die sekundliche Zunahme des Kristallvolumens

$$dV/dt = -Q/\varrho = -4\pi a \cdot D \cdot (c_a - c_0) / \varrho$$

oder, wenn wir die Zunahme des Radius betrachten:

$$da/dt = (da/dV) \cdot (dV/dt) = -D \cdot (c_a - c_0) / a \cdot \varrho. \quad (16)$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Radius sich ändert, ist also direkt proportional zum Diffusionskoeffizienten D . Ausserdem ist sie proportional zur Differenz der Konzentrationen und, aus geometrischen Gründen, umgekehrt proportional zum Radius der wachsenden Partikel.

Für Wasserdampf in Luft z. B. ist

$$D = 0,239 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

Für KCl in Wasser dagegen nur

$$D = 1,47 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$$

(Diese Zahlen stammen aus dem *Handbook of Chemistry and Phys.*)

Die Änderungsgeschwindigkeit des Radius eines kleinen KCl-Kriställchens in seiner wässrigen Lösung ist also unter sonst gleichen Umständen grössenordnungsmässig 10^5 mal geringer als diejenige eines Wasserströpfchens in mit Wasserdampf übersättigter Luft. Entsprechend langsam verläuft auch die Ausbildung des Gleichgewichtszustandes in der Lösung.

Es ist einleuchtend, dass durch diesen Umstand auch die Keimbildung behindert wird. Ein Keim muss ja innerhalb einer statistischen Schwankungsperiode der thermischen Energie entstehen. Die Dauer einer solchen Periode tritt nun mit der Zeit, die der Keim zur Ausbildung braucht, und die von der Wachstums- geschwindigkeit (Gleichung (16)) abhängt, in Konkurrenz. Ist diese Geschwindigkeit klein, so wird die Schwankung schon wieder abgeklungen sein, bevor sich der Keim gebildet hat. Dadurch wird aber die Keimbildungswahrscheinlichkeit (Gleichung (12)) heruntergedrückt. Eine wesentliche Voraussetzung bei der Ableitung dieser Gleichung war ja die Annahme, dass sich die wachsenden Partikel immer in der makroskopisch gegebenen Übersättigung befinden. Die Ausbildung eines Diffusionshofes nach Gleichung (15) zerstört diese Voraussetzung und damit auch die Gültigkeit des Ausdrucks für die Keimbildungswahrscheinlichkeit.

Es ist hier der Ort, auf die Arbeit von U. DEHLINGER und E. WERTZ¹⁵⁾ näher einzugehen. Diese Autoren haben, wie in der Einleitung bereits erwähnt, folgendes Verfahren eingeschlagen. Die bei verschiedenen hohen Temperaturen gesättigten und keimfrei gemachten Alaunlösungen wurden in verschlossenen Gläsern auf die Beobachtungstemperatur abgekühlt. Darauf wurde die Zeit bestimmt, die bis zum Erscheinen der ersten Kristalle verstrich, die wir im Vorhergehenden die Wartezeit genannt haben. Diese Methode vernachlässigt aber gerade die Voraussetzung homogener Übersättigung bis in die unmittelbare Umgebung der wachsenden

Partikel. Eine Übereinstimmung mit den Aussagen der Gibbs-Volmer'schen Keimbildungstheorie ist daher zum vorneherein nicht zu erwarten. Die hohen Übersättigungsgrade (400%), die für den Eintritt spontaner Kristallisation notwendig waren, lassen sich leicht an Hand der Gleichung (16) erklären. Denn mit wachsendem Übersättigungsgrad c_a und dementsprechender Abnahme des Keimradius a kann die Wachstumsgeschwindigkeit da/dt so weit gesteigert werden, dass die zur Ausbildung eines Keimes notwendige Zeit mit der Dauer einer thermischen Schwankungsperiode erfolgreich in Wettbewerb treten kann. Mit diesen Ausführungen ist nichts gesagt gegen die von den beiden Verfassern vertretenen Ansicht, dass die Keimbildung durch den von einer bestimmten Konzentration an negativ werdenden Diffusionskoeffizienten bedingt sei. Es muss lediglich hervorgehoben werden, dass die Versuche infolge der erwähnten Umstände die Gibbs-Volmer'sche Keimbildungstheorie nicht berühren.

Eine Prüfung der Theorie würde die Berücksichtigung der durch den Diffusionshof verursachten Erscheinungen erfordern. Obwohl dies grundsätzlich möglich wäre, ist in der vorliegenden Arbeit ein anderer Weg eingeschlagen worden. Der Grund hierfür liegt darin, dass diese Methode sehr lange, sich über Jahre hinziehende Beobachtungen mit allen den damit verbundenen z. T. unkontrollierbaren Zufälligkeiten erfordern würde. Es scheint daher viel einfacher, statt der Berücksichtigung des Diffusionshofes diesen möglichst weitgehend auszuschalten und damit ähnliche Verhältnisse zu schaffen, wie sie in Dämpfen schon von Natur aus gegeben sind. Dies wird dadurch erreicht, dass die Lösung während der Beobachtung intensiv gerührt wird. Die Möglichkeit der Zerstörung des Diffusionshofes durch Rühren ergibt sich aus der folgenden Betrachtung.

Wir haben dazu die mittlere Ausdehnung eines solchen Diffusionshofes zu berechnen. Der Verlauf der Konzentration ist durch Gleichung (15) gegeben. Der Radius der Kugel, auf welcher die Konzentration in der Mitte zwischen c_a und c_0 liegt, ergibt sich aus der Bedingung:

$$c = c_0 + \frac{c_a - c_0}{2} = a(c_a - c_0)/r + c_0$$

zu $r = 2a$ und nach Gleichung (2) schliesslich zu

$$r = 4 \cdot \sigma \cdot M/R \cdot T \cdot \varrho \cdot \ln(c_a/c_\infty)$$

Mit den für KCl in H_2O geltenden Zahlen

$\sigma = \sim 1 \text{ dyn/cm}$ (vgl. die Ausführungen im Anschluss an die Messresultate).

$$M = 74,56 \text{ g}$$

$$\rho = 1,98 \text{ g/cm}^3$$

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/Grad}$$

$$T = 300 \text{ Grad K}$$

$$c_\infty = 0,29 \text{ g/cm}^3 = \text{Sättigungskonzentration bei } 20^\circ \text{ C}$$

$$c_a = 0,305 \text{ g/cm}^3$$

$$\ln(c_a/c_\infty) = 0,05$$

wird $r = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ und damit der ungefähre Durchmesser des Diffusionshofes $d = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$.

Beim Rühren entsteht zwischen Wand und Rührblatt ein Geschwindigkeitsgefälle (vgl. Fig. 6 und die Beschreibung des Messgefäßes auf Seite 715). Der Rührer rotiert mit 600 Touren pro Minute. Die Umfangsgeschwindigkeit ist demnach bei einem Rührerdurchmesser von 2 cm:

$$v_{\text{Umfang}} = r \cdot \omega = 63 \text{ cm/sec.}$$

Die Geschwindigkeit an der Wand ist

$$v_{\text{Wand}} = 0.$$

Der Spalt zwischen Rührblatt und Wand ist etwa $\Delta s = 0,05 \text{ cm}$. Daraus ergibt sich für den Gradienten der Geschwindigkeit

$$\text{grad } v = \Delta v / \Delta s = 1,26 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1}.$$

Bei der oben berechneten mittleren Ausdehnung des Diffusionshofes von $2,4 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ ergibt dies einen Geschwindigkeitsunterschied zweier einander gegenüberliegender Randpunkte des Hofes von $\Delta v = 2,4 \cdot 10^{-7} \cdot 1,26 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ cm/sec}$. Der Hof wird also schon in weniger als einer Sekunde völlig zerstört. Auf Grund dieser Betrachtung dürfen wir annehmen, dass die Voraussetzung homogener Übersättigung, die zur Prüfung des Ausdrucks für die Keimbildungswahrscheinlichkeit (Gleichung (12)) wesentlich ist, weitgehend erfüllt ist. Im Licht der vorstehenden Überlegungen betrachtet, erhalten auch die am Anfang dieses Abschnittes beschriebenen Vorversuche ihre Erklärung.

In Versuch 1 wurde die Lösung schnell und ohne Rühren abgekühlt. Infolge der hemmenden Wirkung des Diffusionshofes wird der Ausgangszustand der Lösung weitgehend aufrecht erhalten. Erst bei grosser Konzentration wird es wenigen z. T. vielleicht schon vorgebildeten Teilchen gelingen, die Keimgrösse zu überschreiten. Die Struktur des Bodenkörpers muss demnach sehr grob sein, wie es auch tatsächlich beobachtet wird.

In Versuch 5 bewirkt das Rühren in Verbindung mit der langsamen Abkühlungsgeschwindigkeit in jedem Punkt der Abküh-

lungskurve eine weitgehende Annäherung an den jeweiligen Gleichgewichtszustand. Die zahlreichen Mikrokriställchen von Unterkeimgrösse bewirken eine Verminderung der Konzentration der molekulardispersen Phase, so dass dementsprechend die Keimbildungswahrscheinlichkeit abnimmt. Es kann somit erst bei grossen Übersättigungen Keimbildung eintreten. Die grosse Zahl der miteinander in Wettbewerb tretenden Kriställchen bedingt einen sehr feinkörnigen Bodenkörper, was durch den Versuch bestätigt wird.

Alle anderen Unterkühlungsbedingungen müssen zwischen diesen beiden Grenzfällen liegen. So muss z. B. in Versuch 3 die Auskristallisation bei kleineren Übersättigungen erfolgen als in Versuch 1 und 5, da einerseits die Behinderung durch den Diffusionshof wegfällt, andererseits aber die Ausbildung des Gleichgewichts nicht so weit getrieben wird wie in Versuch 5.

Besonders interessant sind die Versuche 6 und 7. Durch längeres Rühren bei einer Übersättigung, die zur spontanen Keimbildung noch nicht ausreicht, stellt sich das entsprechende Gleichgewicht ein. Bei der nachfolgenden Abkühlung bleibt dieser Zustand weitgehend erhalten, was sich in der höheren Übersättigungsmöglichkeit und in der Struktur des Bodenkörpers äussert. Wird dabei die anfängliche Übersättigung zu klein gewählt wie in Versuch 8, so bilden sich nur wenig Unterkeime aus; die Lösung verhält sich daher bei der nachfolgenden Abkühlung wie in Versuch 1 oder 2. Wird die Übersättigung zu gross gewählt wie in Versuch 9, dann fällt die Lösung schon während des Rührens aus, da in diesem Gebiet die Keimbildungswahrscheinlichkeit schon genügend gross ist.

Eine bei kleinerer Übersättigung vorbehandelte Lösung (Versuch 10) gibt bei gleicher Unterkühlungstemperatur wie in Versuch 9 auch nach stundenlangem Rühren keine spontane Kristallisation mehr. Eine solche Lösung kann, wenn sie stufenweise abgekühlt wird, wobei auf jeder Stufe ca. 1 Stunde gerührt wird, leicht bis auf 12°C unterkühlt werden, was einer Übersättigung von ca. 20% entspricht. Der schliesslich ausfallende Bodenkörper ist dann so fein, dass die Lösung stundenlang getrübt bleibt.

Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass der bei hohen Übersättigungen (etwa nach Versuch 10) erreichte Gleichgewichtszustand zähe festgehalten wird. Es gelingt nämlich durch halbstündiges Erhitzen auf 50°C unter ständigem Rühren nicht mehr, die Lösung völlig in den ursprünglichen Zustand zurückzuführen. Dieses „Altern“ der Lösung spielt bei den im nächsten Abschnitt beschriebenen Messungen eine Rolle. Es hat zur Folge, dass ein und dieselbe Lösung nicht beliebig oft zur Messung gebraucht werden kann.

Die Anreicherung der Lösung mit Mikrokristallen von Unterkeimgrösse, wie sie etwa in Versuch 10 eintritt, muss sich auch direkt nachweisen lassen, z. B. durch die Veränderung der Tyndall-Streuung oder des Brechungsindex. Ferner lassen sich aus der Struktur des Bodenkörpers weitgehende Schlüsse ziehen. Auch durch Messen der elektrischen Leitfähigkeit muss man die Veränderung nachweisen können. Durch Versuche in dieser Richtung mit der vorliegenden Apparatur konnte ein solcher Effekt auch mit Sicherheit nachgewiesen werden.

4. Die Messungen.

a) Durchführung der Messungen.

Die im letzten Abschnitt angestellten Betrachtungen setzen uns nun in den Stand, die Prüfung der im theoretischen Teil abgeleiteten Aussagen zweckmässig durchzuführen. Dabei muss in erster Linie dem Ausgangszustand der Messlösung Beachtung geschenkt werden. Wir haben hier drei Forderungen zu erfüllen.

1. Die Reproduzierbarkeit der Messungen erfordert peinlich saubere Lösungen.

2. Die Ausgangslösung muss in möglichst weitgehend dissoziiertem Zustand vorliegen.

3. Es ist darauf zu achten, dass die Lösung bei der Ausgangstemperatur genau gesättigt ist.

Diese Forderungen werden auf folgende Weise erfüllt. Ein Glaskolben wird mit der erforderlichen Menge (ca. 100 cm³) Lösungsmittel gefüllt und auf ca. 80° C erhitzt. Darauf wird soviel Solvat dazugegeben, wie einer Sättigung bei etwa 50° C entspricht. Sobald sich alles gelöst hat, wird der Inhalt des Glaskolbens in das Sättigungsgefäss, das sich in dem auf 45° C gehaltenen Thermostaten befindet, gegossen. Nachdem die Kristallbildung eingesetzt hat, wird die Temperatur unter ständigem Rühren der Lösung langsam (innerhalb 3 Stunden) auf die Anfangstemperatur von 30° C gesenkt. Die ausfallenden Kristalle nehmen sämtliche störenden Verunreinigungen mit sich (Forderung 1). Da bei der langsamen Abkühlung unter Rühren die Lösung ständig in intensiver Berührung mit den makroskopischen Kristallen des Bodenkörpers steht, so können Übersättigungen auch lokaler Natur mit Sicherheit vermieden werden. Der Antrieb zur Bildung von Unterkeimen ist also gering (Forderung 2). Beim Sättigen der Lösung von oben (fallende Temperatur) sind wir sicher, eine bei der betreffenden Temperatur genau gesättigte Lösung zu erhalten (Forderung 3).

Die so vorbereitete Lösung wird nun in das Messgefäß hinübergelassen (Messlösung). In derselben Weise wird das Vergleichsgefäß mit einer bei 15°C gesättigten Vergleichslösung gefüllt. Durch 30-minütiges Erhitzen auf ca. 40°C werden unter Rühren alle Keime, die sich beim Hinübergelassen der Lösung etwa gebildet haben, zerstört. Die Rührer werden darauf abgestellt und der Thermostat in ca. 5 Minuten auf die einer bestimmten Übersättigung der Messlösung entsprechende Messtemperatur T_m gesenkt. Sobald diese Temperatur erreicht ist, beginnt die eigentliche Messung. Unter ständigem Rühren wird die Zeit bestimmt, die bis zum Erscheinen der ersten Kriställchen in der Messlösung vergeht, was mit Hilfe der in Abschnitt 2b beschriebenen Messbrücke festgestellt wird. Wir erhalten so die Wartezeit t_{T_m} , wobei T_m auf die zugehörige Messtemperatur hinweist.

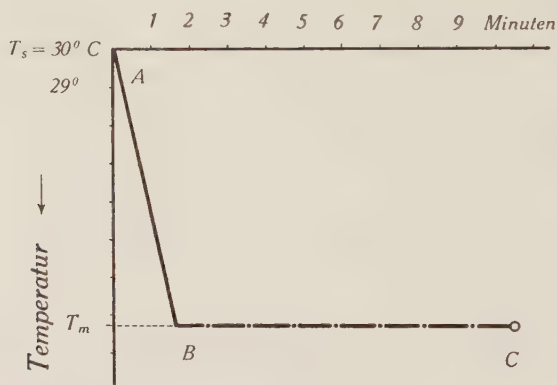


Fig. 10.

Schematische Darstellung des Versuchsganges.

In Fig. 10 ist die Durchführung der Versuche schematisch wiedergegeben. Längs der Strecke AB bleibt der weitgehend dissoziierte Zustand der Lösung erhalten. Nach dem Einsetzen des Rührens im Punkte B wird der hemmende Diffusionshof zerstört. Die Bildung des stationären Gleichgewichts setzt ein. Nach einiger Zeit (Punkt C) gelingt es einigen Kriställchen, die Keimgrösse zu erreichen, womit die Kristallisation eingeleitet ist. Nach den Ausführungen vom letzten Abschnitt bilden sich diese Keime in einer molekular-dispersen Phase annähernd konstanter Konzentration, die der makroskopisch bestimmten gleichgesetzt werden kann. Für diese Keime gilt also die im theoretischen Teil abgeleitete Keimbildungswahrscheinlichkeit (Gleichung (12)).

b) Die Resultate.

Es wurden die wässrigen Lösungen von KJ, KBr und KCl untersucht. Ferner eine Lösung von KCl in Wasser + 32 Gew.% Äthylalkohol. Jede dieser Lösungen wurde etwa sechsmal frisch angesetzt. Jede der frisch angesetzten Lösungen ergab etwa 4 bis 10 Einzelmessungen, wonach sie infolge der Alterungserscheinung (vgl. Abschnitt 3, Seite 724) nicht mehr brauchbar war. Zwischen jeder Einzelmessung wurde die Lösung ca. 30 Minuten auf 50° C gebracht, so dass sich die gebildeten Kriställchen wieder auflösten. Die Messtemperatur wurde variiert. Die Tabellen 3, 4, 5 und 6 zeigen für jede der untersuchten Lösungen die Resultate einiger typischen Messreihen.

Tabelle 3.

Solvens: Wasser dest. Solvat: KJ.

Sättigungs- Temp. T_s °C	Messtem- peratur T_m °C	Temperatur- differenz ΔT	Übers. $\delta =$ $\ln(c_{T_s}/c_{T_m})$	Wartezeit t (Minuten)
29,50	22,10	7,40	0,040	1,7
	23,30	6,20	0,032	46
	21,00	8,50	0,046	0,5
29,50	22,50	7,00	0,037	2
	22,90	6,60	0,035	2,9
	21,50	8,00	0,045	1,1
	19,50	10,00	0,056	0,1
	22,95	6,65	0,035	4,3
	23,10	6,40	0,034	21,9

Tabelle 4.

Solvens: Wasser dest. Solvat: KBr.

T_s °C	T_m °C	ΔT	$\delta =$ $\ln(c_{T_s}/c_{T_m})$	t (Minuten)
29,90	22,50	7,40	0,069	—
	23,50	6,40	0,059	0,5
	24,40	5,50	0,050	0,8
	25,50	4,40	0,040	1,8
	26,00	3,90	0,035	15,4
	25,7	4,20	0,038	1,8
	25,95	4,05	0,037	5,2
	24,80	5,10	0,047	0,8
	25,90	4,00	0,036	4,7
29,90	22,50	7,40	0,069	0,3
	24,60	5,30	0,049	1,1
	25,90	4,00	0,036	2,6
	26,10	3,80	0,034	8,2

Tabelle 5.

Solvens: Wasser dest. Solvat: KCl.

T_s °C	T_m °C	ΔT	$\delta = \ln (c_{T_s}/c_{T_m})$	t (Minuten)
29,90	22,40	7,50	0,064	1,4
	23,40	6,50	0,054	1,9
	24,50	5,40	0,045	>25
	24,00	5,90	0,049	>20
	23,80	6,10	0,051	>16
29,90	21,80	8,10	0,069	0,6
	23,00	6,90	0,058	1,5
	23,60	6,30	0,053	1,2
	24,00	5,90	0,049	>24
	23,90	6,00	0,050	>30

Tabelle 6.

Solvens: Wasser + 32 Gew.% Aethylalkohol. Solvat: KCl.

T_s °C	T_m °C	ΔT	$\delta = \ln (c_{T_s}/c_{T_m})$	t (Minuten)
29,00	22,80	6,20	0,098	1,2
	23,50	5,50	0,086	2,4
	23,80	5,20	0,081	2,0
	24,50	4,50	0,069	1,9
	25,00	4,00	0,060	2,4
	24,60	4,40	0,067	1,7
	26,50	2,50	0,037	>24
	26,25	2,75	0,040	>24
29,00	22,50	6,50	0,103	1,1
	23,40	5,60	0,088	2,0
	24,25	4,75	0,073	2,2
	24,75	4,25	0,064	3,6
	25,00	4,00	0,060	4,1
	25,20	3,80	0,057	15,6

Fig. 11 und 12. zeigen die graphische Darstellung der gemessenen Wartezeiten in Funktion der Temperaturdifferenz ΔT zwischen Sättigungstemperatur und Messtemperatur. Die für derartige Messungen überraschend geringe Streuung der Messpunkte erlaubt es, mit grosser Genauigkeit eine Kurve einzuzichnen, die für jede

Unterkühlung die zugehörige Wartezeit ergibt. In dieser Form lassen sich die erhaltenen Kurven allerdings nicht gut miteinander vergleichen. Sie sind deshalb in Fig. 13 in Funktion der Über-

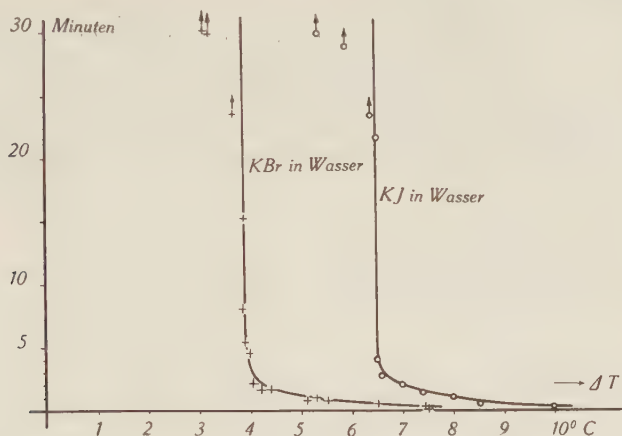


Fig. 11.

Darstellung der gemessenen Wartezeiten t in Funktion der Temperaturdifferenz $T_s - T_m = \Delta T$ für Lösungen von KBr und KJ in Wasser.

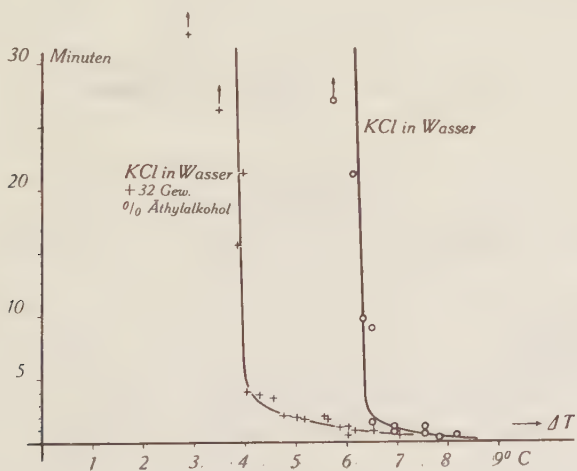


Fig. 12.

Darstellung der gemessenen Wartezeiten t in Funktion der Temperaturdifferenz $T_s - T_m = \Delta T$ für Lösungen von KCl in Wasser und in einem Wasser-Alkohol-Gemisch.

sättigung $\delta = \ln(c_{T_s}/c_{T_m})$ dargestellt worden, wobei die Messpunkte der Übersichtlichkeit halber weggelassen wurden.

c) Diskussion der Resultate.

Das in Fig. 13 graphisch dargestellte Ergebnis der Messungen zeigt Folgendes:

1. Jede der untersuchten Lösungen gibt qualitativ dasselbe Bild. Für hohe Übersättigungen sind die Wartezeiten sehr kurz. Sie liegen in der Grössenordnung einiger Sekunden. Mit abnehmen der Übersättigung nehmen sie zunächst langsam, dann sehr rasch zu, so dass sich mit grosser Schärfe eine bestimmte Grenzübersättigung feststellen lässt, unterhalb welcher auch bei tagelangem

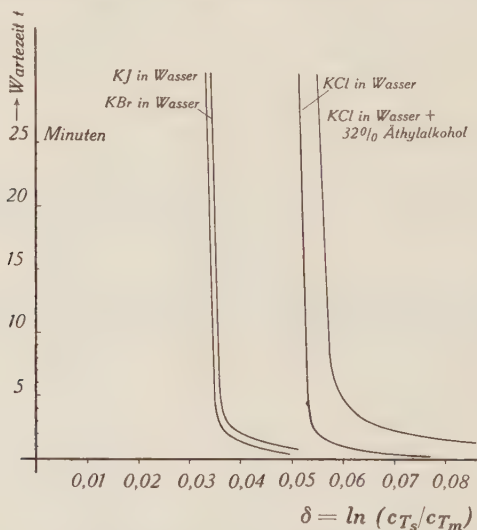


Fig. 13.

Darstellung der gemessenen Wartezeiten von KJ-, KBr und KCl in Wasser sowie KCl in einem Gemisch von Wasser und Äthylalkohol in Funktion der Übersättigung δ .

Warten keine spontane Keimbildung mehr eintritt. Es ergibt sich so zwanglos die von der Theorie geforderte Einteilung des Übersättigungsgebietes in ein metastabiles und ein labiles Gebiet, die praktisch durch eine scharfe Grenze getrennt sind (vgl. die Zusammenstellung auf Seite 23). Der zunächst langsame Anstieg der Wartezeiten deutet darauf hin, dass diese metastabile Grenze keine absolute Bedeutung besitzt wie etwa der Schmelz- oder Umwandlungspunkt einer Substanz, sondern dass es sich um die allerdings sehr rasch erfolgende Änderung der Keimbildungswahrscheinlichkeit handelt.

2. Die Lage der metastabilen Grenze hängt sowohl vom gelösten Stoff als auch vom Lösungsmittel ab. Sie steigt innerhalb

der Reihe der Lösungen von KJ, KBr und KCl in Wasser. Für KCl in einem Gemisch von Wasser und Alkohol verschiebt sie sich nochmals in Richtung höherer Übersättigung. Dieses Verhalten steht im Einklang mit dem von der Theorie geforderten. Denn der massgebende Faktor ($\sigma_I - \sigma_{II}$) in der Gleichung (14), die die Lage der metastabilen Grenze bestimmt, nimmt in der genannten Reihenfolge zu. σ_I bedeutet ja die Oberflächenspannung der ausfallenden Kristalle. Diese wächst von KJ über KBr zu KCl (vgl. die Ausführungen im experimentellen Teil, Abschnitt 1 und Tab. 2), während sich σ_{II} , die Oberflächenspannung der Lösung eher etwas erniedrigt. Bei dem Gemisch von Alkohol und Wasser erniedrigt sich σ_{II} , so dass hier ebenfalls eine Vergrösserung der Differenz ($\sigma_I - \sigma_{II}$) resultiert. Diese Zunahme der Differenz der Oberflächenspannung spiegelt sich auch in der Löslichkeit wieder, die in derselben Reihenfolge abnimmt (Tab. 1).

3. Aus der Lage der metastabilen Grenze lässt sich die Differenz ($\sigma_I - \sigma_{II}$) mit Hilfe der Gleichung (14) berechnen. Allerdings dürfen wir nur ein grössenordnungsmässig richtiges Resultat erwarten, denn Gleichung (14) ist unter der Voraussetzung abgeleitet worden, dass die gelösten Moleküle den Gesetzen des idealen Gases gehorchen, was nur näherungsweise der Fall ist. Die Berechnung sei für KCl in Wasser durchgeführt.

Aus Fig. 15 ergibt sich für

$$\delta_{\text{Grenze}} = 0,05$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} M_{\text{KCl}} &= 74,56 \text{ g} \\ \rho_{\text{KCl}} &= 1,98 \text{ g/cm}^3 \\ N &= 6,06 \cdot 10^{23} \\ R &= 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/o} \\ T &= 297^\circ \text{ K} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(\sigma_I - \sigma_{II}) = \sqrt[3]{\frac{\sigma^2 \cdot T^3 \cdot R^3}{H^2 \cdot 32 \cdot N}} = 1,1 \text{ dyn/cm}$$

mit

$$\sigma_{II} = 78,8 \text{ dyn/cm (siehe Tab. 2)}$$

wird

$$\sigma_I = 80 \text{ dyn/cm}$$

Der für makroskopische Kristalle theoretisch errechnete Wert ist

$$\sigma_I = 107,5 \text{ dyn/cm}$$

Für die hier in Betracht kommenden würfelförmigen KCl-Kriställchen mit einer Kantenlänge von 10^{-7} bis 10^{-6} cm wird die Oberflächenspannung jedoch bedeutend kleiner als der oben angegebene theoretische Wert für makroskopische Kristalle. Unter der in erster Näherung gültigen Annahme, dass die von den Ionen ausgeübten Kräfte dem Coulomb'schen Gesetz gehorchen und unter der Voraussetzung, dass die Ionen auch noch in der Würfeloberfläche streng in den Gitterpunkten sitzen, lässt sich die Oberflächenspannung für kleine Ionenkriställchen theoretisch ermitteln. Die umfangreichen Berechnungen seien einer späteren Veröffentlichung vorbehalten. Sie ergeben z. B. für einen aus 1000 Atomen bestehenden KCl-Kristall (Kantenlänge = $3,14 \cdot 10^{-7}$ cm) eine Abweichung von 20% vom makroskopischen Wert.

Infolge der noch bestehenden Unsicherheiten bezüglich der genauen Werte der in Betracht kommenden Größen dürfen wir auf die quantitative Übereinstimmung nicht zu grosses Gewicht legen. Doch lassen die ausgeführten Messungen den zwingenden Schluss zu, dass sich die Kristallkeimbildung in übersättigten Lösungen prinzipiell nach denselben Gesetzen vollzieht, die auch die Tröpfchenbildung in übersättigten Dämpfen beherrschen.

Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein Interesse und seine wertvollen Ratschläge herzlich danken. Dem Jubiläumsfonds der E.T.H. danke ich für die Überlassung von Mitteln zu dieser Untersuchung.

Literaturverzeichnis.

- 1) M. VOLMER, Kinetik der Phasenbildung. (Steinkopf, 1939.)
- 2) C. R. T. WILSON, Phil. Trans. (A) **189**, 265 (1897).
- 3) G. TAMMANN, Kristallisieren und Schmelzen. (Leipzig 1903.)
- 4) M. VOLMER, M. Volmer u. A. Weber: ZS. f. phys. Chem. **119**, 277 (1926).
- 5) I. W. GIBBS, Thermodynam. Studien. (Leipzig 1829.)
- 6) L. FARKAS, Z. phys. Chem. **125**, 236 (1927).
- 7) M. VOLMER u. I. ESTERMANN, Z. Phys. **7**, 13 (1921).
- 8) M. VOLMER, Phys. ZS. **22**, 646 (1921).
- 9) W. KOSSEL, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl. **135** (1927).
- 10) I. N. STRANSKI, ZS. phys. Chem. **136**, 259 (1928); ZS. phys. Chem. (B) **11**, 342 (1931); ZS. phys. Chem. (B) **17**, 127 (1932); I. N. Stranski u. R. Kaischew, ZS. Krist. **78**, 373 (1931); I. N. Stranski u. L. Krastanow, ZS. **83**, 155 (1932); I. N. Stranski, R. Kaischew u. Krastanow, ZS. Krist. **88**, 325 (1934).
- 11) I. N. STRANSKI u. R. KAISCHEW, ZS. phys. Chem. (B) **26**, 317 (1934).
- 12) R. BECKER u. W. DÖRRING, Ann. Phys. **24**, 719 (1935).
- 13) U. DEHLINGER u. E. WERTZ, Ann. Phys. **39**, 226 (1941).
- 14) E. MADELUNG, Phys. ZS. **19**, 524 (1918).

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XV

AUTORENREGISTER – TABLE DES AUTEURS

	Seite
AMSLER, J.: Versuche über die Keimbildung in übersättigten Lösungen . . .	699
BANTLE, W.: Die spezifische Wärme seignette-elektrischer Substanzen. Dielektrische Messungen an KD_2PO_4 -Kristallen	373
BANTLE, W., BUSCH, G., LAUTERBURG, B. und SCHERRER, P.: Der spontane Kerreffekt an KH_2PO_4 - und KH_2AsO_4 -Kristallen	324
BANTLE, W. und LÜDY, W.: Das elastische Verhalten seignette-elektrischer Substanzen	325
BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.: Stabilisation du champ magnétique du cyclotron	330
BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.: Untersuchungen an Öldiffusionspumpen	332
BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.: Ionenquelle für das Cyclotron	333
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft 311 und	509
BESSE, M.: Farbblinde Stelle in einer sonst normal farbentüchtigen Netzhaut	334
BESSE, M.: Bemerkung zum logisch-physikalischen Parallelismus	342
BLEULER, E.: Kernstreuung schneller Elektronen an Fluor und Stickstoff	613
BLEULER, K. et WEIGE, J.: Sur la théorie de l'effet de la température sur la diffraction des rayons X	511
BLEULER, K. et WEIGLE, J.: Théorie de l'influence des vibrations thermiques sur la réflexion des rayons X par les cristaux	553
BLEULER, K.: s. WEIGLE, J. et BLEULER, K.	445
BRASEY, E.: Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone pour l'enregistrement continu des variations de résistance électrique	335
BRAUN, A. und BUSCH, G.: Über den Mechanismus spannungsabhängiger Widerstände	571
BUSCH, G. und GANZ, E.: Dielektrische Messungen an KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 bei tiefen Temperaturen	501
BUSCH, G.: s. BANTLE, W., BUSCH, G., LAUTERBURG, B. und SCHERRER, P.	324
BUSCH, G.: s. BRAUN, A. und BUSCH, G.	571
DÄTWYLER, G.: Zwei Beiträge zur Hitzdrahtmessmethode	266
DECK, W.: Strömungen von Quecksilberdampf in den Anodenhülsen von Mutatoren. Berechnungen und Versuchsergebnisse	273

DESSAUER, F.: Kleine Notiz über den menschlichen Standort gegenüber dem Materie-Energieproblem	108
DESSAUER, F. und MEIER, F., DESSAUER, F. und METZGER, S., DESSAUER, F. und SAXER, L.: 3 Demonstrationen über die dynamische Linse	315
DIETERLE, W.: Ein Dreiphasen-Drehfeld-Sender für ultrakurze Wellen. I	127
DIETERLE, W.: Ein Dreiphasen-Drehfeld-Sender für ultrakurze Wellen. II	199
DINICHERT, P.: La transformation du NH_4Cl observée par la diffraction des rayons X	462
EXTERMANN, R. et WEIGLE, J.: Anomalie de la chaleur spécifique du chlorure d'ammonium	455
EXTERMANN, R.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.	330
EXTERMANN, R.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.	332
EXTERMANN, R.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.	333
FEJÉR, G. und SCHERRER, P.: Über die Messung der Dielektrizitätskonstanten mit Hilfe des Hohlraumleiters	645
FIERZ, M.: Bemerkung zur Mesontheorie der Kernkräfte	329
GANZ, E.: s. BUSCH, G. und GANZ, E.	501
GREINACHER, H.: Über den Spannungsaufbau im Kaskadengenerator . . .	518
GUGELOT, P. C.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.	330
GUGELOT, P. C.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.	332
GUGELOT, P. C.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.	333
v. HALBAN, H. und WIELAND, K.: Über eine Standardsubstanz für optische Absorptionsmessungen	525
HÄLG, W.: s. WEHLI, M. und HÄLG, W.	315
HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Eine Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu 850 kV	45
HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung	312
HUBER, O., LIENHARD, O. und WÄFFLER, H.: Eine an Chlor mit schnellen Neutronen induzierte Aktivität	314
JAGGI, M.: Untersuchung des Aufladevorganges im Kaskadengenerator . . .	339
JAQUEROD, A.: Classement des Masses atomiques. II	74
JAQUEROD, A.: Classement des Masses atomiques. III	192
JAQUEROD, A.: Classement des Masses atomiques. IV	259
JAQUEROD, A.: Le phénomène de scission et les atomes qui en résultent . .	324
JAUCH, J. M.: Kernkräfte in der Elektronenpaartheorie	175
JAUCH, J. M.: Bemerkungen zum Streuproblem in der Elektronenpaartheorie	221
JOYET, G.: Méthode nouvelle de détermination des dimensions des ions par la déperdition d'un écoulement gazeux ionisé unipolaire	338
KIPFER, P.: Un compteur mécanique rapide	423
KÖNIG, H.: Modellbetrachtungen über die Abweichung der photometrischen Eigenschaften eines Empfängers von der linear-eindeutigen Struktur	85

KÖNIG, H.: Anschauliche Ableitung einiger Näherungsformeln aus der Theorie der Stromverdrängung.	433
LAUTERBURG, B.: s. BANTLE, W., BUSCH, G., LAUTERBURG, B. und SCHERRER, P.	324
LIENHARD, O.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	45
LIENHARD, O.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	312
LIENHARD, O.: s. HUBER, O., LIENHARD, O. und WÄFFLER, H.	314
LOEBENSTEIN, A.: Über die Bestimmung akustischer Resonanzen nach der Hitzdrahtmethode.	321
LÜDY, W.: Der Einfluss der Temperatur auf das dynamisch-elastische Verhalten von Seignetteelektrika	527
LÜDY, W.: s. BANTLE, W. und LÜDY, W.	325
LÜTHY, H.: Über die Abhängigkeit der Flimmer-Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges von den Messbedingungen	343
MAEDER, D. und MIESCHER, E.: Über eine Methode zur Messung zeitlich rasch veränderlicher Spektren	511
MEIER, F.: s. DESSAUER, F. und MEIER, F., DESSAUER, F. und METZGER, S., DESSAUER, F. und SAXER, L.	315
MERCIER, A.: Remarque sur la dynamique des fluides visqueux	509
MERCIER, R.: Une extension des formules de Fresnel	515
METZGER, S.: s. DESSAUER, F. und MEIER, F., DESSAUER, F. und METZGER, S., DESSAUER, F. und SAXER, L.	315
MEYER, K. P.: Nachweis und Messung geringer Konzentrationen an freiem Sauerstoff (bis $1:10^{10}$) mittels Leuchtbakterien	3
MIESCHER, E. und MÜLLER, W.: Terme hoher Multiplizität in Molekülspektren	319
MIESCHER, E.: s. MAEDER, D. und MIESCHER, E.	511
MÜLLER, P.: Elektronenbandenspektren von dreiatomigen linear-unsymmetrischen Molekülen	233
MÜLLER, P. und WEHRLI, M.: Absorptionsspektren dreiatomiger Moleküle im Schumanngebiet	307
MÜLLER, W.: s. MIESCHER, E. und MÜLLER, W.	319
NOWACKI, W.: Die Verteilung der Strukturen kristallisierter Verbindungen über die 219 Raumgruppen	312
PREISWERK, P.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.	330
PREISWERK, P.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.	332
PREISWERK, P.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.	333
PREISWERK, P.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	45
ROGGEN, F. und SCHERRER, P.: Über einen Nachwirkungseffekt an Zählrohren bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen	497
SAXER, L.: s. DESSAUER, F. und MEIER, F., DESSAUER, F. und METZGER, S., DESSAUER, F. und SAXER, L.	315
SCHAMES, L.: Zur Lösung des Raumproblems	523
SCHERRER, P.: s. BANTLE, W., BUSCH, G., LAUTERBURG, B. und SCHERRER, P.	324

SCHERRER, P.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P.C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.	330
SCHERRER, P.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P.C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.	332
SCHERRER, P.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P.C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.	333
SCHERRER, P.: s. FEJÉR, G. und SCHERRER, P.	645
SCHERRER, P.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	45
SCHERRER, P.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	312
SCHERRER, P.: s. ROGGEN, F. und SCHERRER, P.	497
SCHERRER, W.: Über den Begriff des Atoms. I	53
SCHERRER, W.: Über den Begriff des Atoms. II	476
SCHÖNMANN, E.: s. WEHRLI, M. und SCHÖNMANN, E.	317
STUECKELBERG, E. C. G.: La mécanique du point matériel en théorie de relati- vité et en théorie des quanta	23
STUECKELBERG, E. C. G.: Remarques à propos de la relation entre spin et statistique	327
STUECKELBERG, E. C. G.: Le rôle de l'invariance spinorielle et l'invariance de jauge dans un nouveau principe fondamental	513
WÄFFLER, H.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	45
WÄFFLER, H.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	312
WÄFFLER, H.: s. HUBER, O., LIENHARD, O. und WÄFFLER, H.	314
WALDMEIER, M.: Der Aufbau der Sonnenatmosphäre	405
WEHRLI, M. und HÄLG, W.: Photodissoziation zweiatomiger Moleküle in Ionen	315
WEHRLI, M. und SCHÖNMANN, E.: Ultrarotspektren höherer Dikarbonsäuren	317
WEHRLI, M.: s. MÜLLER, P. und WEHRLI, M.	307
WEIGLE, J.: Influence des vibrations thermiques sur la diffraction des rayons X et réseau de Fourier	162
WEIGLE, J.: Influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux	329
WEIGLE, J. et BLEULER, K.: Théorie de l'influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux	445
WEIGLE, J.: s. BLEULER, K. et WEIGLE, J.	511
WEIGLE, J.: s. BLEULER, K. et WEIGLE, J.	553
WEIGLE, J.: s. EXTERMANN, R. et WEIGLE, J.	455
WENTZEL, G.: Zur Paartheorie der Kernkräfte	111
WENTZEL, G.: Sättigungscharakter der Kernkräfte und Mesontheorie . . .	685
WIELAND, K.: s. V. HALBAN, H. und WIELAND, K.	525
ZICKENDRAHT, H.: Über ein neues hydrodynamisches Prinzip zur Schallmes- sung	322
ZUBER, K.: Der Wirkungsquerschnitt für die Materialisation der 2,62 MeV γ -Strahlung in Argon	38

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XV

INHALTS-VERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES

Fasciculus I

Seite

(26. I. 1942)

KLAUS PETER MEYER: Nachweis und Messung geringer Konzentrationen an freiem Sauerstoff (bis $1:10^{10}$) mittels Leuchtbakterien	3
E. C. G. STUECKELBERG: La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quanta	23
K. ZUBER: Der Wirkungsquerschnitt für die Materialisation der 2,62 MeV γ -Strahlung in Argon	38
O. HUBER, O. LIENHARD, P. PREISWERK, P. SCHERRER und H. WÄFFLER: Eine Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu 850 KV	45
WILLY SCHERRER: Über den Begriff des Atoms. I	53
ADRIEN JAQUEROD: Classement des Masses atomiques. II	74
H. KÖNIG: Modellbetrachtungen über die Abweichung der photometrischen Eigenschaften eines Empfängers von der linear-eindeutigen Struktur	85
F. DESSAUER: Kleine Notiz über den menschlichen Standort gegenüber dem Materie-Energieproblem	108

Fasciculus II

(31. III. 1942)

GREGOR WENTZEL: Zur Paartheorie der Kernkräfte	111
WALTER DIETERLE: Ein Dreiphasen-Drehfeld-Sender für ultrakurze Wellen	127
JEAN WEIGLE: Influence des vibrations thermiques sur la diffraction des rayons X et réseau de Fourier	162
J. M. JAUCH: Kernkräfte in der Elektronenpaartheorie	175
ADRIEN JAQUEROD: Classement des Masses atomiques. III. Les atomes radioactifs naturels.	192

Fasciculus III

(8. V. 1942)

WALTER DIETERLE: Ein Dreiphasen-Drehfeld-Sender für ultrakurze Wellen. II	199
J. M. JAUCH: Bemerkungen zum Streuprobblem in der Elektronenpaartheorie	221
PAUL MÜLLER: Elektronenbandenspektren von drei-atomigen linear-unsymmetrischen Molekülen	233

ADRIEN JAQUEROD: Classement des masses atomiques. IV. Les atomes radio-actifs artificiels	259
G. DÄTWYLER: Zwei Beiträge zur Hitzdraht-Messmethode	266
W. DECK: Strömungen von Quecksilberdampf in den Anodenhülsen von Mutatoren. Berechnungen und Versuchsergebnisse	273
P. MÜLLER und M. WEHRLI: Absorptionsspektren dreiatomiger Moleküle im Schumanngebiete	307

Fasciculus IV

(8. VII. 1942)

Bericht über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft	311
W. NOWACKI: Die Verteilung der Strukturen kristallisierter Verbindungen über die 219 Raumgruppen	312
O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER: Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung	312
O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER: Eine an Chlor mit schnellen Neutronen induzierte Aktivität	314
F. DESSAUER und FRANZ MEIER, F. DESSAUER und S. METZGER, F. DESSAUER und L. SAXER: 3 Demonstrationen über die dynamische Linse	315
M. WEHRLI und W. HÄLG: Photodissoziation zweiatomiger Moleküle in Ionen	315
M. WEHRLI und E. SCHÖNMANN: Ultrarotspektren höherer Dicarbonsäuren	317
E. MIESCHER und W. MÜLLER: Terme hoher Multiplizität in Molekülspektren	319
A. LOEBENSTEIN: Über die Bestimmung akustischer Resonanzen nach der Hitzdrahtmethode	321
HANS ZICKENDRAHT: Über ein neues hydrodynamisches Prinzip zur Schallmessung	322
A. JACQUEROD: Le phénomène de scission et les atomes qui en résultent	324
W. BANTLE, G. BUSCH, B. LAUTERBURG und P. SCHERRER: Der spontane Kerreffekt an KH_2PO_4 - und KH_2AsO_4 -Kristallen	324
W. BANTLE und W. LÜDY: Das elastische Verhalten seignette-elektrischer Substanzen	325
E. C. G. STUECKELBERG: Remarques à propos de la relation entre spin et statistique	327
JEAN WEIGLE: Influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux	329
M. FIERZ: Bemerkung zur Mesontheorie der Kernkräfte	329
H. BAUMGARTNER, R. EXTERMANN, P. C. GUGELOT, P. PREISWERK et P. SCHERRER: Stabilisation du champ magnétique du cyclotron . . .	330
H. BAUMGARTNER, R. EXTERMANN, P. C. GUGELOT, P. PREISWERK und P. SCHERRER: Untersuchungen an Öldiffusionspumpen	332
H. BAUMGARTNER, R. EXTERMANN, P. C. GUGELOT, P. PREISWERK und P. SCHERRER: Ionenquelle für das Cyclotron	333
M. BESSO: Farbblinde Stelle in einer sonst normal farbentüchtigen Netzhaut	334

E. BRASEY: Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone pour l'enregistrement continu des variations de résistance électrique	335
G. JOYET: Méthode nouvelle de détermination des dimensions des ions par la déperdition d'un écoulement gazeux ionisé unipolaire	338
M. JAGGI: Untersuchung des Aufladevorganges im Kaskadengenerator	339
M. BESSO: Bemerkung zum logisch-physikalischen Parallelismus	342
HERBERT LÜTHY: Über die Abhängigkeit der Flimmer-Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges von den Messbedingungen	343
WERNER BANTLE: Die spezifische Wärme seignette-elektrischer Substanzen. Dielektrische Messungen an KD_2PO_4 -Kristallen	373
M. WALDMEIER: Der Aufbau der Sonnenatmosphäre	405
P. KIPFER: Un compteur mécanique rapide	423

Fasciculus V

(15. VIII. 1942)

H. KÖNIG: Anschauliche Ableitung einiger Näherungsformeln aus der Theorie der Stromverdrängung	433
JEAN WEIGLE et KONRAD BLEULER: Théorie de l'influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux	445
RICHARD EXTERMANN et JEAN WEIGLE: Anomalie de la chaleur spécifique du chlorure d'ammonium	455
PAUL DINICHERT: La transformation du NH_2Cl observée par la diffraction des rayons X	462
WILLY SCHERRER: Über den Begriff des Atoms. II	476
F. ROGGEN und P. SCHERRER: Über einen Nachwirkungseffekt an Zählrohren bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen	497
G. BUSCH und E. GANZ: Dielektrische Messungen an KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 bei tiefen Temperaturen	501

Fasciculus VI

(24. X. 1942)

Bericht über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft . .	509
ANDRÉ MERCIER (Berne): Remarque sur la dynamique des fluides visqueux	509
K. BLEULER et J. WEIGLE (Genève): Sur la théorie de l'effet de la température sur la diffraction des rayons X	511
D. MAEDER und E. MIESCHER (Basel): Über eine Methode zur Messung zeitlich rasch veränderlicher Spektren	511
E. C. G. STUECKELBERG (Genève): Le rôle de l'invariance spinorielle et l'invariance de jauge dans un nouveau principe fondamental	513
R. MERCIER (Lausanne, E.I.L.): Une extension des formules de Fresnel	515
H. GREINACHER (Bern): Über den Spannungsaufbau im Kaskadengenerator	518
LÉON SCHAMES (Genf): Zur Lösung des Raumproblems	523
H. v. HALBAN und K. WIELAND (Zürich): Über eine Standardsubstanz für optische Absorptionsmessungen	525

WERNER LÜDY: Der Einfluss der Temperatur auf das dynamisch-elastische Verhalten von Seignetteelektrika	527
KONRAD BLEULER et JEAN WEIGLE: Théorie de l'influence des vibrations thermiques sur la réflexion des rayons X par les cristaux	553
A. BRAUN und G. BUSCH (Zürich): Über den Mechanismus spannungsabhängiger Widerstände	571
E. BLEULER: Kernstreuung schneller Elektronen an Fluor und Stickstoff . .	613

Fasciculus VII

(20. I. 1943)

G. FEYÉR und P. SCHERRER: Über die Messung der Dielektrizitätskonstanten mit Hilfe des Hohlraumleiters	645
G. WENTZEL: Sättigungscharakter der Kernkräfte und Mesontheorie	685
J. AMSLER: Versuche über die Keimbildung in übersättigten Lösungen . . .	699
AUTORENREGISTER.	733
INHALTSVERZEICHNIS.	737
AUTORENREGISTER Bd. I—XV	741

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMINA I—XV

AUTORENREGISTER — TABLE DES AUTEURS

	Bd. Seite
ACKERET, J.: Über Luftkräfte bei sehr grossen Geschwindigkeiten, insbesondere bei ebenen Strömungen	I/301
ACKERET, J. und STUDER, H. L.: Bemerkungen über Tragflügel-schwingungen	VII/501
ACKERET, J.: s. RAS, M. und ACKERET, J.	XIV/323
ACKERMANN, L.: s. TANK, F. und ACKERMANN, L.	II/299 u. 512
ACKERMANN, L.: s. TANK, F. und ACKERMANN, L.	III/461 u. 468
ADLER, F.: Über den Stern-Gerlach-Versuch mit Elektronen	X/455
ALEXOPOULOS, K. und SCHERRER, P.: Über die anomale spezifische Wärme von metallischem Lithium	V/302
ALEXOPOULOS, K.: Über die bei der Zertrümmerung des Deuteriums entstehenden Neutronen	VIII/513
ALEXOPOULOS, K.: Zertrümmerungsversuche an Lithium, Bor und Deuterium.	VIII/601
ALMASY, F.: Eine punktförmige Lichtquelle mit kontinuierlichem ultravioletttem Spektrum	X/471
AMSLER, J. und BUSCH, G.: Zur Theorie der Keimbildung in übersättigten Lösungen	X/265
AMSLER, J. und SCHERRER, P.: Keimbildung in übersättigten Lösungen	XIV/318
AMSLER, J.: Versuche über die Keimbildung in gesättigten Lösungen .	XV/699
AMWEG, A.: Théorie d'un oscillateur dont le courant de saturation n'est pas atteint	VII/466
ARAKATZU, B. und SCHERRER, P.: Röntgenographische Bestimmung der freien Elektronen in Lithiummetall	II/153
ARAKATZU, B. und SCHERRER, P.: Bestimmung der Elektrizitätsverteilung im Lithium-Atom	III/428
ARCHINARD, J.: s. GUYE, C. E. et ARCHINARD, J.	II/343
AUERBACHER, F.: s. HAGENBACH, A., AUERBACHER, F. und WIEDEMANN, E.	IX/ 3
AUGER, P.: La distribution dans l'espace des directions initiales des photoélectrons	II/275
AUSLÄNDER, J.: Messungen an der Zink-Resonanzlinie 2138,6 ÅE . .	XI/562
AUSLÄNDER, J.: Messung an der Zink-Resonanzlinie 2138,6 ÅE. Berichtigung	XII/168
AZAD, A.: s. PERRIER, A. und AZAD, A.	XIII/343
BACH, R.: Contribution à l'étude рентгеноgraphique de l'état cristallin du fer	I/466

BACH, R.: Contribution à l'étude roentgenographique de l'état cristallin du fer	II/ 95
BÄCHTIGER, P.: s. HAGENBACH, A. und BÄCHTIGER, P.	II/146
BÄCHTIGER, P.: Dynamische Charakteristiken einer Bogenentladung an Wolframelektroden in Stickstoff	III/167 u. 335
BÄCHTIGER, P.: Die Behinderung des Anodenfalles bei der Bogenentladung	IV/(135) u. 409
BÄCHTIGER, P. und WEHRLI, M.: Die behinderte Bogenentladung	IV/ 31
BÄCHTIGER, P.: s. WEHRLI, M. und BÄCHTIGER, P.	IV/(364) u. 290
BÄCHTIGER, P.: Die Sichtbarkeit der ultravioletten Strahlen und die Absorption der menschlichen Augenteile	V/102
BÄCHTIGER, P. und WEHRLI, M.: Über den Kathodenfall in der Bogenentladung	V/161
BÄCHTIGER, P.: s. WEHRLI, M. und BÄCHTIGER, P.	V/106
BÄCHTIGER, P.: s. WEHRLI, M. und BÄCHTIGER, P.	V/233
BALDINGER, E.: Ein stabilisiertes Netzanschlussgerät für Zählrohre	IX/327
BALDINGER, E., HUBER, P. und STAUB, H.: Eine Hochspannungs-Apparatur zur Erzeugung von Neutronen. Messung der Neutronenausbeute	X/254
BALDINGER, E. und HUBER, P.: Das magnetische Spektrum von H-Kanalstrahlen in Abhängigkeit von Gasentladungsspannung und Gasentladungsstrom	XI/373
BALDINGER, E., HUBER, P. und STAUB, H.: Ausbeute und Energiebestimmung der Neutronen aus der Kernreaktion $D_1^2 + D_1^2 = He_2^3 + n_0^1$	XI/245
BALDINGER, E. und HUBER, P.: Umwandlungen von Stickstoff mit schnellen Neutronen	XII/(281) u. 330
BANDERET, E.: Etude de quelques inhibiteurs de fluorescence	X/259
BANTLE, W. und BUSCH, G.: Dielektrische Untersuchungen an Seignettesalz ($NaKC_4H_4O_6 \cdot 4 H_2O$)	X/262
BANTLE, W.: Die Anomalie der spezifischen Wärme von KH_2PO_4 am oberen Curiepunkt	XII/279
BANTLE, W. und SCHERRER, P.: Die Anomalie der spezifischen Wärme seignette-elektrischer Substanzen bei den Curiepunkten	XIII/214
BANTLE, W. und SCHERRER, P.: Der Curiepunkt von schwerem Kaliumphosphat	XIV/146
BANTLE, W. und SCHERRER, P.: Hysteresiskurven von KD_2PO_4 -Kristallen	XIV/316
BANTLE, W.: Die spezifische Wärme seignette-elektrischer Substanzen. Die elektrischen Messungen an KD_2PO_4 -Kristallen.	XV/373
BANTLE, W., BUSCH, G., LAUTERBURG, B. und SCHERRER, P.: Der spontane Kerreffekt an KH_2PO_4 - und KH_2AsO_4 -Kristallen	XV/324
BANTLE, W. und LÜDY, W.: Das elastische Verhalten seignette-elektrischer Substanzen	XV/325
BÄR, R.: Über den Zusammenhang von Funkenpotential und Voltaeffekt	I/186
BÄR, R.: Einige Versuche über den Raman-Effekt an Flüssigkeiten	II/154
BÄR, R.: Über die Polarisation der Ramanlinien von Tetrachlorkohlensstoff, Benzol und Schwefeltrioxyd	IV/130
BÄR, R.: Über das Ramanspektrum des Äthyläthers und seine Veränderung bei tiefen Temperaturen	IV/366
BÄR, R.: Über Versuche zum Nachweis des kontinuierlichen Raman-effekts in Flüssigkeiten	IV/369

	Bd. Seite
BÄR, R.: Über ein bei Ramanversuchen nützliches Lichtfilter	V/174
BÄR, R.: Über einige Demonstrationsversuche zur Beugung des Lichtes an Ultraschallwellen	VI/570
BÄR, R. und MEYER, EDG.: Über einige Versuche zur Beugung des Lichtes an Ultraschallwellen	VI/242
BÄR, R. und WALTJ, A.: Über die Bestimmung der Poisson'schen Elektrizitätskonstante mit Hilfe von Ultraschallwellen	VII/658
BÄR, R.: Über die Messung der Ultraschallgeschwindigkeit in schwerem Wasser (D_2O)	VIII/500
BÄR, R.: Über die Kohärenzverhältnisse in den an stehenden Ultraschallwellen in Flüssigkeiten erzeugten Beugungsspektren	VIII/591
BÄR, R.: Über Versuche zur Theorie von Raman und Nagendra Nath über die Beugung des Lichtes an Ultraschallwellen	IX/265 u. 336
BÄR, R.: Über die Lichtbeugung an Ultraschallwellen in Luft	IX/336 u. 367
BÄR, R.: Über den Nachweis der Chladni-Figuren schwingender Piezoquarze mit Hilfe der Lichtbeugung an Ultraschallwellen	IX/617
BÄR, R.: Über stroboskopische Erscheinungen beim Durchgang des Lichtes durch 2 Ultraschallwellen	IX/678
BÄR, R.: Über Lichtmodulation durch fortschreitende Ultraschallwellen	IX/654
BÄR, R.: „Dunkle Streifen in den Spektren von akustischen und optischen Doppelgittern.“; Theoretische Ergänzungen und weitere Versuche zu einer Arbeit von P. CERNAK und H. SCHOENECK	X/130
BÄR, R.: Über die Erzeugung ebener Schallwellen in Flüssigkeiten und über die Demonstration Fresnelscher Beugungserscheinungen an diesen Wellen	X/311
BÄR, R.: Über die Ultraschallabsorption in Flüssigkeiten im Frequenzbereich $50 \div 80$ Megahertz	X/332
BÄR, R.: Bemerkung zu meiner Arbeit über die Demonstration Fresnelscher Beugungserscheinungen an Ultraschallwellen (H. P. A. 10, 311 (1937))	X/430
BÄR, R.: Über einfache Spezialfälle beim Durchgang von Ultraschallwellen durch dünne Platten	XI/397
BÄR, R.: Über Versuche zum Nachweis einer Ultraschalldispersion in Flüssigkeiten	XI/472
BÄR, R., LEVI, F. und NAGENDRA NATH, N. S.: Über die Theorie des Durchgangs von Ultraschall durch dünne Platten	XI/358
BÄR, R.: Über eine Methode zur Bestimmung elastischer Konstanten isotroper Festkörper mit Hilfe von Ultraschallwellen	XIII/ 61
BÄR, R.: Über die Untersuchung von Ultraschallwellen in Flüssigkeiten mit Hilfe des Jamin'schen Interferometers	XIII/193
BARGMANN, V.: Über den Zusammenhang zwischen Semivektoren und Spinoren und die Reduktion der Diracgleichung für Semivektoren	VII 57
BARGMANN, V.: Über die durch Elektronenstrahlen in Kristallen angeregte Lichtemission	X/361
BÄSCHLIN, C. F.: Ableitung der mittleren Fehlerellipse für Triangulationspunkte ohne Benutzung der Theorie von der partiellen Äquivalenz	XI/533
BAUD, R. V. und TANK, F.: Profile konstanter Randspannung an Zug- und Biegestäben	VI/493
BAUD, R. V.: s. TANK, F., BAUD, R. V. und SCHILTKNECHT, E.	IX/648
BAUMANN, E.: Beitrag zu einer analytischen Theorie des Bremsfeldgenerators	XI/461

BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.: Stabilisation du champ magnétique du cyclotron	XV/330
BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.: Untersuchungen an Öldiffusionspumpen	XV/332
BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. und SCHERRER, P.: Ionenquelle für das Cyclotron	XV/333
BECHERT, K.: Bemerkung zum Wentzel'schen Näherungsverfahren in der relativistischen Dynamik des Elektrons	VI/ 82
BECK, G.: Das Atom als zeitlich und räumlich gequanteltes System	VI/309
BEGLINGER, E.: Druckverschiebungen in Eisenmultiplikts. Vergleich zweier unabhängiger Messmethoden	VII/149
BENER, P.: Über die Bildung von Kondensationskurven in Gasen durch ultraviolett Licht	XIV/328
BERGER, P.: Le caoutchouc des ballons-pilotes aux point de vue physique et chimique.	IX/372
BERGER, P.: Etude préliminaire des sondages de vent à Cointrin	X/357
BERGER, P.: De la mesure des altitudes.	XI/551
BERICHT über die physikalische Vortragswoche der ETH Zürich (28. Juni bis 1. Juli 1933)	VI/411
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen physikalischen Gesellschaft für die Jahre 1928 und 1929:	
s. Comptes-rendus des séances de la Société de Physique 1928	I/287 et 441
Comptes-rendus des séances de la Société de Physique 1929	II/145 et 293
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Neuenburg, 17. Mai; St. Gallen, 12./13. September 1930)	III/157 u. 437
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Zürich, 2. Mai; La Chaux-de-Fonds, 25./26. Sept. 1931)	IV/129 u. 357
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Vevey, 7. Mai; Thun, 7. August 1932)	V/211 u. 296
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Luzern, 6. Mai; Altdorf, 2. September 1933)	VI/229 u. 457
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Murten, 26. Mai; Zürich, 7./8. September 1934)	VII/465 u. 633
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Lausanne, 4./5. Mai; Einsiedeln, 18./19. August 1935)	VIII/309 u. 485
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Zofingen, 2. Mai; Solothurn, 29. August 1936)	IX/317 u. 635
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Liestal, 8. Mai; Genf, 28. August 1937)	X/253 u. 323
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Delémont, 17. Mai; Chur, 28. August 1938)	XI/357 u. 461
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Brugg, 6. Mai; Locarno 23.—25. Sept. 1939)	XII/277 u. 536
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Biel, 18. Mai und Locarno, 29. September 1940)	XIII/217 u. 339
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Neuchâtel, 3. Mai; Basel, 7./8. September 1941)	XIV/131 u. 307
BERICHTE über die Tagungen der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft (Freiburg, 9. Mai; Sion, 30. August 1942)	XV/311 u. 509
BERKOVITSCH, A.: Über den Nachweis der Stossionisation in Glühlampen	III/440
BERKOWITSCH, A.: Über das Fallgesetz ultramikroskopischer Selen-Teilchen.	VI/259

BERKOWITSCH, A.: Die Beweglichkeit kleiner Selenkugeln in Luft bei grossen Geschwindigkeiten	VII/170
BESSO, M.: Farbblinde Stelle in einer sonst normal farbentüchtigen Netzhaut	XV/334
BESSO, M.: Bemerkung zum logisch-physikalischen Parallelismus	XV/342
BETHE, A.: Quantitative Berechnung der Eigenfunktion von Metall-elektronen	Sonderheft 1934/18
BIBLIOGRAPHIE schweizerischer physikalischer Arbeiten des Jahres 1931	V/68
BIBLIOGRAPHIE schweizerischer physikalischer Arbeiten des Jahres 1932	VI/160
BIBLIOGRAPHIE schweizerischer physikalischer Arbeiten des Jahres 1933	VII/377
BIBLIOGRAPHIE schweizerischer physikalischer Arbeiten des Jahres 1934	VIII/682
BIBLIOGRAPHIE schweizerischer physikalischer Arbeiten des Jahres 1935	IX/745
BIBLIOGRAPHIE schweizerischer physikalischer Arbeiten des Jahres 1936	XI/107
BIDER, M.: s. LINDHOLM, F. und BIDER, M.	I/537
BIDER, M.: Vergleich der Registrierungen des Maurerschen Heliochronographen und des Campbell-Stokesschen Autographen	XI/552
BIDER, M.: Temperaturunterschiede zwischen Stadt- und Freilandstationen	XIII/ 5
BILLETER, W.: Über die Hyperfeinstruktur der Zink-Resonanzlinie 3076 ÅE	VII/(492) 413
BILLETER, W.: Über die absolute Intensität der Zink-Resonanzlinie 3076 ÅE und die Lebensdauer des 2^3P_1 -Zustandes von Zink	VII/505
BILLETER, W.: Über einen Isotopenverschiebungseffekt an der Zn-Resonanzlinie 3076 ÅE	VII/524
BILLETER, W.: Über die absolute Intensität der Zink-Resonanzlinie 2139 ÅE und die Lebensdauer des 2^1P_1 -Zustandes von Zink	VII/841
BION, F.: Röntgenographische Untersuchungen an gefärbter Cellulose. Ein Beitrag zur Theorie der Färbungen	I/165
BLACKETT, P. M. S.: The positive Electron	VI/437
BLANC, M. und WEIGLE, J.: Réflexions simultanées des Rayons X et excitation indirecte	X/495
BLEULER, E.: Kernstreuung schneller Elektronen an Fluor und Stickstoff	XV/613
BLEULER, K. et WEIGLE, J.: Sur la théorie de l'effet de la température sur la diffraction des rayons X	XV/511
BLEULER, K. et WEIGLE, J.: Théorie de l'influence des vibrations thermiques sur la réflexion des rayons X par les cristaux	XV/553
BLEULER, K.: s. WEIGLE, J. et BLEULER, K.	XV/445
BLOCH, F.: Zur Quantenmechanik der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle	I/466
BLOCH, F.: Inkohärente Röntgenstreuung und Dichteschwankungen eines entarteten Fermigas	VII/385
BLUMER, H.: Demonstration eines Metallix-Röntgeninstrumentariums	I/468
BOAS, W.: Zum elastischen Verhalten von Zinn-Ein- und -Vielkristallen	VII/878
BOAS, W. und SCHMID, E.: Zur Berechnung physikalischer Konstanten quasiisotroper Vielkristalle	VII/628
BOAS, W.: Zur Berechnung des Torsionsmoduls quasiisotroper Vielkristalle aus den Einkristallkonstanten	VIII/674
BOAS, W.: Störungen in Kristallgittern durch plastische Deformation	X/265
BOSSHARD, W. und BUSCH, G.: Dämpfung piezoelektrischer Schwingungen	X/329
BOSSHARD, W. und SCHERRER, P.: Die Energieabhängigkeit der Streuung schneller Elektronen am Stickstoffkern	XIV/ 85

BOSSHARD, W., SCHERRER, P. und ZÜNTI, W.: Streuung schneller Elektronen am Kern	XIV/136
BOTHE, W.: Die künstliche Umwandlung von Magnesium durch α -Strahlen	VI/444
BRADT, H.: Bestimmung der mittleren Anzahl der bei der Spaltung eines Urankerns freiwerdenden Neutronen	XII/553
BRADT, H., GUILLISSEN, J. und SCHERRER, P.: Paarerzeugung durch schnelle Betastrahlen	XIII/259
BRADT, H. und SCHERRER, P.: Positronenerzeugung durch Betastrahlen	XIV/319
BRANDENBERGER, H.: Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik)	III/83, 134, 299
BRASEY, E.: Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone pour l'enregistrement continu des variations de résistance électrique	XV/335
BRAUN, A., BUSCH, G. und SCHERRER, P.: Spannungsabhängige Widerstände	XIV/140
BRAUN, A. und BUSCH, G.: Über den Mechanismus spannungsabhängiger Widerstände	XV/571
BRETSCHER, E.: Elektrisches Moment und Struktur von Diphenylderivaten	I/355
BRETSCHER, E.: Die Symmetrieverhältnisse der Moleküle in Hinsicht auf ihr elektrisches Moment, unter spezieller Berücksichtigung der Diphenylgruppe	II/257
BRETSCHER, E. und WAGNER-JAUREGG, TH.: Das elektrische Moment des Para-Phenylendiamins	II/522
BRETSCHER, E.: Temperaturempfindlichkeit der Molekularpolarisation von gelösten Substanzen	III/163
BRETSCHER, E.: Bericht über die physikalische Vortragswoche der ETH Zürich	VI/411
BRETSCHER, E. und BECK, W.: Magnetorotation bei nichtadiabatischer Änderung des Magnetfeldes	VI/229
BRETSCHER, E.: Magnetorotation bei hohen Feldfrequenzen	VII/476
BRETSCHER, E.: Die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Jonenkristallen	VII/642
BRETSCHER, E.: Magnetorotation bei schnellen Feldänderungen	IX/42
BRILLOUIN, L.: Sur les paramètres caractérisant la polarisation partielle de la lumière dans les phénomènes de fluorescence	II/289
BRILLOUIN, L.: Les bases de la théorie électronique des métaux et la méthode des champs self-consistents	Sonderheft 1934/33
BRILLOUIN, L.: Fluctuations de courant dans un conducteur	Sonderheft 1934/47
BRINER, E., SIEGRIST, B. et PAILLARD, H.: Sur les améliorations de rendement réalisées dans la fixation de l'azote sous forme d'oxyde par l'arc à haute fréquence jaillissant dans le milieu gazeux en dépression	IX/555
BRÜCKMANN, W.: Vom Klima der südalpinen Schweiz	XIII/3
BRUNNER, W., jun.: Demonstration einer Stereokopfaufnahme des Kometen Finser	X/352
BRUNNER, W.: Farbfilter- und kinematographische Aufnahmen der Mondfinsternis vom 7./8. November 1938	XIII/13
BUCHMÜLLER, F.: s. KÖNIG, E. und BUCHMÜLLER, F.	II/159
BUCHMÜLLER, F.: s. KÖNIG, E. und BUCHMÜLLER, F.	V/(212) 166
BÜHL, A.: Eine neue Methode zur Untersuchung der Beugung sehr langsamer Elektronen	V/214

	Bd.	Seite
BÜHL, A.: Eine Methode zum Nachweis metastabiler Atome	VI	231
BÜHLER, H.: Hochfrequenzstrommessung	IX	649
BÜHLER, H.: Über das Strahlungsfeld des Dipols	IX	649
BUSCH, G.: Anomale Dispersion der Dielektrizitätskonstanten von Seignettesalz	VI	315
BUSCH, G. und SCHERRER, P.: Anomale Dispersion der Dielektrizitätskonstanten von Seignettesalz	VI	234
BUSCH, G., HABLÜTZEL, J. und SCHERRER, P.: Zur Theorie der Seignetteelektrizität	X	330
BUSCH, G.: Seignetteelektrische Eigenschaften isomorpher Kristalle . .	X	261
BUSCH, G.: s. AMSLER, J. und BUSCH, G.	X	265
BUSCH, G.: s. BANTLE, W. und BUSCH, G.	X	262
BUSCH, G.: s. BOSSHARD, W. und BUSCH, G.	X	329
BUSCH, G.: Neue Seignette-Elektrika	XI	269
BUSCH, G.: Weitere Untersuchungen an seignette-elektrischen Substanzen	XI	359
BUSCH, G.: s. BRAUN, A., BUSCH, G. und SCHERRER, P.	XIV	140
BUSCH, G. und GANZ, E.: Dielektrische Messungen an KH_2PO_4 und KH_2AsO_4 bei tiefen Temperaturen	XV	501
BUSCH, G.: s. BANTLE, W., BUSCH, G., LAUTERBURG, B. u. SCHERRER, P. .	XV	324
BUSCH, G.: s. BRAUN, A. und BUSCH, G.	XV	571
CABANNES, J.: La lumière du ciel nocturne	VIII	405
CABRERA, J., PALACIOS, J. und SCHERRER, P.: Über das Raumgitter von Gips	II	154
CARR, E. P. und STÜCKLEN, H.: Die Absorptionsspektren einiger Kohlenwasserstoffverbindungen im Schumann-Gebiet	VI	261
CASIMIR, H.: Über die Intensität der Streustrahlung gebundener Elektronen	VI/(246)	287
CAUCHOIS, Y., HULUBEI, H. et WEIGLE, J.: Réflexions simultanées des rayons X dans le Quartz	X	218
CHORUS, U.: Sonnen- und Himmelstrahlung auf dem Jungfrauoch während des internationalen Polarjahres 1932/33	XII	537
COETERIER, F. und Scherrer, P.: Eine neue Methode zur Messung des Einstein-de Haas-Effektes	V	217
COETERIER, F.: Einstein-de Haas-Effekt an Pyrrhotin	VI	483
COETERIER, F.: Messung des gyromagnetischen Effektes an Pyrrhotin	VIII	522
COMPTE-RENDUS des séances de la Société Suisse de Physique: s. auch Berichte über die Tagungen der S. Ph. G. 1930—1942		
COMPTE-RENDUS des séances de la Société Suisse de Physique (Berne, 12 mai; Lausanne, 31 août et 1er sept. 1928)	I/287,	441
COMPTE-RENDUS des séances de la Société Suisse de Physique (Soleure, 4 mai; Davos 30 et 31 août 1929)	II/145,	293
CONRAD, V.: Sonnenscheindauer im Gebirge: Anomalien und andere Charakteristiken	XI	531
CONRAD, V.: Die Komponenten der Jahres-Schwankung der Sonnenscheindauer	XII/	38
CORDEY, A.: s. PERRIER, A. und CORDEY, A.	VI	246
CORDEY, A.: s. PERRIER, A. und CORDEY, A.	VI	247
DÄTWYLER, G.: Zwei Beiträge zur Hitzdraht-Messmethode	XV	266
DAVID, R.: Dielektrische Untersuchungen an Seignette-Salz-Kristallen	VII	647
DAVID, R.: Die Abhängigkeit der dielektrischen Eigenschaften des Seignettesalz-Kristalles von mechanischen Beanspruchungen . .	VIII	431

DAVID, R.: Über innere Spannungen und ihren Zusammenhang mit der Dielektrizitätskonstanten bei Seignettesalz-Kristallen	VIII/500
DECK, W.: s. BRETSCHER, E. und DECK, W.	VI/229
DECK, W.: Entwicklung eines lichtelektrischen Spektralphotometers für Messungen grösster Genauigkeit im kurzwelligen Ultraviolett. Diskussion der Grenzen solcher Messungen	XI/ 3
DECK, W.: Strömungen von Quecksilberdampf in den Anodenhülsen von Mutatoren. Berechnungen und Versuchsergebnisse	XV/273
DESSAUER, F.: s. THÜRLEMANN, B. und DESSAUER, F.	XIII/343
DESSAUER, F.: Studien über die dynamische Linse. 2	XIV/574
DESSAUER, F.: s. MEIER, F. und DESSAUER, F.	XIV/136 u. 271
DESSAUER, F.: Kleine Notiz über den menschlichen Standort gegenüber dem Materie-Energieproblem	XV/108
DESSAUER, F., MEIER, F., METZGER, S. und SAXER, L.: 3 Demonstrationen über die dynamische Linse	XV/315
DICK, M.: Zur Theorie der Elektronen-Raumladungsschwingungen . .	VI/486
DIETERLE, W.: Ein Dreiphasen-Drehfeld-Sender für ultrakurze Wellen	XV/127
DIETERLE, W.: Ein Dreiphasen-Drehfeld-Sender für ultrakurze Wellen II	XV/199
DINICHERT, P.: La transformation du NH_4Cl observée par la diffraction des rayons X	XV/462
DONY, F.: s. PICCARD, A., STAHEL, E. und DONY, F.	IV/371
DRUEY, W.: Spannungsregulierung von Wechselstromgeneratoren . .	VI/488
DRUEY, W.: Zur Dynamik der Gasentladungen	VII/633
DRUEY, W.: Beitrag zur Dynamik der Glimmentladung. I. Teil . . .	IX/707
DRUEY, W.: Beitrag zur Dynamik der Glimmentladungen. II. Teil .	X/ 3
DUBS, W.: Über den Einfluss laminarer und turbulenter Strömung auf das Röntgenstreubild von Wasser und Nitrobenzol. Ein röntgenographischer Beitrag zum Turbulenzproblem	XII/(303)169
DUPRAZ, A.: s. GUYE, C. E. et DUPRAZ, A.	II/320
DÜRRWANG, J. und WEHRLI, M.: Rasche Messungen von Sondencharakteristiken einer Gasentladung vermittelt Oszillographenröhre	VI/235
DÜRRWANG, J.: Rasche Messungen von Sondencharakteristiken einer Gasentladung mittelst Oszillographenröhre	VIII/333
EICHENBERGER, W.: Au sujet de soit-disant «phénomènes radioactifs de second ordre et d'origine artificielle» signalés par Reboul	IX/334 u. 467
EMDEN, R.†: Zum Temperaturproblem der Seen	XIII/396
ERNST, W. H.: Untersuchung des Potentialverlaufes im negativen Dunkelraum der normalen Glimmentladung	VIII/381
ERRERA, J.: Die Molekularassoziatio n	II/291
EWALD, P. P.: Prinzipielles über Strukturbestimmung von Kristallen durch Röntgeninterferenzen	II/278
EXTERMANN, R. et WANNIER, G.: Théorie de la diffraction de la lumière par les Ultrasons	IX/520
EXTERMANN, R.: s. WANNIER, G. et EXTERMANN, R.	IX/337
EXTERMANN, R.: Théorie de la diffraction de la lumière par des ultra-sons	X/185
EXTERMANN, R. et WEIGLE, J.: Anomalie de la chaleur spécifique du chlorure d'ammonium	XV/455
EXTERMANN, R.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.	XV/330, 332, 333
FAVEZ, H.: s. PERRIER, A. und FAVEZ, H.	VI/472
FAVEZ, H. et PERRIER, A.: Aimantation en présence de champs transversaux	VII/472

FAVEZ, H.: s. PERRIER A. und FAVEZ, H.	IX/563 u. 637
FAVRE, H.: Quelques applications de la méthode interférométriques de détermination des tensions intérieures dans les solides	I/446
FAVRE, H. und TANK, F.: Über eine interferometrische Methode zur Bestimmung ebener elastischer Spannungszustände	I/446
FEJÉR, G.: s. SÄNGER, R. und FEJÉR, G.	VII/664
FEJÉR, G.: s. SÄNGER, R. und FEJÉR, G.	VIII/492
FEJÉR, G. und SCHERRER, P.: Anwendung des Hohlraumleiters zur Messung der Dielektrizitätskonstanten im Gebiet der Zentimeterwellen	XIV/141
FEJÉR, G. und SCHERRER, P.: Über die Messung der Dielektrizitätskonstanten mit Hilfe des Hohlraumleiters	XV/645
FICHTER, R.: Ultrarotspektren fester Dikarbonsäuren	XIII/309
FICHTER, R.: Nachweis der Wasserstoffbrücken im Ultrarotspektrum von Dikarbonsäuren	XIII/342
FICHTER, R. und WEHRLI, M.: Ultrarotspektren fester Dikarbonsäuren	XIII/217
FICHTER, R.: s. WEHRLI, M. und FICHTER, R.	XIV/189
FIERZ, M.: Über die künstliche Umwandlung des Protons in ein Neutron	IX/245
FIERZ, M.: Über die Vortäuschung von Strahlung durch Ozon und Ozonide. Bemerkung zu Versuchen von Prof. Reboul	IX/490
FIERZ, M.: Über die Quantisierung von Theorien des β -Zerfalls	X/123 u. 284
FIERZ, M.: Über das H-Theorem in der Quantenmechanik	X/257
FIERZ, M.: Über die relativistische Theorie für Teilchen mit ganzzahligem Spin sowie deren Quantisierung	XI/377
FIERZ, M.: Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin	XII/ 3
FIERZ, M.: s. PAULI, W. und FIERZ, M.	XII/297
FIERZ, M.: Über den Drehimpuls von Teilchen mit Ruhemasse null und beliebigem Spin	XIII/ 45
FIERZ, M.: Über Ansätze für die Wechselwirkung von Elektronen mit schweren Teilchen	XIV/321
FIERZ, M.: Über die Konsequenzen der Annahme, dass die schweren Elementarteilchen Zustände negativer Ladung besitzen	XIV/105
FIERZ, M.: Klassische Theorie der Streuung geladener Mesonen	XIV/145 u. 257
FIERZ, M.: Über Ansätze für die Wechselwirkung von Elektronen mit schweren Teilchen	XIV/487
FIERZ, M.: Bemerkung zur Mesontheorie der Kernkräfte	XV/329
FISCHER, V.: Thermodynamik der Gemische mit einer Anwendung auf Äthylalkohol-Wasser.	VI/42
FORRER, R.: Sur les deux Points de Curie, ferromagnetique et paramagnetique	II/281
FORSTER, R.: Anomale Dispersion im Röntgengebiet	I/ 18
FOWLER, R. H.: Quelques remarques sur la théorie des métaux liquides de Mott et sur les points de transition des métaux et d'autres solides	Sonderheft 1934/72
FRANCK, J.: Bandenspektren und chemische Bindung	II/284
FREI, H.: Zur Kenntnis des raumakustischen Interferenzfeldes	VI/490
FREY, E.: Beeinflussung der Elektronensekundäremission einer Aluminiumplatte durch Licht	I/385
FREY, E.: s. HAGENBACH, A. und FREY, E.	I/297
GÄCHTER, K.: s. SÄNGER, R., STEIGER, O. und GÄCHTER, K.	V/200
GAGNEBIN, S.: s. JAQUEROD, A. et GAGNEBIN, S.	I/465

GAGNEBIN, S.: s. JAQUEROD, A. et GAGNEBIN, S.	II/156
GALAVICS, F.: Experimentelle Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität des freien Radikals $C_{14}H_{14}O_3N$ und Vergleich mit der Theorie v. van Vleck	VI/(476) 555
GALAVICS, F.: Messung des gyromagnetischen Effektes an den Legierungen Mangan-Antimon und Eisen-Selen	XII/581
GANZ, E.: Thermometrische Leitfähigkeit von flüssigem Helium II	XII/294
GANZ, E.: s. BUSCH, G. und GANZ, E.	XV/501
GÄRTNER, H.: s. HAGENBACH, A. und GÄRTNER, H.	VIII/314
GASSMANN, F.: Magnetische Messungen auf dem Mont Chemin bei Martigny	XI/543
GASSMANN, F.: Seismogramme und wahre Bodenbewegung.	XIII/ 15
GERBER, W. und TANK, F.: Über die Ausbreitung von Ultrakurzwellen	X/344
GERLACH, W.: Über Bandenfluoreszenz des Quecksilbers im Magnetfeld	II/280
GERLACH, W.: Elektrische Leitfähigkeit und Magnetisierung bei Nickel	II/307
GILBERT, J.: Une formule simple pour la discussion de la sensibilité des galvanomètres balistiques en circuit fermé	X/342
GILBERT, J.: Méthode rapide pour l'étude des galvanomètres balistiques en circuit fermé	XI/ 87
GILBERT, J.: Trainage plastique et aimantation variable, viscosité magnétique	XII/290
GLOWIAN, H.: Staub und Stauffälle in Arosa	X/354
GOLAZ, CH.: s. MERCANTON, P.-L. et GOLAZ, CH.	X/358
GOLDSCHMIDT, R.: Physikalisch-technische Probleme des Ferromagnetismus bei schwachen Feldern	VIII/497
GOLDSCHMIDT, R.: Technische Probleme des Ferromagnetismus bei schwachen Feldern	IX/33
GOLDSCHMIDT, R.: Über magnetische Stabilität	IX/635
GOLDSCHMIDT, R.: Über magnetische Stabilität	X/225
GOLDSCHMIDT, R.: Über Verluste in magnetischen Werkstoffen	X/328
GOLDSCHMIDT, R.: Über Verluste in magnetischen Werkstoffen	XI/329
GOLDSCHMIDT, R.: Physikalische Probleme technischer Isolierstoffe XII/[303] 305	
GONSETH, F. und JUVET, G.: Sur la relativité à cinq dimensions et sur une interpretation de l'équation de Schrödinger	I/421
GOOD, W.: Streuung von Röntgenstrahlen an Wasser und an wässrigen Salzlösungen	III/205
GOOD, W.: Nachtrag zur Arbeit: „Sreuung der Röntgenstrahlen an Wasser und wässrigen Salzlösungen“	III/436
GÖTZ, F. W. P.: Trübung und anormale Extinktion	V/336
GÖTZ, F. W. P., SCHEIN, M. und STOLL, B.: Atmosphärische Untersuchungen mit dem Lichtzählrohr in Arosa.	VII/484
GÖTZ, P. und KREIS, A.: Das Ultraviolett-Klima von Chur	X/352
GÖTZ, F. W. P.: Spektren des Nordlichts vom 25. Januar 1938	XI/556
GÖTZ, F. W.: „Ozonwolken“	XIII/ 3
GRAF, K.: s. TANK, F. und GRAF, K.	I/446
GRAF, K.: s. TANK, F. und GRAF, K.	I/299
GRAF, K.: s. TANK, F. und GRAF, K.	II/ 33
GRAZIADEI, H.: s. HESS, V. F., STEINMAURER, R. und GRAZIADEI, H.	VI/480
GRAZIADEI, H.: s. HESS, V. F., GRAZIADEI, H. und STEINMAURER, R.	VII/669
GREINACHER, H.: Zur Lichtbeugung an weiten Spalten	I/263
GREINACHER, H.: Über die Leuchtanregung der Gase durch Alphastrahlen	I/299

GREINACHER, H.: Schwankungen der Jonisation einzelner α -Teilchen	I/534
GREINACHER, H.: Über den Zusammenhang zwischen dem Biot-Savart'schen Gesetz und dem Induktionsgesetz	III/167
GREINACHER, H.: Über eine einfache Herleitung des Biot-Savart'schen Gesetzes aus dem Induktionsgesetz	IV/ 59
GREINACHER, H.: Ein einfacher Demonstrationsversuch über Wanderung und Raumladung von Luftionen	IV/135
GREINACHER, H.: Ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Brechkraft von Zerstreuungslinien	IV/(374) 428
GREINACHER, H.: Über die Beziehung zwischen Mikroskop und Fernrohr	IV/432
GREINACHER, H.: Die diatonische Tonleiter als gesetzmässiges Ton-spektrum	VI/305
GREINACHER, H.: Über einen hydraulischen Zähler für Elementarstrahlen	VII/(641) 360
GREINACHER, H.: Über den hydraulischen Zähler für Elementarstrahlen (II. Mitteilung) Messung des elementaren Photo-Effektes an Wasser	VII/514
GREINACHER, H.: Über einen weiteren hydroelektrischen Zähler für Elementarstrahlen und Photo-Elektronen (III. Mitteilung)	VIII/ 89
GREINACHER, H.: Zur Kennzeichnung und Benennung der neuen Zähler für Elementarstrahlung und Photo-Elektronen. Der Funkenzähler	VIII/265
GREINACHER, H.: Demonstration des Funkenzählers	IX/328
GREINACHER, H.: Der Funkenzähler als Netzanschlussgerät zur Zählung von Korpuskeln und Photonen	IX/590
GREINACHER, H.: Über Gittersteuerung des Spitzen- und Koronastroms	X/271
GREINACHER, H.: Demonstrationsapparat zur Wellenlehre; Gruppen- und Phasengeschwindigkeit	X/490
GREINACHER, H.: Masse und Energie im Schwerfeld	XII/394
GREINACHER, H.: Ein hydraulischer Demonstrationsapparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents	XIII/160
GREINACHER, H.: Einige einfache Demonstrationsversuche	XIV/552
GREINACHER, H.: Über den Spannungsaufbau im Kaskaden-Generator	XV/518
GRUNER, P.: Über die Beleuchtung trüber Medien	I/ 1
GRUNER, P.: Einige Bemerkungen zu der Sommerfeld'schen Elektronentheorie der Metalle	II/293
GRUNER, P. und GRÜTTER, M.: Beitrag zur Optik trüber Medien	III/477
GRUNER, P.: Anwendung der Optik trüber Medien auf die Beleuchtung der Atmosphäre. I. Die Beleuchtung der idealen Atmosphäre im Sonnenvertikal bei Sonnenuntergang und während der bürgerlichen Dämmerung	V/ 31
GRUNER, P.: Anwendung der Optik trüber Medien auf die Beleuchtung der Atmosphäre. II. Vereinfachte Ausdrücke zur Berechnung der Helligkeit der Atmosphäre	V/(211) 145
GRUNER, P.: Anwendung der Optik trüber Medien. III. Beleuchtung inhomogener, gekrümmter Schichten, Theorie des Purpurlichtes	V/351
GRUNER, P.: Vorschläge für eine verbesserte Benennung der Elementarkorpuskeln	VIII/326
GRUNER, P.: Die Beleuchtung der Atmosphäre	IX/596
GRUNER, P.: Die neueren Resultate der Photometrie der Dämmerungsfarben	X/348
GRUNER, P. und KLEE, Th.: Numerische Berechnung der Helligkeit des Himmels im Sonnenvertikal	XI/513

GRÜNER, P.: Zur Geschichte der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft	XIV/636
GRÜTTER, M.: s. GRÜNER, P. und GRÜTTER, M.	III/477
GUGELOT, P. C., HUBER, P. und SCHERRER, P.: Kernreaktionen mit schnellen Neutronen am Schwefel	XIV/138
GUGELOT, P. C.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, C. R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.	XV/330, 332, 333
GUILLISSEN, J.: s. STAHEL E. und GUILLISSEN J.	XI/463
GUILLISSEN, J.: s. BRADT, H., GUILLISSEN, J. und SCHERRER, P. . . .	XIII/259
GÜTTINGER, P.: Das Verhalten der Atome im magnetischen Drehfeld . .	IV/144
GÜTTINGER, P.: Über die Streuprozesse höherer Ordnung.	V/237
GÜTTINGER, P.: Grundzüge eines neuen Atommodells	IX/689
GUTZWILLER, N.: s. WEHLI, M. und GUTZWILLER, N.	XIV/307
GUYE, C. E. et SAINI, H.: Sur la dynamique des phénomènes d'imbibition .	I/441
GUYE, C. E. et ARCHINARD, J.: Contribution à l'étude dynamique de l'amalgamation	II/343
GUYE, C. E. et DUPRAZ, A.: Influence du champ magnétique sur le frottement intérieur des corps solides magnétisables	II/320
GUYE, C. E. et SAINI, H.: Contribution expérimentale à l'étude énergétique des phénomènes d'imbibition.	II/445
GUYE, C. E.: Considération théoriques sur la propagation de l'imbibition .	VII/(662)584
GUYE, C. E.: Sur quelques propriétés des couches de dipôles moléculaires	VII, 605
GUYE, C. E.: Quelques cas particuliers de propagation de l'imbibition .	VII, 850
GUYE, C. E.: Quelques remarques sur l'application aux chocs moléculaires de la théorie des circuits dépourvus de résistance	XIV/583
HABLÜTZEL, J.: Anomale Ausdehnung von Seignettesalz	VIII/498
HABLÜTZEL, J.: s. BUSCH, G., HABLÜTZEL, J. und SCHERRER, P.	X/330
HABLÜTZEL, J.: Dielektrisches Verhalten von schwerem Seignettesalz .	XII/278
HABLÜTZEL, J.: Schweres Seignettesalz. Dielektrische Untersuchungen an $\text{KNaC}_4\text{H}_2\text{D}_2\text{O}_6 \cdot 4 \text{D}_2\text{O}$ -Kristallen	XII 489
HAEFELI, R.: s. MÖRIKOFER, W. und HAEFELI, R.	X/347
HAGENBACH, A. und FREY, E.: Beeinflussung der Elektronensekundäremission durch Licht	I/297
HAGENBACH, A. und BÄCHTIGER, P.: Die dynamischen Charakteristiken einer Entladung zwischen Wolframelektroden in Neon.	II/146
HAGENBACH, A.: Ein Polarisationsapparat zur Bestimmung der optischen und magnetischen Rotationsdispersion in Ultraviolett . . .	III/158 u. 168
HAGENBACH, A.: s. PREISWERK, P. und HAGENBACH, A.	VI/461
HAGENBACH, A. und GÄRTNER, H.: Spektroskopische Bestimmung der Masse des Deuteriums aus der Balmerreihe	VIII/314
HAGENBACH, A.: Die Rotationsdispersion von Deuteriumoxyd im Ultraviolett	IX/582
HAGENBACH, A., AUERBACHER, F. und WIEDEMANN, E.: Zur Kenntnis der Lichtabsorption von Porphinfarbstoffen und über einige mögliche Beziehungen derselben zu ihrer Konstitution	IX/ 3
M. W.: Herrn Prof. Dr. August Hagenbach zum siebzigsten Geburtstage .	XIV 491
VON HALBAN, H. H.: Zur Thermodynamik der Amalgame	VII/484
VON HALBAN, H. H.: Die Bestimmung von Quecksilberdampfdrucken aus der Resonanzlichtabsorption.	VII/856
VON HALBAN, H. H. jun.: Dampfdruckabnormitäten bei kapillaraktiven Amalgamen	VIII/ 65

VON HALBAN, H. H. jun. und PREISWERK, P.: Über Resonanzniveaus für Neutronenabsorption	IX/318
VON HALBAN, H. und WIELAND, K.: Über eine Standardsubstanz für optische Absorptionsmessungen	XV/525
HÄLG, W.: s. WEHRLI, M. und HÄLG, W.	XV/315
DE HALLER, P.: Considérations théoriques sur la mesure des débits d'eau par la méthode d'Allen	III/ 17
HARDMEIER, W.: Zur Zerstreuung von α -Strahlen durch Helium . . .	I/193
HARDUNG, V.: Beitrag zur Methodik der photographischen Absorptionsmessung im Ultraviolett mit einigen Anwendungen	I/472
HARDUNG, V. und WEHRLI, M.: Zur Berechnung des Temperaturverlaufes an den Elektroden einer nichtstationären Entladung . . .	II/146
HARDUNG, V.: s. WEHRLI, M. und HARDUNG, V.	II/115, 146, 292
HARDUNG, V.: Zum Hydrodynamischen Mechanismus schallempfindlicher Flammen	VII/(655) 804
HARDUNG, V.: Systematische Untersuchungen an durch Resonanz erregten Röhren mit Hilfe einer neuen Messmethode	IX/341
HAVLIČEK, F. J.: Die homogene Rekombination von atomarem Wasserstoff	III/163
HAVLIČEK, F. J.: Rekombination von atomarem Wasserstoff beim technischen Wolframlichtbogen	VI/165
HAVLIČEK, J. und MIŠKOVSKÝ, L.: Versuche der Masaryk-Akademie der Arbeit in Prag über die physikalischen Eigenschaften des Wassers und des Wasserdampfes	IX/161
HEIERLE, J.: Über die Frequenzkonstanz turmalingesteuerter Ultrakurzwellensender	X/345
HEILPERN, W.: Über die Absorption des Sauerstoffes für Licht von der Wellenlänge 2144 ÅE	XIV/321
HEILPERN, W.: Die Absorption des Lichtes durch Sauerstoff bei der Wellenlänge $\lambda = 2144 \text{ Å. E.}$ in Abhängigkeit vom Druck	XIV/329
HEIM, W.: Goethes Farbenlehre mit Experimenten	V/311
HEINE, H. G. und SCHERRER, P.: Untersuchung der Oberflächenschicht von Siliciumcarbid und Umwandlung von SiC in Cristobalit . . .	XIII/489
HERZOG, G.: Die Zerstreuung von Röntgenstrahlen an Gasen I. . .	II/169
HERZOG, G.: Die Zerstreuung von Röntgenstrahlen an Gasen II. .	II/217
HERZOG, G.: Streuung von Röntgenstrahlen an Argon	IV/139
HERZOG, G.: Ein direkt zeigendes Radiumdosimeter mit Wechselstrom-Anschlussgerät	VI/237
HERZOG, G.: Absolutmessung der Streuintensität von Cu-K α -Strahlung an Argon	VI/(234) 508
HERZOG, G. und SCHERRER, P.: Ein sehr einfacher Vakuumzeiger für kleine Drucke	VI/277
HERZOG, G. und SCHERRER, P.: Höhenstrahlungsmessungen mit einer Wilsonkammer am Jungfraujoch	VIII/514
HERZOG, G.: Eine Wilsonkammer für Projektionszwecke	X/ 68
HERZOG, G. und WEBER, P.: Koinzidenzverstärker mit hohem Auflösungsvermögen	X/422
HERZOG, G.: Über harte Teilchen in Höhenstrahlungsschauern	XI/364
HESS, V. F. und MATHIAS, O.: Untersuchung der Schwankungen der kosmischen Ultragammapstrahlung auf dem Sonnblick (3100 m) und in Tirol	I/287

HESS, V. F. und STEINMAURER, R.: Neue Ergebnisse der Registrierung der kosmischen Ultrastrahlung auf dem Sonnenblick (3100 m) im Sommer 1929	III/439
HESS, V. F.: Die Station für Ultrastrahlenforschung auf dem Hafelekar (2300 m) bei Innsbruck	V/296
HESS, V. F., STEINMAURER, R. und GRAZIADEI, H.: Meteorologische und solare Einflüsse auf die Intensität der Ultrastrahlung	VI/480
HESS, V. F., GRAZIADEI, H. und STEINMAURER, R.: Untersuchungen über die Intensitätsänderungen der kosmischen Ultrastrahlung auf dem Hafelekar (2300 m)	VII/669
HOENIG, C.: Versuch einer Genealogie der Atomkerne	VII/459
HOENIG, C.: Das Kohlenstoff-Tetraeder und die Tieftemperatur-Modifikation des CO_2	XIV/324
HOLBRO, V.: Dispersionsmessungen im Ultraviolett an Thiophen, Furan und Pyrrrol	X/431
HUBER, A. und SCHMID, E.: Bestimmung der elastischen Eigenschaften quasiisotroper Vielkristalle durch Mittelung	VII/620
HUBER, O., HUBER, P. und SCHERRER, P.: Bestimmung der Masse von C^{14} aus der Kernreaktion ($\text{N}(\text{n}, \text{p})\text{C}$)	XIII/209
HUBER, O., HUBER, P. und SCHERRER, P.: Wirkungsquerschnitte für elastische Streuung und Kernreaktionen von schnellen Neutronen an N_2	XIII/212
HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Eine Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu 850 KV	XV/ 45
HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung	XV/312
HUBER, O., LIENHARD, O. und WÄFFLER, H.: Eine an Chlor mit schnellen Neutronen induzierte Aktivität	XV/314
HUBER, P. und SCHERRER, P.: Ein Vorlesungsversuch zur Ausschwebungsmethode nach Millikan	XIII/487
HUBER, P.: s. HUBER, O., HUBER, P. und SCHERRER, P.	XIII/209 u. 212
HUBER, P.: s. BALDINGER, E., HUBER, P. und STAUB, H.	X/254
HUBER, P.: s. BALDINGER, E. und HUBER, P.	XI/373
HUBER, P.: s. BALDINGER, E., HUBER, P. und STAUB, H.	XI/245
HUBER, P.: s. BALDINGER, E. und HUBER, P.	XII/(281) 330
HUBER, P.: Untersuchung der Kernreaktionen an Stickstoff und Schwefel unter Einwirkung von Neutronen	XIV/163
HUBER, P., ROSSEL, J. und SCHERRER, P.: Kernreaktionen von Fluor mit schnellen Neutronen	XIV/314
HUBER, P.: s. GUGELOT, P. C., HUBER, P. und SCHERRER, P.	XIV/138
HUBER, P.: s. SCHERRER, P., HUBER, P. und ROSSEL, J.	XIV/618
HULUBEI, H.: s. CAUCHOIS, Y., HULUBEI, H. et WEIGLE, J.	X/218
JAGGI, M.: s. KÖNIG H. und JAGGI M.	XI/358
JAGGI, M.: Beitrag zur Kenntnis der spektralen Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges auf Grund flimmerphotometrischer Messungen	XII/ 77
JAGGI, M.: Untersuchung des Aufladevorganges im Kaskadengenerator	XV/339
JAQUEROD, A. et GAGNEBIN, S.: Sur la diffusion de l'hydrogène à travers le fer	I/465
JAQUEROD, A. et MÜGELI, H.: Variation du premier module d'élasticité avec la température Acier-Palladium-Elinvar	I/139
JAQUEROD, A. et GAGNEBIN, S.: Sur un point singulier du fer	II/156

JAQUEROD, A. et MÜGELI, H.: Etude sur l'élasticité de flexion Acier-Elinvar	II/419
JAQUEROD, A. et STUCKY, R.: L'Elasticité de flexion et le frottement intérieur en fonction de la température	III/159
JAQUEROD, A.: A propos de nomenclature	IV/361
JAQUEROD, A. et MÜGELI, H.: Etude sur l'élasticité de flexion. Fer-Cuivre-Or-Argent-Platin-Verre de silice-Nickel	IV/ 3
JAQUEROD, A. und Zuber, O.: Experimentelle Untersuchung der Elastizität bei kleinen Spannungen	IV/360
JAQUEROD, A. et ZUBER, O.: Etude sur la loi de Hooke	V/423
JAQUEROD, A.: Régularités dans la série des masses atomiques	VII/368
JAQUEROD, A.: A propos du classement des masses atomiques	IX/339
JAQUEROD, A.: Classement des masses atomiques	XIV/606
JAQUEROD, A.: Classement des Masses atomiques. II.	XV/ 74
JAQUEROD, A.: Classement des Masses atomiques III. Les atomes radioactifs naturels	XV/192
JAQUEROD, A.: Classement des masses atomiques IV. Les atomes radioactifs artificiels	XV/259
JAQUEROD, A.: Le phénomène de scission et les atomes qui en résultent	XV/324
JAUCH, J. M.: Über die Energie-Impuls-Tensoren und die Stromvektoren in der Theorie von Dirac für Teilchen mit Spin grösser als $\frac{1}{2}$ h.	XI/374
JAUCH, J. M.: Die Streuung schneller Elektronen an Kernen	XIII/451
JAUCH, J. M.: Wechselwirkung von Elektronen mit schweren Teilchen	XIV/143, 465
JAUCH, J. M.: Kernkräfte in der Elektronenpaartheorie	XV/175
JAUCH, J. M.: Bemerkungen zum Streuproblem in der Elektronenpaartheorie	XV/221
JEANJAQUET, CH.: Sur la caractéristique de la lampe à trois électrodes	I/468
IMHOF, A.: Ein neuer Gleichspannungsgenerator für 3 Millionen Volt	XII/285
JOHNER, W.: Eine indirekte, experimentelle Methode zur Bestimmung der Schubspannungen in auf Torsion beanspruchten prismatischen Stäben beliebigen Querschnitts	I/468
JOHNER, W.: Eine Messung der Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität des Wassers	IV/463
JOHNER, W.: Die Temperaturabhängigkeit des Magnetisierungskoeffizienten des Wassers zwischen 0° und 100° C.	IV/238
JOHNER, W. s. STAHEL, E. und JOHNER, W.	V/310
JOHNER, W. und STAHEL, E.: Über die zeitliche Aufeinanderfolge der α - und β -Strahlung des Radiums	VII/638
JOLIOT, F.: Propriétés et conditions des neutrons	VI/427
JOLIOT, F.: Origine des électrons positifs	VI/433
JONES, H.: Application de la théorie électronique des métaux à l'étude des alliages	Sonderheft 1934/84
JOST, W.: s. KREIS A. und JOST W.	XI/532
JOYET, G.: La production de courants gazeux ionisés unipolaires intenses en ions légers par les rayons béta et gamma du Radium	XIII/339
JOYET, G.: s. MERCIER, P. und JOYET, G.	VIII/310
JOYET, G.: s. PERRIER, G. und JOYET, G.	VIII/491
JOYET, G.: s. MERCIER, P. et JOYET, G.	IX/574
JOYET, G.: s. MERCIER, P. et JOYET, G.	IX/642
JOYET, G.: Méthode nouvelle de détermination des dimensions des ions par la déperdition d'un écoulement gazeux ionisé unipolaire . . .	XV/338
JUNG, C.: Zur Methodik der Kathodenfall-Messungen	IV/189

	Bd. Seite
JUVET, G.: s. GONSETH, F. und JUVET, G.	I/421
JUVET, G.: Sur quelques ds ²	V/231
KAISER, W.: Kugelbilder des Himmels und der Erde nach Entwürfen und perspektivisch-geometrischen Darstellungen des Referenten.	IX/560
KAPELER, H.: Messung der Form und der Breite der Comptonlinie	VIII/314
KEESOM, W. H.: Thermische Eigenschaften des flüssigen Heliums . .	VI/418
KELLER, E. und PREISWERK, P.: Resonanzniveaus für Neutronenein- fangung beim Indium	XI/372
KEMMER, N.: Zur Theorie der Neutron-Proton-Wechselwirkung . . .	X/ 47
KEMMER, N.: Über die Lichtstreuung an elektrischen Feldern nach der Theorie des Positrons	X/112
KEMMER, N. und LUDWIG, G.: Über die Lichtstreuung an elektrischen Feldern nach der Theorie des Positrons (II)	X/182
KETELAAR, H.: s. STAHEL, E. und KETELAAR, H.	V/299
KETELAAR, H.: s. STAHEL, E. und KETELAAR, H.	VI/478
KIPFER, P.: s. PICCARD, A. und KIPFER, P.	IV/374
KIPFER, P.: Messgenauigkeit einer Nullmethode zur Radiumdosierung	VIII/267
KIPFER, P.: s. STAHEL, E. und KIPFER, P.	VIII/508
KIPFER, P.: s. STAHEL, E. et KIPFER, P.	IX/492
KIPFER, P.: Un compteur mécanique rapide	XV/423
KLAINGUTI-SCHAUMANN, H. und MOLL, E.: Zur Aerologie des Maloja- windes	X/355
KLÄY, H.: Störfeld einer Hochspannungsentladung in einem abge- schirmten Raume. Bestimmung der Schutzwirkung der verwendeten Abschirmung	XII/443
KLEE, TH.: s. GRUNER, P. und KLEE, TH.	XI/513
KÖNIG, E. und BUCHMÜLLER, F.: Zur Frage des Ausdehnungskoeffi- zienten der nationalen Meterprototype	II/159
KÖNIG, E. und BUCHMÜLLER, F.: Bemerkungen zum internationalen Westonelement.	V/(212) 166
KÖNIG, H.: Die Wirkungsfunktion der Wurfbewegung und ihre geo- metrisch-optische Bedeutung	I/237
KÖNIG, H.: Über den Thermionenstrom in dichten Gasen bei zylind- rischer Elektrodenanordnung,	I/277, 293
KÖNIG, H.: Eine neue, rein elektrische Methode zur Bestimmung des Formfaktors von Wechselspannungen	I/293
KÖNIG, H.: Über Scheitelspannungs-Messungen mittels röhrengleich- gerichtetem Kondensatorenstrom	II/152
KÖNIG, H.: Über die Fehler der Scheitelspannungs-Messung vermittelt röhrengleichgerichtetem Kondensatorstrom	II/357
KÖNIG, H.: Über einige Anwendungen des Röhrengleichrichters in der Messtechnik	III/158
KÖNIG, H.: Über Formfaktormessungen	III/249
KÖNIG, H.: Zur Theorie des Vierpols	III/459
KÖNIG, H.: Über die Abhängigkeit des Scheinwiderstandes eines sym- metrischen Vierpols von der Belastung	IV/281
KÖNIG, H.: Der Vierpol und seine speziellen Schaltungen	IV/303
KÖNIG, H.: Ein Kippgerät für elektrische Nervenreizung	V/212
KÖNIG, H.: Wechselstrom-Nullinstrument mit Gleichstromempfind- lichkeit	V/302
KÖNIG, H.: Konstant arbeitender Gleichstromverstärker	VI/218, 240

KÖNIG, H.: Bemerkungen zur Frage der Wahl einer Standardmethode für den Vergleich verschiedenfarbiger Lichtquellen	VII/427
KÖNIG, H.: Beiträge zum Problem des Vergleiches verschiedenfarbiger Lichtquellen	VII/433
KÖNIG, H.: Objektive oder subjektive Präzisions-Photometrie	VII/465
KÖNIG, H.: Über eine Unbestimmtheit bei dem Vergleich verschiedenfarbiger Lichtquellen nach dem Verfahren von Tikhodeew . . .	VIII/ 82
KÖNIG, H.: Verwandlung schwarzer Strahlung in nahezu schwarze Strahlung anderer Temperatur durch Lichtmischung und Filterung	VIII/211
KÖNIG, H.: Grenzen der Leistungsfähigkeit der Selen-Sperrschichtzellen	VIII/505
KÖNIG, H.: Über die Bedeutung der Abweichung der Energieverteilung der Glühlampenstrahlung von derjenigen des schwarzen Körpers für die Präzisionsphotometrie	VIII/637
KÖNIG, H.: Eigenschaften einer Selen-Sperrschichtzelle bei dem „ballistischen“ Messverfahren	IX/602
KÖNIG, H.: Heterochrome Präzisions-Photometrie mittelst Thermosäule und Kombinationsfilter	X/165
KÖNIG, H.: Theoretische Behandlung einiger Probleme aus der heterochromen Photometrie	XI/432
KÖNIG, H.: Differential-Vorverstärker für elektro-physiologische Zwecke und für Brückenmessungen	XI/507
KÖNIG, H. und JAGGI, M.: Neubestimmungen der Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges	XI/358
KÖNIG, H.: Über die bei subjektiven Präzisionsmessungen an Natriumlicht nach dem Filterverfahren notwendigen Messbedingungen . .	XII/229
KÖNIG, H.: Über die Anwendung des Filterverfahrens in der objektiven heterochromen Photometrie	XII/313
KÖNIG, H.: Zur Theorie der Präzisions-Photometrie von Mischlichtern	XII/519
KÖNIG, H.: Mehrstufiger, kompensierter Differential-Gleichstromverstärker für Netzanschluss	XIII/381
KÖNIG, H.: Generator für niederfrequente elektrische Impulse jeder Form	XIII/393
KÖNIG, H.: Bemerkung über den Zusammenhang zwischen Photometrie und Kolorimetrie	XIV/559
KÖNIG, H. und LÜTHY, H.: Neuere Untersuchungen über die Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges	XIV/145
KÖNIG, H.: Modellbetrachtungen über die Abweichung der photometrischen Eigenschaften eines Empfängers von der linear-eindeutigen Struktur	XV/ 85
KÖNIG, H.: Anschauliche Ableitung einiger Näherungsformeln aus der Theorie der Stromverdrängung	XV/433
KOUMINE, T.: Force électromotrice-thérmoelectrique entre le fer non aimanté et le fer aimanté	IV/364
KOUMINE, T.: Force électromotrice thermoélectrique d'aimantation du nickel	VI/474
KOUMINE, T.: Forces électromotrices-thermoélectriques dues à l'aimantation	VII/732
KOUMINE, T. et MEYLAN, L.: Sur l'emploi du miroir plan en focométrie	VII/476, 520
KREIS, A.: s. GÖTZ, P. und KREIS, A.	X/352
KREIS, A. und JOST, W.: Die Eisdickenmessungen der Gletscherkommission der S. N. G. auf dem Unteraargletscher	XI/532
KREIS, A. und WANNER, E.: Der neue Vertikalseismograph der M. Z. A.	XI/539

KUHN, W., SUHR, H. und RYFFEL, K.: Versuche über die Beweglichkeit von Fremdmolekülen in gequollenem und in elastisch festem Kautschuk	XIV/497
LÄMMEL, R.: Masse und Energie in der speziellen Relativitätstheorie	XII/511
LASSÉ, R.: Untersuchung über die Veränderung der Durchlässigkeit von Gläsern für ultraviolettes Licht durch Quarzlichtbestrahlung	V/ 92 I/208
LÄUCHLI, A.: Über die Absorption des ultravioletten Lichtes in Ozon	
LAUTERBURG, B.: s. BANTLE, W., BUSCH, G., LAUTERBURG, B. und SCHERRER, P.	XV/324
LEEMANN, A.: Messungen über das Funkenpotential im Deuterium und Wasserstoff	XII/397
LEHMANN, W.: s. ZICKENDRAHT, H. und LEHMANN, W.	IV/359
LEHMANN, W.: s. ZICKENDRAHT, H. und LEHMANN, W.	V/312
LEHMANN, W.: Elektro-akustische Untersuchungen an elektro-magnetischen Lautsprechern	VI/ 3
LENZ, E.: Die von der Ultrastrahlung erzeugte elektrische Leitfähigkeit der untern Atmosphäre	VI/479
LEVI, F.: Über Frequenzänderungen des Lichts bei der Beugung an Ultraschallwellen	IX/234
LEVI, F. und NAGENDRA NATH, N. S.: Zur Theorie des Durchgangs von Ultraschallwellen durch eine feste Platte	XI/408
LEVI, F.: s. BÄR, R., LEVI, F. und NAGENDRA NATH, N. S.	XI/358
LIECHTI, A. et SCHERRER, P.: Polymérisation dans le champ électrique	X/267
LIECHTI, A.: Etude de la polymérisation du styrolène dans le champ électrique à 50 périodes, et de la polymérisation de l'huile dans les condensateurs électriques	XI/477
LIENHARD, O.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XV/ 45
LIENHARD, O.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XV/312
LIENHARD, O.: s. HUBER, O., LIENHARD, O. und WÄFFLER, H.	XV/314
LIEPMANN, H. W.: Über die Messung der Schallgeschwindigkeit in flüssigem Sauerstoff	IX/507
LIEPMANN, H. W.: Die Schallgeschwindigkeit in flüssigem Sauerstoff als Funktion der Siedetemperatur bei Frequenzen von 7,5 und $1,5 \times 10^6$ Hz	XI/381
LIEPMANN, H. W.: Über Schallgeschwindigkeitsmessungen in flüssigem Argon	XII/421
LINDHOLM, F. und BIDER, M.: Zur Bedeutung des Voltaeffektes für Raumladungsmessungen nach der Thomson'schen Methode	I/537
LION, K. S.: Löschen von Thyatron-Röhren durch Änderung der Gitterspannung	XII/ 50
LION, K. S.: Eine Methode zur Messung hochfrequenter elektrischer Felder und ihre Anwendung zur lokalen Kurzwellen-Dosimetrie	XIV/ 21
LIPS, E.: Paramagnetisches Verhalten des Cr^{++} -Ions	VI/482
LIPS, E.: Paramagnetische Eigenschaften von zweiwertigen Chromsalzen	VII/537
LIPS, E.: Temperaturabhängigkeit des Paramagnetismus bei festem Stickoxyd	VII/663
LIPS, E.: Über die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von festem Stickoxyd	VIII/247
LOEBENSTEIN, A.: Über die Bestimmung akustischer Resonanzen nach der Hitzdrahtmethode	XV/321

LOTMAR, W.: Über die Lichtstreuung in Lösungen von Hochmolekularen	X/343
LÜDI, FR.: Wellenmechanische Behandlung des Problems des freien Elektrons unter gleichzeitigem Einfluss eines homogenen Magnetfeldes und einer ebenen elektromagnetischen Welle (Compton-effekt im Magnetfeld)	IV/375
LÜDI, F.: Bemerkungen zur Erklärung des Tanbergeffektes (Druck auf die Kathode einer Bogenentladung)	VIII/272
LÜDI, F.: Theorie der Löschgittersteuerung der Gasentladung	IX/655
LÜDI, F.: Zur Theorie der Laufzeitschwingungen	XIII/ 77
LÜDI, F.: Der Ultrakurzwellengenerator mit Phasenfocussierung (Klystron)	XIII/122
LÜDI, F.: Über einen neuartigen Ultrakurzwellengenerator mit Phasenfocussierung	XIII/498
LÜDI, F.: Eigenfrequenzen des E-Typus eines kapazitätsbelasteten zylindrischen Hohlraumresonators	XIV/328
LUDWIG, G.: Einfluss der Polarisierung des inneren Elektrons im Felde des äusseren auf die Terme des Spektrums eines Zwei-Elektronensystems (insbesondere He)	VII/273
LUDWIG, G.: s. KEMMER, N. und LUDWIG, G.	X/182
LÜDY, W.: Piezoelektrizität von KH_2PO_4	XII/278
LÜDY, W.: Der Einfluss der Temperatur auf das dynamisch-elastische Verhalten von Seignetteelektrika	XV/527
LÜDY, W.: s. BANTLE, W. und LÜDY, W.	XV/325
LUFTI, A.: Über den Nachweis der Frequenzänderung des Lichtes durch Doppler-Effekt bei der Lichtbeugung an Ultraschallwellen	VIII/502
LUFTI, A.: Über den Nachweis der Frequenzänderung des Lichts durch den Dopplereffekt bei der Lichtbeugung an Ultraschallwellen in Flüssigkeiten	IX/ 63
LÜTHY, H.: s. KÖNIG, H. und LÜTHY, H.	XIV/145
LÜTHY, H.: Über die Abhängigkeit der Flimmer-Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges von den Messbedingungen	XV/343
LÜTHY, R.: Dispersion dans les ondes courtes	VI/139
LÜTHY, W. P.: Die Schwungradschaltung der Antenne	III/ 39
MAEDER, D. und MIESCHER, E.: Über eine Methode zur Messung zeitlich rasch veränderlicher Spektren	XV/511
DE MANDROT, R.: Modules isothermiques et modules adiabatiques d'élasticité du quartz cristallisé	V/362
MANNEBACH, C.: Die Intensität der sekundären Streustrahlung („Raman-Linien“)	II/286
MASSA, J.: s. STAHEL, E. und MASSA, J.	XIV/325
MATHIAS, O.: s. HESS, V. F. und MATHIAS, O.	I/287
MATOSI, F.: Ultrarotes Spektrum und Struktur von Gläsern	XI/469
MAUE, A. W.: Die Oberflächenwelle in der Elektronentheorie der Metalle	Sonderheft 1934/68
MEIER, F. und DESSAUER, F.: Versuche über die dynamische Linse	XIV/136 u. 271
MEIER, F.: s. DESSAUER, F., MEIER, F., METZGER, S. und SAXER, L.	XV/315
MEIER, J.: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft	III/444
MEISSNER, W.: Arbeiten des Charlottenburger Kältelaboratoriums über Supraleitfähigkeit und über das Wasserstoff-Isotop	VI/414
METTNER, L.: Über die Streuung kurzwelliger γ -Strahlen	VI/445
MERCANTON, P.-L. et GOLAZ, CH.: Ecrans protecteurs contre les gelées nocturnes: effet de protection et effet de serre	X/358

	Bd. Seite
MERCANTON, P. L.: Un pluviomètre aérodynamiquement neutre . . .	XI/553
MERCANTON, P. L.: Commission des Glaciers: Présentation d'un film de la crue du Glacier Supérieur du Grindelwald . . .	XI/556
MERCANTON, P. L.: Observations avec le pluviomètre aérodynamique de MZA. . .	XIII/ 5
MERCIER, A.: Application des nombres de Clifford à l'établissement du théorème de relativité de Lorentz . . .	VII/649
MERCIER, A.: s. SAINI, H. und MERCIER, A. . .	VII/267
MERCIER, A.: Sur l'énergie propre de l'électron . . .	XII/ 55
MERCIER, A.: Sur l'axiomatique de la théorie cinématique de Milne	XIII/473
MERCIER, A.: Beziehungen zwischen den Clifford'schen Zahlen und Spinoren . . .	XIV/565
MERCIER, A.: Remarque sur la dynamique des fluides visqueux . . .	XV/509
MERCIER, P. et JOYET, G.: Méthode de mesure des tensions en ultrahaute fréquence, de 10^7 à 10^8 périodes . . .	VIII/310
MERCIER, P. et JOYET, G.: La séparation des ions légers positifs et négatifs pour l'obtention de courants d'air chargés d'un seul signe	IX/574
MERCIER, P. et JOYET, G.: Détermination des densités ioniques par la méthode du courant gazeux en tenant compte de la perte par défaut d'isolement . . .	IX/642
MERCIER, R.: Paramagnétisme du Co^{++} en solution très diluées . . .	VI/240
MERCIER, R.: Sur la turbulence des liquides . . .	VII/476
MERCIER, R. et SCHERRER, P.: Un appareil simple de démonstration de la diffusion des rayons α . . .	VIII/589
MERCIER, R.: Une extension des formules de Fresnel . . .	XV/515
MERMOD, C.: s. PERRIER, A. et MERMOD, C. . .	XI/362
MERMOD, C.: s. PERRIER, A. et MERMOD, C. . .	XI/468
METZGER, S.: s. DESSAUER, F., MEIER, F., METZGER, S. und SAXER, L.	XV/315
MEYER, C.: s. SIGRIST, W. und MEYER, C. . .	IX/646
MEYER, EDG.: Über das Funkenpotential in Wasserstoff . . .	I/ 14
MEYER, EDG.: Über den Starkeffekt an der Quecksilber-Resonanzlinie (nach Versuchen von Herrn P. Brazdziunas) . . .	III/445
MEYER, EDG.: Vergleich der älteren und neueren Sondenmethoden zur Messung von Potentialen (nach Versuchen von Herrn K. Jung) .	III/445
MEYER, EDG.: Spektrallinie mit nur natürlicher Breite (nach Versuchen von Herrn S. Yen) . . .	IV/152
MEYER, EDG.: s. BÄR, R. und MEYER, EDG. . .	VI/242
MEYER, EDG., SCHEIN, M. und STOLL, B.: Über die Frage der Erweiterung des ultravioletten Sonnenspektrums . . .	VII/484
MEYER, EDG., SCHEIN, M. und STOLL, B.: Über eine neue ultraviolette Sonnenstrahlung . . .	VII/670
MEYER, EDG., MÜLLER, F. und ZUBER, K.: Über den Nachweis der ultravioletten Sonnenstrahlung bei $\lambda = 2150 \text{ \AA}$. . .	XII/415
MEYER, EDG.: Über die Absorption der ultravioletten Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre . . .	XIV/321
MEYER, EDG.: Über die Durchlässigkeit der Erdatmosphäre für Sonnenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 2144 \text{ \AA}$. . .	XIV/618
MEYER, H.: Spannungsoptische Untersuchung ebener Schwingungsvorgänge . . .	VII/651
MEYER, H. und TANK, F.: Über ein verbessertes elektrisches Verfahren zur Auswertung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ und seine Anwendung bei photoelastischen Untersuchungen . . .	VIII/315

MEYER-BÜHRER, H.: Über Messungen am Erdschatten während der Mondfinsternis vom 7./8. November 1938	XIII/ 11
MEYER, K. P.: Spektrometrische Untersuchungen über den Zustand des Chlorophylls in der Pflanze und in Reinpräparaten	XI/475
MEYER, K. P.: Spektrometrische Untersuchungen über den Zustand des Chlorophylls in der Pflanze, in Extrakten und Reinpräparaten	XII/349
MEYER, K. P.: Nachweis und Messung geringer O_2 -Konzentrationen (bis $1:10^{10}$) vermittelt Leuchtbakterien	XIV/146
MEYER, K. P.: Nachweis und Messung geringer Konzentrationen an freiem Sauerstoff (bis $1:10^{10}$) vermittelt Leuchtbakterien	XV/ 3
MEYLAN, CH.: Un galvanomètre astatique de haute sensibilité	VII/475
MEYLAN, CH.: s. KOUSMINE, TH. et MEYLAN, CH.	VII/(476) 520
MEYLAN, L.: Réalisation d'un galvanomètre à aimants mobiles astatisé par un procédé nouveau	V/276
MEYLAN, L.: s. PERRIER, A. et MEYLAN, L.	VIII/320
MEYLAN, L.: s. PERRIER, A. et MEYLAN, L.	VIII/493
MEYLAN, L.: s. PERRIER, A. et MEYLAN, L.	X/340
MIESCHER, E.: Beitrag zur Kenntnis der anomalen magnetischen Rotationsdispersion von Lösungen	III/ 93
MIESCHER, E.: Dispersionsmessungen der magnetischen Drehung im Ultraviolett	IV/(143) 398
MIESCHER, E. und WEHRLI, M.: Bandenspektren des Indiumchlorids	VI/256
MIESCHER, E. und WEHRLI, M.: Die Spektren der Galliumhalogenide	VI/458
MIESCHER, E.: s. WEHRLI, M. und MIESCHER, E.	VI/457
MIESCHER, E.: s. WIELAND, K., WEHRLI, M. und MIESCHER, E.	VI/460
MIESCHER, E.: Molekülspektren von Bor- und Aluminiumhalogeniden	VII,(470) 462
MIESCHER, E. und WEHRLI, M.: Spektroskopische Untersuchung dampfförmiger Galliumhalogenide mit einem Anhang über ein Spektrum des Galliumoxyds	VII/331
MIESCHER, E.: s. WEHRLI, M. und MIESCHER, E.	VII/298
MIESCHER, E.: s. WIELAND, K., WEHRLI, M. und MIESCHER, E.	VII/843
MIESCHER, E.: Bandenspektren von Bor- und Aluminium-Halogeniden	VIII/279
MIESCHER, E.: Absorptionsspektren und Lebensdauer chemisch instabiler zweiatomiger Moleküle (BBr, AlBr, AlJ)	VIII/486
MIESCHER, E.: SiBr-Banden	VIII/587
MIESCHER, E.: Absorptionsspektren und Lebensdauer zweiatomiger Moleküle mit freien Valenzen	IX/693
MIESCHER, E.: Molekülspektren von Halogeniden der Eisengruppe insbesondere FeCl	XI/463
MIESCHER, E.: Zum Molekülspektrum von TiCl	XII/296
MIESCHER, E. und ROSENTHALER, E.: Rotationsanalyse im Bandenspektrum von BBr	XIII/346
MIESCHER, E.: Bandenspektren von Thalliumchlorid	XIV/148
MIESCHER, E.: Zum Elementarprozess der Verdampfung	XIV/320
MIESCHER, E.: Über eine Methode zur Bestimmung des Molekulargewichtes verdampfender Teilchen	XIV/507
MIESCHER, E. und MÜLLER, W.: Terme hoher Multiplizität in Molekülspektren	XV/319
MIESCHER, E.: s. MAEDER, D. und MIESCHER, E.	XV/511
MINDER, W.: s. SCHULZE, R. und MINDER, W.	X/403
MINDER, W.: Über das Neutronen-Protonen-Verhältnis der natürlich radioaktiven Elemente und den Zusammenhang der Zerfallsreihen	XI/497

MINDER, W.: Über die β -Strahlung des RaA und die Bildung des Elementes mit der Kernladungszahl 85	XIII/144
MIŠKOVSKÝ, L.: s. HAVLIČEK, J. und MIŠKOVSKÝ, L.	IX/161
MOLL, E.: s. KLAINGUTI-SCHAUMANN, H. und MOLL, E.	X/355
MONGAN, CH.: Elektronenbeugung an amorphem Kohlenstoff	V/(314) 341
MONGAN, CH.: Elektronenbeugung am Eis	VI/485
MONGAN, CH.: Elektronenbeugung an Aluminium und Aluminium-Oxyden	VII/482
MÖRIKOFER, W.: Über die Möglichkeit einer Schneemengenvorhersage	X/351
MÖRIKOFER, W. und HÄFEL, R.: Vorführung eines Filmes über die Arbeiten der Schweiz. Kommission für Schnee- und Lawinenforschung auf Station Weissfluhjoch im Winter 1936/37	X/347
MÖRIKOFER, W.: Erfahrungen mit einem einfachen Strahlungsintegrationsinstrument (Destillationsaktionometer Bellani)	XI/550
MÖRIKOFER, W.: Über die Trübung der Atmosphäre durch Wüstenstaub und Schneetreiben	XIV/537
MORSE, PH. M.: s. STÜCKELBERG, E. C. G. und MORSE, PH. M.	II/304
MORSE, PH. M. und STÜCKELBERG, E. C. G.: Lösung des Eigenwertproblems eines Potentialfeldes mit zwei Minima	IV/337
MORSE, PH. M.: s. STÜCKELBERG, E. C. G. und MORSE, PH. M.	IV/136
MROZOWSKI, S.: Bemerkungen über die Struktur der Quecksilberresonanzlinie 2537 Å.	IX/ 27
MÜGELI, H.: s. JAQUEROD, A. et MÜGELI, H.	I/139
MÜGELI, H.: s. JAQUEROD, A. et MÜGELI, H.	II/419
MÜGELI, H.: s. JAQUEROD, A. et MÜGELI, H.	IV/ 3
MÜHSAM, H.: s. WEIGLE, J. und MÜHSAM, H.	X/139
MÜLLER, A.: Über organische Kristalle mit Kettenmoleküle	IX/626
MÜLLER, F.: Die Dampfdruckkurve des Thalliums bei sehr geringen Dampfdichten	VII/491
MÜLLER, FR.: Die Linienabsorption des Thallium-Dubetts $\lambda = 3519/29\text{Å}$. E. bei Temperaturanregung des metastabilen Niveaus $6\text{ }^2\text{P}_{3/2}$	VII/(488) 813
MÜLLER, FR.: Die Frage nach der Existenz einer Absorption der Thallium-Linien $\lambda = 3519/29\text{Å}$. E. und $\lambda = 5350\text{Å}$. E. bei Erzeugung des metastabilen Zustandes $6\text{ }^2\text{P}_{3/2}$ durch Einstrahlung der Linie $\lambda = 3776\text{Å}$. E.	VIII/ 55
MÜLLER, FR.: Die Dampfdruckkurve des Thalliums bei sehr geringen Dampfdichten	VIII/152
MÜLLER, FR.: s. MEYER, EDG., MÜLLER, FR. und ZUBER, K.	XII/415
MÜLLER, J. und TANK, F.: Über das Verhalten von Glühkathoden-gleichrichtern bei sehr hohen Frequenzen.	I/447
MÜLLER, J.: Photoelastische Untersuchungen über einige Stützmauerprobleme	II/300
MÜLLER, J.: Ultrakurzwellen in Gegentakterregung	VI/491
MÜLLER, J. und TANK, F.: Über neue Formen von Mikrowellen-Röhren	VIII/309
MÜLLER, J. J.: Les oscillations de charges spatiales dans le magnétron	IX/652
MÜLLER, J. J. und ROSTAS, E.: Un générateur à temps de transit, utilisant un seul résonnateur de volume	XIII/435
MÜLLER, P.: s. WEHRLI, M. und MÜLLER, P.	XIV/134
MÜLLER, P.: Elektronenbandenspektren von dreiatomigen linear-unsymmetrischen Molekülen	XV/233
MÜLLER, P. und WEHRLI, M.: Absorptionsspektren dreiatomiger Moleküle im Schumanngebiete	XV/307

	Bd.	Seite
MÜLLER, W.: s. MIESCHER, F. und MÜLLER, W.	XV	319
NAGENDRA NATH, N. S.: s. BÄR, R., LEVI, F. und NAGENDRA NATH, N. S.	XI	358
NAGENDRA NATH, N. S.: s. LEVI, F. und NAGENDRA NATH, N. S.	XI	408
NÉMET, A.: Untersuchung über Strukturänderung der Kristalle im elektrischen Feld	VIII	97 u. 117
NIETHAMMER, TH.: Bemerkungen zur „vollständig“ isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung	XI	536
NOBILE, G.: Note su un trasmettitore ed un ricevitore per microonde	IX	651
NORDHEIM, L.: Sur les limites de la théorie élémentaire des électrons métalliques	Sonderheft 1934/3	
NOWACKI, W.: Die Verteilung der Strukturen kristallisierter Verbindungen über die 219 Raumgruppen	XV	312
v. OLSUFIEW, M.: Über die photoelektrische Endaufladung ultramikroskopischer Partikel	I	551
OOSTVEEN, W. und SACK, K.: Magnetische Doppelbrechung an Eisenhydroxyd-Solen	X	331
OPLATKA, G.: Untersuchungen über Raumladungen im Eis	VI	198, 244
OROWAN, E.: Zur Struktur der Realkristalle	VII	285
PAILLARD, H.: s. BRINER, E., SIEGRIST, B. et PAILLARD, H.	IX	555
PALACIOS, J.: s. CABRERA, J., PALACIOS, J. und SCHERRER, P.	II	154
PANKOW, G. W. und SCHERRER, P.: Anomalie der spezifischen Wärme von Lithium.	VII	644
PANKOW, G.: Über die Anomalie der spezifischen Wärme bei Lithium. Eine röntgenographische Untersuchung.	IX	87
DU PASQUIER, L.-G.: Sur la théorie des fusées	III	165
PATRY, J. F. C.: Sur la théorie du réseau optique	XI	189
PATRY, J. F. C.: s. WEIGLE, J. et PATRY, J. F. C.	XI	181
PATRY, J. F. C.: s. STUECKELBERG, E. C. G. et PATRY, J. F. C.	XII	300
PATRY, J. F. C.: s. STUECKELBERG, E. C. G. et PATRY, J. F. C.	XIII	167
PATRY, M.: s. WASSMER, E., VALLADARÈS, M. et PATRY, M.	III	391
PAULI, W.: Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik	V/(233)	179
PAULI, W.: Über die Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen	VI/(246)	279
PAULI, W. und WEISSKOPF, V.: Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung	VII	709
PAULI, W.: Über ein Kriterium für Ein- oder Zweiwertigkeit der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik	XII	147
PAULI, W. und FIERZ, M.: Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld	XII	297
PAULI, W.: Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse.	XIII	204
PEIERLS, R.: Über die statistischen Grundlagen der Elektronentheorie der Metalle	Sonderheft 1934/24	
PEIERLS, R.: Bemerkung über Umwandlungstemperaturen	Sonderheft 1934/81	
PERRIER, A.: Sur l'énergétique de l'effet Hall	I	290
PERRIER, A.: Sur les forces électromotrices d'aimantation	I	291
PERRIER, A.: Sur une théorie générale des effets électrocaloriques des courants	I	454
PERRIER, A.: Sur un électroaimant de laboratoire à transformations multiples	I	457

PERRIER, A.: Principe de méthode de mesure d'effets galvanomagnétiques et thermomagnétiques à circuit transversal fermé	I/463
PERRIER, A.: Sur l'interprétation de la variabilité de la résistance ohmique avec la fréquence	II/148
PERRIER, A.: Sur une modification générale de la théorie de la conduction calorifique et les écarts à la loi de Wiedemann et Franz	II/150
PERRIER, A.: Communauté d'origine et dépendances quantitatives entre les actions du champ magnétique sur les courants d'électricité et de chaleur.	II/308
PERRIER, A.: Grandeurs et formules théoriques nouvelles pour les phénomènes galvano-magnétiques et le phénomène thermomagnétiques	III/158, 317
PERRIER, A.: Métaux ferromagnétiques en particulier	III/158
PERRIER, A.: Interprétation unitaire des particularités de la conduction des milieux ferromagnétiques	III/400
PERRIER, A.: Peut-on séparer expérimentalement les pouvoirs thermoelectriques propres des potentiels de contact?	III/437
PERRIER, A.: Théorème sur la variation réversible de la résistivité des milieux ferromagnétiques	IV/145
PERRIER, A.: Lignes générales d'une Théorie de la Magnétostriktion (des ferromagnétiques)	IV/(148) 213
PERRIER, A.: Sur des propriétés de la matière ferromagnétique en lames et fils minces	V/ 59
PERRIER, A.: Sur l'interprétation mécanique des phénomènes coercitifs, liaisons avec l'aimantation spontanée, application à divers phénomènes.	V/223
PERRIER, A.: A propos de la loi d'approche vers la saturation ferromagnétique	V/230
PERRIER, A.: Propriétés de la matière ferromagnétique en lames et fils minces	V/231
PERRIER, A.: Réseau cristallin et striction spontanée	V/306
PERRIER, A.: Théorèmes sur la variation des effets magnétogalvaniques transversaux et effets connexes dans les milieux ferromagnétiques	VI/462
PERRIER, A.: Actions démagnétisantes et lois expérimentales des phénomènes du type magnétogalvanique et des efforts connexes	VI/467
PERRIER, A. et CORDEY, A.: Technique pour la mesure simultanée de l'ensemble des effets magnétogalvaniques et magnétothermoelectriques	VI/246
PERRIER, A. et CORDEY, A.: Effets galvaniques de l'aimantation et pouvoir thermoelectrique propre du nickel	VI/247
PERRIER, A. et FAVEZ, H.: Technique pour l'étude des liaisons générales entre ferromagnétisme et contraintes mécaniques intenses	VI/472
PERRIER, A.: Peut-on déceler par l'expérience des couplages magnétique de l'aimantation spontanée?	VII/471
PERRIER, A.: Remarques à propos de l'origine des variations de la susceptibilité avec la fréquence	VII/474
PERRIER, A.: Contraintes mécaniques et anisotropies complémentaires de milieux ferromagnétiques	VII/665
PERRIER, A. s. FAVEZ, H. et PERRIER, A.	VII/472
PERRIER, A.: La théorie mécanique des irréversibilités texturales devant des découvertes récentes	VIII/313 u. 421
PERRIER, A.: Moyens d'élever le flux utile des aimants et électroaimants	VIII/327

PERRIER, A.: Groupe de phénomènes électriques et thermiques liés aux déformations élastiques ou plastiques	VIII/329
PERRIER, A.: Observation de nouveaux effets translatoires des déformations sur la conduction métallique	VIII/494
PERRIER, A. et JOYET, G.: Sur un électroaimant puissant construit avec et pour des moyens limités	VIII/491
PERRIER, A. et MEYLAN, L.: Nouvelles mesures appuyant l'hypothèse des forces électromotrices magnéto-galvaniques et thermoélectriques spontanées	VIII/320
PERRIER, A. et MEYLAN, L.: Mesure des effets magnéto-galvaniques et magnétothermoélectriques longitudinaux	VIII/493
PERRIER, A.: Méthode pour déceler par vision directe la mosaïque ferromagnétique	IX/330
PERRIER, A.: Méthode simple et de haute sensibilité pour la mesure optique de très petits angles.	IX/332
PERRIER, A. et FAVEZ, H.: Observations sur la susceptibilité initiale en présence d'aimantation transversale	IX/563 u. 637
PERRIER, A.: De la liaison entre la conductibilité et le pouvoir thermo-électrique propre.	X/337
PERRIER, A.: A propos d'une méthode de mesure des très petits angles	X/342
PERRIER, A. et MEYLAN, L.: Séparation expérimentale des divers effets magnétogalvaniques et magnétothermiques spontanés dans le fer	X/340
PERRIER, A.: Susceptibilité initiale, aimantation et déformation rémanentes	XI/360
PERRIER, A. et MERMOD, C.: Méthode magnéto-électrolytique pour réaliser de fortes anisotropies	XI/362
PERRIER, A. et MERMOD, C.: Anisotropies magnéto-électrolytiques	XI/468
PERRIER, A.: Un mécanisme possible de la viscosité magnétique	XII/291
PERRIER, A. et AZAD, A.: Loi de nouvel effet mécano-électrique transversal dans le nickel et le fer	XIII/343
PETER, J. R.: Studie über die Abbildung der Zusammenstöße zwischen Gruppen elastischer Kugeln im Geschwindigkeitsraum	XI/587
PICCARD, A. und STAHEL, E.: Über die bei den neueren Wiederholungen des Michelson-Experimentes erreichten Genauigkeiten	I/362
PICCARD, A. und STAHEL, E.: Über die Schwankungen des Jonisations-effektes einzelner α -Strahlen	I/437
PICCARD, A.: Theoretische Gesichtspunkte bezüglich der Überlegenheit von Gammastrahlung vor Röntgenstrahlung bei Krebsbehandlung	II/299
PICCARD, A. et STAHEL, E.: Une chambre ionométrique à liquide de petites dimensions et son utilisation en radiologie	II/298
PICCARD, A. et STAHEL, E.: L'homogénéité des rayons gamma pénétrants du RaC	II/307
PICCARD, A., STAHEL, E. et DONY, F.: L'absorption des rayons gamma pénétrants du radium par des écrans de plomb de 12 à 31 cm	IV/371
PICCARD, A. und KIPFER, P.: Eisnadelwolken in der Stratosphäre	IV/374
PICCARD, A.: Interactions entre segments de courants, une hypothèse	X/325
PICLET, R.: Sur une faute de la théorie mécanique de la chaleur établie par Clausius et son école	I/471
PREISWERK, P. und HAGENBACH, A.: Optische Aktivität und Absorption von isosteren Molekeln	VI/461

PREISWERK, P.: 1. Drehungsvermögen und Absorption isosterer Molekel.	
2. Magnetische Rotationsdispersion von Thiophen, Furan, Pyrrol und Benzol	VII/203
PREISWERK, P. s. VON HALBAN, H. H. jun und PREISWERK, P.	IX/318
PREISWERK, P.: Ein Neutronenbeugungs-Experiment	X/257 u. 400
PREISWERK, P.: s. KELLER, E. und PREISWERK, P.	XI/372
PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Der Van de Graaff-Generator des Physikalischen Institutes der E. T. H.	XII/285
PREISWERK, P.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, C. R., GUGELOT, P. C., PREISWERK, P. et SCHERRER, P.	XV/330, 332, 333
PREISWERK, P.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XV/ 45
PRIEBSCH, J. A. und STEINMAURER, R.: Ganzjährige Registrierbeobachtungen der kosmischen Ultrastrahlung auf dem hohen Sonnblick (3106 m)	V/298
PRIEBSCH, J. A.: Die Druckabhängigkeit der Restionisation bei Ultrastrahlungsmessungen	VI/479
PROHASKA, F.: Synoptische Untersuchungen zu grossen Schneefällen in Graubünden	XIII/ 3
PROHASKA, F. und THAMS, CHR.: Neue Untersuchungen über die Strahlungseigenschaften der Schneedecke	XIII/ 21
RAJNFELD, S.: Beiträge zur Kenntnis einiger ebener Spannungsprobleme	VI/249
RAMELET, Ed.: Über die neue, rein elektronische Verstärkung verwendende Zählmethode für Korpuskularstrahlen	I/296
RAS, M. und ACKERET, J.: Über Verhinderung der Grenzschicht-Turbulenz durch Absaugung	XIV/323
RECK, W. und SMEKAL, A.: Röntgenographische Wärmeausdehnung von reinstem Natriumchlorid	VII/876
REGENER, E.: Die Absorptionskurve der Ultrastrahlung und ihre Deutung	VI/450
REISSNER, H.: Der senkrechte und schräge Durchtritt einer in einem flüssigen Medium erzeugten ebenen Dilatations-(Longitudinal)-Welle durch eine in diesem Medium befindliche planparallele feste Platte.	XI/140
REISSNER, H.: Berichtigung	XI/268
RISCH, R.: Zur Frage des auf die Kathode eines Lichtbogens ausgeübten Druckes	IV/122
RISCH, R.: Über die Kondensation von Quecksilber an einer vertikalen Wand	VI/128
ROBERT, CH. und WEHRLI, M.: Dampfdruckmessungen an Indiumhalogeniden	VIII/322
ROBERT, C.: Dampfdruckmessungen an Indiumhalogeniden	IX/405
ROGGEN, F. und SCHERRER, P.: Über einen Nachwirkungseffekt an Zählrohren bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen	XV/497
ROSAT, H.: Chronographe de haute précision au $\frac{1}{10}$ de seconde . . .	V/314
ROSAT, H.: L'enregistrement électrique du temps marqué par un chronomètre	VI/504
ROSAT, H.: Présentation de nouveaux Chronomètres Ulysse Nardin enregistrent électriquement le $\frac{1}{5}$ de seconde et le $\frac{1}{10}$	VII/(656)/493
ROSENTHALER, E.: Rotationsanalyse im Bandenspektrum von Bor-monobromid (BBr.)	XIII/355

	Bd. Seite
ROSENTHALER, E.: s. MIESCHER, E. und ROSENTHALER, E.	XIII/346
ROSSEL, J.: s. HUBER, P., ROSSEL, J. und SCHERRER, P.	XIV/314
ROSSEL, J.: s. SCHERRER, P., HUBER, P. und ROSSEL, J.	XIV/625
ROSSI, B.: Über die Wirkung der Ultrastrahlung auf die Materie . .	VI/440
ROSTAS, E.: s. MÜLLER, J. J. und ROSTAS, E.	XIII/435
RUSTERHOLZ, A.: Die Streuung von Röntgenstrahlen an Metallen . .	IV/ 68
RUSTERHOLZ, A.: Bibliographie schweizerischer physikalischer Arbeiten des Jahres 1931	V/ 68
RUSTERHOLZ, A.: Bibliographie schweizerischer physikalischer Arbeiten des Jahres 1932	VI/160
RUSTERHOLZ, A.: Zur Streuung von Röntgenstrahlen an Silber. . .	VI/(486) 565
RUSTERHOLZ, A.: Anomalie der spezifischen Wärme von Seignettesalz	VII/643
RUSTERHOLZ, A.: Die spezifische Wärme von Seignettesalz. I. Die Anomalie am oberen Curiepunkt	VIII/ 39
RUSTERHOLZ, A.: Bibliographie	VIII/682
RYFFEL, K.: s. KUHN, W., SUHR, H. und RYFFEL, K.	XIV/497
SACK, H.: Die innere Reibung von Gasen im Magnetfeld	VII/639
SACK, H.: Versuche mit Ultraschall	VII/657
SACK, H.: Dispersion des Kerreffektes einiger kolloidaler Lösungen . .	VIII/507
SACK, H.: s. OOSTVEEN, W. und SACK, H.	X/331
SAINI, H.: Contribution à l'étude calorimétrique de l'imbibition des corps poreux	I/441
SAINI, H.: s. GUYE, C. E. et SAINI, H.	I/441
SAINI, H.: s. GUYE, C. E. et SAINI, H.	II/445
SAINI, H.: Contribution expérimentale à l'étude calorimétrique de l'imbibition	III/ 3
SAINI, H.: s. SCHIDLOF, A. et SAINI, H.	V/ 73
SAINI, H.: Dilatation thermique de l'argent, mesurée aux rayons X .	VI/597
SAINI, H.: Dilatation thermique du sel gemme et du NaCl pur. . . .	VII/494
SAINI, H.: Dilatation thermique du sel gemme et du NaCl pur	VII/877
SAINI, H. und MERCIER, A.: Dilatation thermique du nitrate de sodium mesurée aux Rayons X.	VII/267
SAINI, H.: s. WEIGLE, J. J. und SAINI, H.	VII/257
SAINI, H.: s. WEIGLE, J. J. et SAINI, H.	IX/515
SAMULON, H.: Über die Synchronisierung von Röhrengeneratoren . .	XIV/281
SÄNGER, R. und STEIGER, O.: Dielektrizitätskonstante von Wasser- dampf, Konstitution des Wassermoleküls	I/369
SÄNGER, R. und STEIGER, O.: Temperaturempfindlichkeit der Molekular- polarisation von Gasen und Dämpfen	II/136
SÄNGER, R. und STEIGER, O.: Temperaturempfindlichkeit der Moleku- larpolarisation von Gasen und Dämpfen	II/301, 411
SÄNGER, R.: Elektrische Momente einiger organischer Verbindungen	III/162
SÄNGER, R.: Temperaturabhängigkeit der Molekularpolarisation von dampfförmigen 1,2-Dichloräthan in ihrem Zusammenhang mit der Existenz zweier Konfigurationen.	III/461
SÄNGER, R., STEIGER, O. und GÄCHTER, K.: Temperatureffekt der Molekularpolarisation einiger Gase und Dämpfe.	V/200
SÄNGER, R.: Frequenzabhängigkeit der Permeabilität von Eisen, Nickel und Cobalt	VII/478
SÄNGER, R. und FEJÉR, G.: Über den Frequenzgang der ferromagne- tischen Permeabilität in Abhängigkeit von der elastischen Span- nung	VII/664

SÄNGER, R. und FEJÉR, G.: Ferromagnetische Eigenschaften bei sehr hohen Frequenzen	VIII/492
SÄNGER, R.: s. STÄGER, H., SÄNGER, R. und SIEGFRIED, W.	XII/561
DE SAUSSURE, M.: Une nouvelle forme de la méthode à la réflexion en photométrie photographique stellaire	X/357
SAXER, L.: s. DESSAUER, F., MEIER, F., METZGER, S. und SAXER, L.	XV/315
SCHAETTI, N.: s. SCHEIN, M., STOLL, B. und SCHAEETTI, N.	VII/674
SCHAMES, L.: Erweiterung des Clausius-Maxwell'schen Kriteriums	I/417
SCHAMES, L.: Über den direkten Zusammenhang zwischen Zustands- gleichung und innerer Reibung	III/450
SCHAMES, L.: Zur Lösung des Raumproblems	XV/523
SCHEIN, M.: Optische Messungen am Quecksilber-Atom (Supplement I zu Volumen II 1929)	1—111
SCHEIN, M.: Über die Reflexion und Absorption langwelliger Röntgen- strahlen	IV/149
SCHEIN, M. und STOLL, B.: Über die Messung einzelner Lichtquanten im Ultraviolett	VII/488
SCHEIN, M. und STOLL, B.: Koinzidenzversuche mit Lichtzählrohren	VII/488
SCHEIN, M. und STOLL, B.: Über die Rayleigh'sche Zerstreuung des Zenithhimmelslichtes	VII/672
SCHEIN, M., STOLL, B. und SCHAEETTI, N.: Ozonbestimmungen über Zürich	VII/674
SCHEIN, M.: s. GÖTZ, F. W. P., SCHEIN, M. und STOLL, B.	VII/484
SCHEIN, M.: s. MEYER, E., SCHEIN, M. und STOLL, B.	VII/484
SCHEIN, M.: s. MEYER, E., SCHEIN, M. und STOLL, B.	VII/670
SCHERRER, P. und STÄGER, A.: Zerstreuung von Röntgenstrahlen durch Quecksilberdampf	I/289
SCHERRER, P. und STÄGER, A.: Zerstreuung von Röntgen-Strahlen an Quecksilberdampf	I/518
SCHERRER, P.: s. ARAKATSU, B. und SCHERRER, P.	II/153
SCHERRER, P.: s. CARRERA, J., PALACIOS, J. und SCHERRER, P.	II/154
SCHERRER, P. und SIEGRIST, R.: Charakteristische Temperatur von Lithium	III/161
SCHERRER, P. und STAUB, H.: Röntgenographische Untersuchung des Koagulationsvorganges bei kolloidem Gold	III/457
SCHERRER, P. und STÖSSEL, R.: Über das temperaturveränderliche magnetische Moment des Stickoxydmoleküls	III/455
SCHERRER, P.: s. ARAKATZU, B. und SCHERRER, P.	III/428
SCHERRER, P. und WIDMER, P.: Magnetisches Verhalten von festem Stickoxyd	V/302
SCHERRER, P.: s. COETERIER, F. und SCHERRER, P.	V/217
SCHERRER, P.: s. BUSCH, G. und SCHERRER, P.	VI/234
SCHERRER, P.: s. HERZOG, G. und SCHERRER, P.	VI/277
SCHERRER, P.: s. PANKOW, G. W. und SCHERRER, P.	VII/644
SCHERRER, P., STAUB, H. und WÄFFLER, H.: Apparatur für lang- dauernde Registrierung des Intensitätsverlaufs der Höhenstrahlung	VIII/516
SCHERRER, P.: s. HERZOG, G. und SCHERRER, P.	VIII/514
SCHERRER, P.: s. MERCIER, R. und SCHERRER, P.	VIII/589
SCHERRER, P., STAUB, H. und WÄFFLER, H.: Dauerregistrierungen der Höhenstrahlung auf Jungfraujoch (3456 m ü. M.)	X/254 u. 425
SCHERRER, P.: s. BUSCH, G., HABLÜTZEL, J. und SCHERRER, P.	X/330
SCHERRER, P.: s. LIECHTI, A. und SCHERRER, P.	X/267

SCHERRER, P. und ZINGG, E.: Stabilität der Isobaren Cd-In., In-Sn, Sb-Te, Re-Os	XII/283
SCHERRER, P.: s. PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XII/285
SCHERRER, P.: s. BANTLE, W. und SCHERRER, P.	XIII/214
SCHERRER, P.: s. BRADT, H., GUILLISSEN, J. und SCHERRER, P.	XIII/259
SCHERRER, P.: s. HEINE, H. G. und SCHERRER, P.	XIII/489
SCHERRER, P.: s. HUBER, P. und SCHERRER, P.	XIII/487
SCHERRER, P.: s. HUBER, O., HUBER, P. und SCHERRER, P.	XIII/209 u. 212
SCHERRER, P., HUBER, P. und ROSSEL, J.: Kernreaktionen von Fluor mit schnellen Neutronen	XIV/625
SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Periodische Intensitätsschwankungen der harten Komponente der kosmischen Strahlung auf Jungfrauoch	XIV/144
SCHERRER, P. und WÄFFLER, H. (E. T. H. Zürich): Statistik grosser Hoffmann'scher Stösse auf Jungfrauoch (3500 m ü. M.)	XIV/313
SCHERRER, P. und ZÜNTI, W.: Kernstreuung schneller Elektronen am Argon.	XIV/111
SCHERRER, P.: s. AMSLER, J. und SCHERRER, P.	XIV/318
SCHERRER, P.: s. BANTLE, W. und SCHERRER, P.	XIV/146
SCHERRER, P.: s. BANTLE, W. und SCHERRER, P.	XIV/316
SCHERRER, P.: s. BOSSHARD, W. und SCHERRER, P.	XIV/ 85
SCHERRER, P.: s. BOSSHARD, W., SCHERRER, P. und ZÜNTI, W.	XIV/136
SCHERRER, P.: s. BRADT, H. und SCHERRER, P.	XIV/319
SCHERRER, P.: s. BRAUN, A., BUSCH, G. und SCHERRER, P.	XIV/140
SCHERRER, P.: s. FÉJER, G. und SCHERRER, P.	XIV/141
SCHERRER, P.: s. GUGELOT, P. C., HUBER, P. und SCHERRER, P.	XIV/138
SCHERRER, P.: s. HUBER, P., ROSSEL, J. und SCHERRER, P.	XIV/314
SCHERRER, P.: s. BANTLE, W., BUSCH, G., LAUTERBURG, B. und SCHERRER, P.	XV/324
SCHERRER, P.: s. BAUMGARTNER, H., EXTERMANN, C. R., GUGELOT, P. C. PREISWERK, P. et SCHERRER, P.	XV/330, 332, 333
SCHERRER, P.: s. FEJÉR, G. und SCHERRER, P.	XV/645
SCHERRER, P.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XV/ 45
SCHERRER, P.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XV/312
SCHERRER, P.: s. ROGGEN, F. und SCHERRER, P.	XV/497
SCHERRER, W.: Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips	X/157, 387 u. 475
SCHERRER, W.: Über die Prinzipien der Physik	XI/219
SCHERRER, W.: Ein dynamisches Modell für schwere Teilchen	XII/249
SCHERRER, W.: Ein Ansatz für die Wechselwirkung von Elementarteilchen	XIV/81 u. 130
SCHERRER, W.: Über den Begriff des Atoms. I.	XV/ 53
SCHERRER, W.: Über den Begriff des Atoms. II.	XV/476
SCHIDLÖF, A.: Sur la dégénérescence du paramagnétisme aux températures élevées.	I/578
SCHIDLÖF, A.: La dégénérescence de la revolution des électrons et le magnétisme aux basses températures.	I/601
SCHIDLÖF, A. und SAINI, H.: Essai d'une théorie de l'émission des rayons β par les noyaux radio-actif	V/ 73
SCHIDLÖF, A.: Sur la constitution des noyaux lourds	VI/581

SCHILT, H.: Die Kohärenzeigenschaften der emittierten und gestreuten Strahlung	VII/ 83
SCHILTKNECHT, E.: s. TANK, F. und SCHILTKNECHT, E.	I/110
SCHILTKNECHT, E. s. TANK, F., BAUD, R. V. und SCHILTKNECHT, E. .	IX/648
SCHMID, E.: s. BOAS, W. und SCHMID, E.	VII/628
SCHMID, E.: s. HUBER, A. und SCHMID, E.	VII/620
SCHMID, F.: Eine grossartige Fata Morgana auf dem Suëskanal . . .	XI/557
SCHNEIDER, J. M.: Die Leuchterscheinungen bei Meteorfällen	X/348
SCHNEIDER, JAC. M.: Zur quartären Temperaturkurve nach Spitaler gegen Milankowitsch	XI/544
SCHNEIDER, JAC. M.: Zur Diskussion über die Ursache des Meteorleuchtens	XI/547
SCHNEIDER, J. M.: Quartärchronologie auf geophysikalischer Grundlage mit möglichst wenig Hypothesen	XIII/ 15
SCHÖNMANN, E.: s. WEHRLI, M. und SCHÖNMANN, E.	XV/317
SCHULZE, R. und MINDER, W.: Experimentelle Beiträge zum Problem der Luftäquivalenz bei der Gammastrahlenmessung	X/403
SCHWARZENBACH, H.: Eine exakte Methode zur Trennung von Primär- und Sekundärströmen in Elektronenröhren	III/446
SCHWARZENBACH, H. A.: Raumladungserscheinungen in Elektronenröhren	VI/252
SCHWARZENBACH, H. A.: Bestimmung der Primärelektronenströme in Trioden durch Energiemessungen	VII/108
SCHWARZENBACH, H. A.: Raumladungen und Elektronenschwingungen in Magnetron-Trioden	VIII/565
SCHWARZENBACH, H. A.: Über asymmetrische Lichtstreuung in mechanisch beanspruchten trüben Schichten	IX/301
SCHWARZENBACH, H. A.: Über die Lichtstreuung in gedehntem Kautschuk	XII/270
SIBOLD, A.: s. WEHRLI, M. und SIBOLD, A.	VI/265
SIBOLD, A.: Über die Elektronen und Jonenstromdichteverteilung in wandfreien Gasentladungen	IX/123
SIEBOTH, E.: Temperaturmessungen im Wolfram-Stickstoffbogen . .	IV/153
SIEGFRIED, W.: s. STÄGER, H., SÄNGER, R. und SIEGFRIED, W. . . .	XII/561
SIEGRIST, B.: s. BRINER, E., SIEGRIST, B. und PAILLARD, H.	IX/555
SIEGRIST, R.: s. SCHERRER, P. und SIEGRIST, R.	III/161
SIGRIST, W.: Resonanzerscheinungen in ionisierten Gasen	VIII/317
SIGRIST, W. und MEYER, C.: Ballistische Untersuchungen mit einem registrierenden Piezoquarz-Druckmesser	IX/646
SIGRIST, W.: Resonanzdispersion in ionisierten Gasen	X/ 73
SIMON, F.: Kalorimetrische Messungen über Ternaufspaltungen in Kristallen	VI/422
SIMON, F.: Heliumverflüssigung mit Arbeitsleistung	VI/424
SIZOO, G.: s. STAHEL, E. und SIZOO, G.	III/459
SMEKAL, A.: s. RECK, W. und SMEKAL, A.	VII/876
SMYTH, H. D. und STUECKELBERG, E. C. G.: Primäre und sekundäre Ionen in Sauerstoff und Kohlendioxyd	II/303
SOMMERFELD, A.: Bemerkungen zu Gruners Arbeit: Einige Bemerkungen zu der Sommerfeld'schen Elektronentheorie der Metalle	II/509
SOMMERFELD, A.: Über die Berechnung der Austrittsarbeit im Richard-soneffekt nach einer Methode von O. Scherzer	Sonderheft 1934/31
STÄGER, A.: s. SCHERRER, P. und STÄGER, A.	I/289

STÄGER, A.: s. SCHERRER, P. und STÄGER, A.	I/518
STÄGER, A.: Neue Methode zur Messung und Registrierung photoelektrisch wirksamer und ionisierender Strahlungen, beruhend auf der Beeinflussung der Zahl von Gasentladungen in der Zeiteinheit	V/ 26
STÄGER, H., SÄNGER, R. und SIEGFRIED, W.: Neue Untersuchungen an Phenoplasten	XII/561
STAHEL, E.: s. PICCARD, A. und STAHEL, E.	I/362
STAHEL, E.: s. PICCARD, A. und STAHEL, E.	I/437
STAHEL, E.: s. PICCARD, A. et STAHEL, E.	II/298
STAHEL, E.: s. PICCARD, A. et STAHEL, E.	II/307
STAHEL, E.: Über den Ursprung der Alphastrahlen übernormaler Reichweite	III/458
STAHEL, E. und SIZOO, G.: Über die Zahl der vom RaD ausgesandten Gammastrahlquanten	III/459
STAHEL, E.: Die innere Absorption der Gamma-Strahlen des Ra-D . .	IV/137
STAHEL, E.: s. PICCARD, A., STAHEL, E. und DONY, F.	IV/371
STAHEL, E. und JOHNER, W.: Über die Gammastrahlung des Radiums	V/310
STAHEL, E. und KETELAAR, H.: Wechselwirkung von Gammastrahlen und Atomkernen	V/299
STAHEL, E. und KETELAAR, H.: Kernstreuung der Gammastrahlen .	VI/478
STAHEL, E.: s. JOHNER, W. und STAHEL, E.	VII/638
STAHEL, E.: Über die innere Absorption der Gamma-Strahlen im L-Niveau	VIII/511
STAHEL, E.: Über die innere Absorption der Gamma-Strahlen in der L-Schale	VIII/651
STAHEL, E. et KIPFER, P.: Excitation de Rayons Gamma secondaires par des Rayons Beta	VIII/508
STAHEL, E.: Quantitative Interpretation der Gammastreustrahlung in Blei	IX/641
STAHEL, E. et KIPFER, P.: Le rayonnement gamma secondaire de grande énergie produit par les rayons bêta de l'UX et du RaE	IX/492
STAHEL, E. und GUILLISSEN, J.: Über die innere Bremsung der Betastrahlen des RaE	XI/463
STAHEL, E. und MASSA, J.: Z-Abhängigkeit der Bremsstrahlung schneller Elektronen	XIV/325
STAHEL, E. und WALTON, J.: Versuche zur Auffindung einer neuen, energiereichen Gammastrahlkomponente des RaC	XIV/326
STAUB, H.: s. SCHERRER, P. und STAUB, H.	III/457
STAUB, H.: Untersuchung der dielektrischen Eigenschaften des Seignettesalzes mittels Röntgenstrahlen	VI/254
STAUB, H.: Über selbsterregte nichtlineare Röhrenschwingungen	VI/337, 385
STAUB, H.: Untersuchung der dielektrischen Eigenschaften des Seignettesalzes mittels Röntgenstrahlen	VII/ 3
STAUB, H.: Über den Nachweis des innern elektrischen Feldes des Seignettesalzes mittels Röntgenstrahlen	VII/480
STAUB, H.: Eine neue Methode zur Trennung der β - und γ -Strahlung radioaktiver Präparate	VIII/512
STAUB, H.: s. SCHERRER, P., STAUB, H. und WÄFFLER, H.	VIII/516
STAUB, H.: Die Erzeugung von Positronen beim Durchgang schneller β -Teilchen durch Materie	IX/306
STAUB, H.: Eine einfache Anordnung zur Unterbrechung des Thyatronstromes bei Zählrohrverstärkern	IX/ 84

	Bd. Seite
STAUB, H.: s. BALDINGER, E., HUBER, P. und STAUB, H.	X/254
STAUB, H.: s. SCHERRER, P., STAUB, H. und WÄFFLER, H.	X/254 u. 425
STAUB, H.: s. BALDINGER, E., HUBER, P. und STAUB, H.	XI/245
STEIGER, O.: s. SÄNGER, R. und STEIGER, O.	I/369
STEIGER, O.: s. SÄNGER, R. und STEIGER, O.	II/136
STEIGER, O.: s. SÄNGER, R. und STEIGER, O.	II/301, 411
STEIGER, O.: Dielektrische Messungen an Amindämpfen.	III/161
STEIGER, O.: s. SÄNGER, R., STEIGER, O. und GÄCHTER, K.	V/200
STEINMAURER, R.: s. HESS, V. F. und STEINMAURER, R.	III/439
STEINMAURER, R.: s. PRIEBESCH, J. A. und STEINMAURER, R.	V/298
STEINMAURER, R.: s. HESS, V. F., STEINMAURER, R. und GRAZIADEI, H.	VI/480
STEINMAURER, R.: s. HESS, V. F., GRAZIADEI, H. und STEINMAURER, R.	VII/669
STERN, O.: Beugung von Molekularstrahlen am Gitter einer Kristallspaltfläche.	II/287
STERN, O.: Über das magnetische Moment des Protons	VI/426
STOLL, B.: Über das Entladungspotential einer Photozelle	III/448
STOLL, B.: s. GÖTZ, F. W. P., SCHEIN, M. und STOLL, B.	VII/484
STOLL, B.: s. MEYER, EDG., SCHEIN, M., und STOLL, B.	VII/484
STOLL, B.: s. SCHEIN, M. und STOLL, B.	VII/488
STOLL, B.: s. SCHEIN, M. und STOLL, B.	VII/672
STOLL, B.: s. MEYER, EDG., SCHEIN, M. und STOLL, B.	VII/670
STOLL, B.: s. SCHEIN, M., STOLL, B. und SCHAETTI, N.	VII/674
STOLL, B.: Die quantitative Bestimmung des Ozongehaltes bodennaher Luftschichten mit Hilfe des Lichtzählrohrs	VIII/ 3
STORCK, F. R.: Die Verschiebung der Absorptionsbanden von Farbstoffen bei der Salzbildung an auxochromen Gruppen	IX/437
STÖSSEL, R.: s. SCHERRER, P. und STÖSSEL, R.	III/455
STRATTON, J. A.: Streuungskoeffizient von Wasserstoff nach der Wellenmechanik	I/ 47
STRAUMANN, R.: Kompensationseigenschaften aus anisotropen Material gefertigter Chronometerunruhen	I/451
STRAUMANN, R.: Nachweis thermischer Anisotropie am Kristallhaufwerk hexagonal kristallisierender Metalle und Legierungen.	III/463
STRAUMANN, R.: Nachweis der Kristallstruktur an organischer und anorganischer Knochensubstanz	V/300
STRAUMANN, R.: Über neue thermisch vergütbare Legierungen mit kleinen Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls	X/269
STRAUMANN, R.: Praktische Ergebnisse aerodynamischer Messungen am Skiläufer	XIV/311
STREIFF-BECKER, R.: Eisbewegung im Firn und Gletscher und ihre Wirkung	XI/540
STUBER, R.: Über die Wirkungsweise des Funkenzählers	XII/109
STÜBING, O.: Untersuchungen am Helium-Wolframbogen	VIII/165
STÜCKLEN, H.: Eine einfache Methode zur Bestimmung des Intensitätsverhältnisses zweier Spektrallinien	III/449
STÜCKLEN, H.: Eine einfache spektrographische Methode zur Bestimmung von Linienbreiten	III/450
STÜCKLEN, H.: s. CARR, E. P. und STÜCKLEN, H.	VI/261
STUCKY, R.: s. JAQUEROD, A. und STUCKY, R.	III/159
STUDER, H. L.: s. ACKERET, J. und STUDER, H. L.	VII/501
STUECKELBERG, E. C. G.: Photographische Bestimmung von Kathodentemperaturen im elektrischen Lichtbogen	I/ 75

STUECKELBERG, E. C. G. und MORSE, P. M.: Störungsrechnung des Wasserstoffmoleküls und des Wasserstoffmoleküls	II/304
STUECKELBERG, E. C. G.: s. SMYTH, H. D. und STUECKELBERG, E. C. G.	II/303
STUECKELBERG, E. C. G. und MORSE, PH. M.: Unelastische Stöße zwischen Molekülen	IV/136
STUECKELBERG, E. C. G.: s. MORSE, PH. M. und STUECKELBERG, E. C. G.	IV/337
STUECKELBERG, E. C. G.: Theorie der unelastischen Stöße zwischen Atomen	V/369
STUECKELBERG, E. C. G.: Bemerkung zur Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen.	VIII/197
STUECKELBERG, E. C. G.: Remarque sur la production des paires d'électrons.	VIII/324
STUECKELBERG, E. C. G.: Austauschkräfte zwischen Elementarteilchen und Fermi'sche Theorie des β -Zerfalls als Konsequenzen einer möglichen Feldtheorie der Materie	IX/389
STUECKELBERG, E. C. G.: Invariante Störungstheorie des Elektron-Neutrino-Teilchens unter dem Einfluss von elektromagnetischem Feld und Kernkraftfeld (Feldtheorie der Materie II)	IX/533
STUECKELBERG, E. C. G.: Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil I)	XI/225
STUECKELBERG, E. C. G.: Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III)	XI/299
STUECKELBERG, E. C. G.: Über die Energieverluste von Elementarteilchen mit ganzzahligem Spin	XI/378
STUECKELBERG, E. C. G. et PATRY, J. C. F.: Sur l'interaction entre les particules nucléaires	XII/300
STUECKELBERG, E. C. G.: Influence du champ pseudoscalaire sur la Théorie classique des forces d'échange	XIII/347
STUECKELBERG, E. C. G. et PATRY, J. F. C.: Théorie classique des forces d'échange	XIII/167
STUECKELBERG, E. C. G.: Un nouveau modèle de l'électron ponctuel en théorie classique	XIV/ 51
STUECKELBERG, E. C. G.: La signification du temps propre en mécanique ondulatoire.	XIV/322
STUECKELBERG, E. C. G.: Remarque à propos de la création de paires de particules en théorie de relativité	XIV/588
STUECKELBERG, E. C. G.: La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quanta	XV/ 23
STUECKELBERG, E. C. G.: Remarques à propos de la relation entre spin et statistique	XV/327
STUECKELBERG, E. C. G.: Le rôle de l'invariance spinorielle et l'invariance de jauge dans un nouveau principe fondamental	XV/513
SUCKSMITH, W.: Gyromagnetischer Effekt einer ferromagnetischen Substanz oberhalb ihres Curiepunktes.	VIII/205
SUHR, H.: s. KUHN, W., SUHR, H. und RYFFEL, K.	XIV/497
SUITS, C. G.: Das selbstgleichrichtende Röhrenvoltmeter	II/ 3
SUITS, C. G.: Anwendung des Röhrenvoltmeters zur Analyse von Oberschwingungen	II/492
SUTTER, K.: Versuche über den Luftwiderstand auf Eisenbahnfahrzeugen in Tunneln	II/300
TANK, F. und SCHILTKNECHT, E.: Über die Erzeugung kurzer elektrischer Wellen nach der Methode von Barkhausen und Kurz	I/110

TANK, F. und GRAF, K.: Entdämpfung und Schwingungserregung aperiodischer Systeme	I/299, 508
TANK, F. und GRAF, K.: Über den zeitlichen Verlauf des Zündvorganges bei der Glimmentladung.	I/446
TANK, F.: s. FAVRE, H. und TANK, F.	I/446
TANK, F.: s. MÜLLER, J. und TANK, F.	I/447
TANK, F. und ACKERMANN, L.: Über die Erzeugung von n-Phasen-Hochfrequenzströmen.	II/299 u. 512
TANK, F. und GRAF, K.: Über den zeitlichen Verlauf des Zündvorganges bei der Glimmentladung	II/ 33
TANK, F. und ACKERMANN, L.: Über den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung beim Einsatz der Glimmentladung	III/(461) 468
TANK, F. und ZELWER, L.: Resonanz und Mitnahmeeffekt an rückgekoppelten Verstärkersystemen, welche nur Kapazitäten und Widerstände oder nur Induktivitäten und Widerstände enthalten	III 329
TANK, F.: s. BAUD, R. V. und TANK, F.	VI/493
TANK, F.: Die Drehfeldantenne	VII/652
TANK, F.: s. MEYER, H. und TANK, F.	VIII/315
TANK, F.: s. MÜLLER, J. und TANK, F.	VIII/309
TANK, F.: Eine neue Methode der interferometrischen Spannungsmessung	IX/611
TANK, F., BAUD, R. V. und SCHILTKNECHT, E.: Die neuen Einrichtungen des Photoelastischen Laboratoriums der E. T. H.	IX/648
TANK, F.: s. GERBER, W. und TANK, F.	X/344
THAMS, CHR.: Zur Vergleichbarkeit der Abkühlungswerte	XI/549
THAMS, CHR.: Wärmestrahlung von Sonne und Himmel in Davos	XIII/ 3
THAMS, CHR.: s. PROHASKA, F. und THAMS, CHR.	XIII/ 21
THIBAUD, J.: Der Brechungsindex für langwellige Röntgenstrahlen	II/271
THÜRLEMANN, B. und DESSAUER, F.: Über das Verhalten flüssiger Leiter im Magnetfeld (elektrische Geschwindigkeitsmessung von Strömungen).	XIII/343
THÜRLEMANN, B.: Methode zur elektrischen Geschwindigkeitsmessung von Flüssigkeiten.	XIV/383
TRENDELENBURG, F.: Quantitative Untersuchung von Klängen und Geräuschen	II/301
TRENDELENBURG, F.: Elektronenbeugung an Kohlenstoffen	VI/477
ÜRMEYI, L.: Über die Streuung der Jonisation einzelner α -Teilchen	X/285
VALKÓ, A.: Prüfung der Bhabha-Heitler'schen Theorie der Schauerbildung kosmischer Strahlung im Falle von Kohle	XI/ 59
VALLADARÈS, M.: s. WASSMER, E., VALLADARÈS, M. et PATRY, M.	III/391
VORTRÄGE, gehalten im Rahmen der Physikalischen Gesellschaft Zürich und des Zürcher Physikalischen Kolloquiums	II/271
WÄFFLER, H.: s. SCHERRER, P., STAUB, H. und WÄFFLER, H.	VIII/516
WÄFFLER, H.: s. SCHERRER, P., STAUB, H. und WÄFFLER, H.	X/254 u. 425
WÄFFLER, H.: Über ein Kanalstrahlrohr für $3 \cdot 10^6$ Volt	XII/288
WÄFFLER, H.: s. PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XII/285
WÄFFLER, H.: Über die Intensitätsschwankungen der harten Komponente der Höhenstrahlung auf Jungfraujoch (3500 m ü. M.)	XIV/215
WÄFFLER, H.: s. SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XIV/144
WÄFFLER, H.: s. SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XIV/313
WÄFFLER, H.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., PREISWERK, P., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XV/ 45

WÄFFLER, H.: s. HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.	XV/312
WÄFFLER, H.: s. HUBER, O., LIENHARD, O. und WÄFFLER, H. . . .	XV/314
WAGNER-JAUREGG, TH.: s. BRETSCHER, E. und WAGNER-JAUREGG, TH. . . .	II/522
WALDMEIER, M.: Absorbierbarkeit energiereicher Elektronen	VIII/517
WALDMEIER, M.: Sonneneruptionen und ihr Einfluss auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen	XI/537
WALDMEIER, M.: Über die Struktur der Sonnenflecken	XI/538
WALDMEIER, M.: Die Feinstruktur der Sonnenoberfläche	XIII/ 13
WALDMEIER, M.: Der Aufbau der Sonnenatmosphäre	XV/405
WALTI, A.: s. BÄR, R. und WALTI, A.	VII/658
WALTI, A.: Über die Bestimmung der elastischen Konstanten isotroper fester Körper mit Hilfe von Ultraschallwellen	XI/113
WALTON, J.: s. STAHEL, E. und WALTON, J.	XIV/326
WANNER, E.: Die zeitliche Verteilung der Erdbeben	X/352
WANNER, E.: Über die Definition der Seismizität einer Gegend . . .	XI/539
WANNER, E.: s. KREIS A. und WANNER E.	XI/539
WANNER, E.: Über die Frequenz der täglichen Niederschläge	XIII/ 7
WANNIER, G.: Eine vereinfachte Ableitung der Klein-Nishina-Formel . . .	VIII/665
WANNIER, G. et EXTERMANN, R.: Théorie mathématique de la diffraction de la lumière par les ultra-sons	IX/337
WANNIER, G.: s. EXTERMANN, R. et WANNIER, G.	IX/520
WASSMER, E., VALLADARÈS, M. et PATRY, M.: L'antagonisme des radiations dans leurs effets sur la plaque photographique. — Essai de classement de la fluorescence propre au radon dans la série de Wood	III/391
WEBER, P.: Ausbeute-Messungen an einem Aluminium-Zählrohr für Röntgenstrahlen	X/ 32
WEBER, P.: s. HERZOG, G. und WEBER, P.	X/422
WEHRLI, M.: Die Vorgänge an der Kathode einer Gasentladung . . .	I/247
WEHRLI, M.: Die Vorgänge an der Kathode beim Übergang von der Glimm- in die Bogenentladung	I/323
WEHRLI, M.: Der Übergang von der Glimm- in die Bogenentladung . .	I/449
WEHRLI, M. und HARDUNG, V.: Die Temperaturschwankungen der Elektroden als Ursache der Hysterese von Entladungen und die Berechnung dynamischer Charakteristiken	II/115, 146, 292
WEHRLI, M.: s. HARDUNG, V. und WEHRLI, M.	II/146
WEHRLI, M.: Sondencharakteristiken, Raumpotentiale und Elektronengruppen im Wolframbogen	III/180
WEHRLI, M.: Über die dynamischen Charakteristiken von Entladungen	III/461
WEHRLI, M.: Sondencharakteristiken, Raumpotentiale und Elektronengruppen des Wolfram-bogens	III/158, 180
WEHRLI, M.: Die Elektronenscharen im Wolfram-bogen	III/461
WEHRLI, M. und BÄCHTIGER, P.: Sondencharakteristiken und behinderte Bogenentladung	IV/(364) 290
WEHRLI, M.: s. BÄCHTIGER, P. und WEHRLI, M.	IV/ 31
WEHRLI, M. und BÄCHTIGER, P.: Die translatorische Elektronengruppe an der Kathode einer selbständigen Bogenentladung	V/106
WEHRLI, M. und BÄCHTIGER, P.: Über Elektronenstöße in der Bogenentladung	V/233
WEHRLI, M.: s. BÄCHTIGER, P. und WEHRLI, M.	V/161
WEHRLI, M. und MIESCHER, E.: Die Spektren der Indiumhalogenide	VI/457

WEHRLI, M. und SIBOLD, A.: Über die Elektronen- und Jonenstromdichteverteilung in wandfreien Gasentladungen.	VI/265
WEHRLI, M.: s. DÜRRWANG, J. und WEHRLI, M.	VI/235
WEHRLI, M.: s. MIESCHER, E. und WEHRLI, M.	VI/256
WEHRLI, M.: s. MIESCHER, E. und WEHRLI, M.	VI/458
WEHRLI, M.: s. WIELAND, K., WEHRLI, M. und MIESCHER, E.	VI/460
WEHRLI, M.: Das Indium-Isotop 113	VII/(468)/611
WEHRLI, M.: Zur Intensitätsverteilung in Bandenspektren zweiatomiger Moleküle	VII/(637) 676
WEHRLI, M. und MIESCHER, E.: Spektroskopische Untersuchung dampfförmiger Indiumhalogenide	VII 298
WEHRLI, M.: s. MIESCHER, E. und WEHRLI, M.	VII/331
WEHRLI, M.: s. WIELAND, K., WEHRLI, M. und MIESCHER, E.	VII/843
WEHRLI, M.: Über die Spektren der Tellurhalogenide	VIII 487
WEHRLI, M.: s. ROBERT, CH. und WEHRLI, M.	VIII/322
WEHRLI, M.: Die Bandenspektren der Tellurhalogenide und der Isotopeneffekt in Elektronenspektren mehratomiger Moleküle	IX/208
WEHRLI, M.: Über das Elektronenspektrum des Selendibromid-Dampfes	IX/329
WEHRLI, M.: Das anormale Verhalten der Intensität im Bandenspektrum von Indiummonojodid	IX/587
WEHRLI, M.: Über ein diffuses Bandensystem des SeCl_2 -Moleküls	IX 637
WEHRLI, M.: Das Elektronenbandenspektrum von HgCl_2 im Schumanngebiet	X/163
WEHRLI, M.: Die diskreten Bandenspektren 3-atomiger Quecksilberhalogenide	X/258
WEHRLI, M.: Elektronenbandenspektren der linearen Moleküle HgCl_2 , HgBr_2 , HgJ_2 und TeCl_2	XI/339
WEHRLI, M. und WENK, W.: Absorptionsspektren von InCl_2 , InBr_2 , InJ_2 und GaCl_2 im Schumanngebiete	XII/559
WEHRLI, M.: Die Schwingungsstruktur des Bandenspektrums von HgCl_2	XIII 153
WEHRLI, M.: s. FICHTER, R. und WEHRLI, M.	XIII 217
WEHRLI, M.: Die Kettenschwingungen der festen Dikarbonsäuren	XIV/145
WEHRLI, M.: Der Nachweis der Kettenschwingungen fester Dikarbonsäuren im Ultrarotspektrum	XIV/516
WEHRLI, M. und FICHTER, R.: Das Ultrarotspektrum von Glutarsäure und die oszillierenden Eigenschaften von Kettenmolekülen	XIV/189
WEHRLI, M. und GUTZWILLER, N.: Der Dampfdruck und das Bandenspektrum von Tellurdichlorid	XIV/307
WEHRLI, M. und MÜLLER, P.: Spektroskopische Untersuchung der Quecksilberhalogenide HgClBr , HgClJ und HgBrJ	XIV/134
W. M.: Herrn Prof. Dr. August Hagenbach zum siebenzigsten Geburtstag	XIV/491
WEHRLI, M. und HÄLG, W.: Photodissoziation zweiatomiger Moleküle in Ionen	XV/315
WEHRLI, M. und SCHÖNMANN, E.: Ultrarotspektren höherer Dikarbonsäuren	XV/317
WEHRLI, M.: s. MÜLLER, P. und WEHRLI, M.	XV/307
WEIGLE, J.: Influence du champ magnétique sur la constante diélectrique	I/273
WEIGLE, J.: Problèmes d'images électriques dans les diélectriques. I.	V/262
WEIGLE, J.: L'orientation des molécules non polaires par les dipôles	VI/ 68
WEIGLE, J.: Mesures de précision des réseaux rhomboédriques: NaNO_3	VII/ 46
WEIGLE, J.: Note sur la mesure de précision des réseaux hexagonaux: Zn	VII/ 51
WEIGLE, J. und SAINI, H.: La dilatation thermique de la Calcite	VII/257

WEIGLE, J.: Au professeur C. E. Guye à l'occasion de son 70ème anniversaire	IX/511
WEIGLE, J. et SAINI, H.: La structure du bromure d'ammonium à basses températures	IX/515
WEIGLE, J. et MÜHSAM, H.: Réflexion simultanée de Rayons X. par deux plans dans un cristal	X/139
WEIGLE, J.: s. BLANC, M. et WEIGLE, J.	X/495
WEIGLE, J.: s. CAUCHOIS, Y., HULUBEI, H. et WEIGLE, J.	X/218
WEIGLE, J.: Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié	XI/159
WEIGLE, J. et PATRY, J.: Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié II.	XI/181
WEIGLE, J.: Diffusion des Rayons X par les ondes thermiques des Cristaux (Diamant)	XIV/595
WEIGLE, J.: Influence des vibrations thermiques sur la diffraction des rayons X et réseau de Fourier	XV/162
WEIGLE, J.: Influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux	XV/329
WEIGLE, J. et BLEULER, K.: Théorie de l'influence des ondes ultrasonores sur la diffraction des rayons X par les cristaux	XV/445
WEIGLE, J.: s. BLEULER, K. et WEIGLE, J.	XV/511
WEIGLE, J.: s. BLEULER, K. et WEIGLE, J.	XV/553
WEIGLE, J.: s. EXTERMANN, R. et WEIGLE, J.	XV/455
WEILER, J.: Raman-Effekt in Kieselsäure-Estern und Kieselsäure-Gelen	V/302
WEISS, P.: Les moment atomiques déterminés au moyen des mesures magnétiques	II/283
WEISS, P.: Les moments atomiques du fers, du nickel et du cobalt dans les ferronickels et nickel-cobalt aux basses températures	II/307
WEISSKOPF, V.: s. PAULI, W. und WEISSKOPF, V.	VII/709
WENK, W.: s. WEHRLI, M. und WENK, W.	XII/559
WENK, W.: Fluoreszenzversuche an 3-atomaren Indiumhalogeniden	XIII/345
WENK, W.: Absorptions- und Fluoreszenzspektren 3-atomarer Indium- und Gallium-Halogenide	XIV/355
WENTZEL, G.: Kristalloptik und Wellenmechanik	VI/ 89
WENTZEL, G.: Zur Frage der β -Wechselwirkung	X/107
WENTZEL, G.: Bemerkungen zur β -Theorie	X/257
WENTZEL, G.: Zum Problem des statistischen Mesonfeldes	XIII/269
WENTZEL, G.: Zur Hypothese der höheren Proton-Isobaren	XIV/ 3
WENTZEL, G.: Zum Problem des statischen Mesonfeldes. Nachtrag	XIV/633
WENTZEL, G.: Zur Paartheorie der Kernkräfte	XV/111
WENTZEL, G.: Sättigungscharakter der Kernkräfte und Mesontheorie	XV/685
WERTLI, A.: Ein quartzgesteuerter Überlagerungsgenerator	VI/495
WIDMER, J. P.: Über die langwellige Empfindlichkeitsgrenze der Cäsiumoxyd-Photozelle	VI/269
WIEDEMANN, E.: s. HAGENBACH, A., AUERBACHER, F. und WIEDEMANN, E.	IX/ 3
WIELAND, K.: Verbindungsspektren der Halogensalze von Quecksilber, Cadmium und Zink	I/442
WIELAND, K.: Bandenspektren der Quecksilber-, Cadmium- und Zink-halogenide	II/46, 77, 144
WIELAND, K.: Thermo-optische Dissoziation von gasförmigem Schwefeldioxyd	VI/460

WIELAND, K., WEHRLI, M. und MIESCHER, E.: Ein neues Bandenspektrum des Schwefels im Schumanngebiet	VI/460
WIELAND, K., WEHRLI, M. und MIESCHER, E.: Ein neues Absorptionsspektrum von zweiatomarem Schwefeldampf im Schumanngebiet	VII/843
WIELAND, K.: Zum spektroskopischen Nachweis von zweiatomarem Quecksilberjodid (HgJ)	VIII/485
WIELAND, K.: Über das sichtbare Emissionsspektrum von zweiatomigem Quecksilberchlorid (HgCl)	IX/640
WIELAND, K.: Chemilumineszenz- und Fluorezenzspektren dampfförmiger Quecksilberhalogenide	X/323
WIELAND, K.: Vereinfachung des Fluoreszenzspektrums von HgBr durch Fremdgaszusatz	XII/295
WIELAND, K.: Optische Dissoziation des Moleküls HgJCl	XIV/313
WIELAND, K.: Das langwellige Emissions- und Fluoreszenzspektrum ($\lambda\lambda$ 5700 bis 3000 Å.E.) von natürlichem HgCl und von künstlich angereichertem HgCl ³⁷	XIV/420
WIELAND, K.: Die Bindungsenergie im Molekel HgJCl	XIV/549
WIELAND, K.: s. v. HALBAN, H. und WIELAND, K.	XV/525
WINTSCH, H.: Über die Dielektrizitätskonstante, Widerstand und Phasenwinkel des Eises	V/126
WOLFERS, F.: Quelques remarques au sujet des franges supplémentaires	I/470
WOLFKE, M.: Über den Assoziationsgrad in flüssigen Dielektrika	I/443
WOLFKE, M.: Über die Dielektrizitätskonstante des flüssigen Heliums	I/446
WOLFKE, M.: Über die adiabatische Magnetostriktion des flüssigen Sauerstoffs	X/506
WOLFKE, M.: Interactions entre circuits fermés à courants continus	XI/156
WOLLAN, E. O.: Eine neue Methode zur Messung der Intensität der Comptonstrahlung	VI/270
WOLLAN, E. O.: Messung der Form und Breite der an einem Gas gestreuten Comptonlinie	VI/485
WYSS, R.: Über eine optische Methode zur Messung stehender Ultraschallwellen in Flüssigkeiten	VII/406
WYSS, R.: Beiträge zur Methodik der Bestimmung der Ultraschallgeschwindigkeiten in Flüssigkeiten mittelst stehender Wellen	X/237
YEN, SH.: Optische Untersuchungen an Quecksilberatomstrahlen	VI/250
YEN, SH.: Versuche über die Resonanzstrahlung der Quecksilberlinie 2536,7 ÅE. unter Vermeidung der Dopplerbreite	VIII/225
ZBINDEN, K.: Bibliographie schweiz. physikalischer Arbeiten des Jahres 1935	IX/745
ZEHNDER, L.: Ein neuer elektrischer Effekt	II/ 38
ZEHNDER, L.: Persönliche Erinnerungen an W. C. Roentgen und über die Entwicklung der Röntgenröhren	VI/608
ZEHNDER, L.: 1. Die Grundlagen der klassischen Physik. 2. Die Leistungen des Wasserstoffatoms auf klassischer Grundlage.	VIII/518
ZELWER, L.: s. TANK, F. und ZELWER, L.	III/329
ZICKENDRAHT, H.: Über Messungen im Nahfeld eines Rundspruchsenders	IV/357
ZICKENDRAHT, H. und LEHMANN, W.: Elektroakustische Untersuchungen an Lautsprechern	IV/359
ZICKENDRAHT, H.: Messungen im Nahfeld eines Rundspruchsenders	V/ 3
ZICKENDRAHT, H.: Über schallempfindliche Flammen (Erste Mitteilung)	V/317
ZICKENDRAHT, H. und LEHMANN, W.: Weitere Untersuchungen über den akustisch-elektrischen Umsatz bei Lautsprechern	V/312

ZICKENDRAHT, H.: Über eine neue hydrodynamische Theorie der schallempfindlichen Flammen	VII/468
ZICKENDRAHT, H.: Die schallempfindliche Flamme als Gleichrichter	VII/653
ZICKENDRAHT, H.: Über schallempfindliche Flammen	VII/773
ZICKENDRAHT, H.: Elektrische Untersuchungen an schallempfindlichen Flammen	XIV/132 u. 195
ZICKENDRAHT, H.: Akustische Resonatoren und ihre Kopplung	XIV/309
ZICKENDRAHT, H.: Die Feinstruktur der Resonanzkurven akustischer Resonatoren	XIV/525
ZICKENDRAHT, H.: Über ein neues hydrodynamisches Prinzip zur Schallmessung	XV/322
ZINGG, E.: s. SCHERRER, P. und ZINGG, E.	XII/283
ZINGG, E.: Die Isobarenpaare Cd-In, In-Sn, Sb-Te, Re-Os	XIII/219
ZUBER, K.: Über eine Beziehung zwischen dem Funkenpotential zweier Gase	III/451
ZUBER, K.: Die Verwendung der Elektronenröhre zur Verstärkung schwacher Ströme	VI/495
ZUBER, K.: Zur Demonstration des Intensitätsverlaufes bei der Gitterbeugung.	VII/454
ZUBER, K.: Die Linienabsorption des Quecksilberdampfes für einzelne Hyperfeinstruktur-Komponenten der Linie 2537 ÅE.	VIII/370
ZUBER, K.: Versuche zur Trennung der Quecksilber-Isotope	VIII/488
ZUBER, K.: Trennung der Quecksilber-Isotope nach einer photochemischen Methode	IX/285
ZUBER, K.: Untersuchung der Bildung von Positron-Elektron-Paaren durch γ -Strahlung	XI/207
ZUBER, K.: Automatische Wilsonkammeranordnung	XI/366
ZUBER, K.: Einzelstreuung schneller Elektronen in Argon	XI/370
ZUBER, K.: s. MEYER, EDG., MÜLLER, F. und ZUBER, K.	XII/415
ZUBER, K.: Der Wirkungsquerschnitt für die Materialisation der 2,62 MeV γ -Strahlung in Argon	XV/ 38
ZUBER, O.: s. JAQUEROD, A. und ZUBER, O.	IV/360
ZUBER, O.: s. JAQUEROD, A. und ZUBER, O.	V/423
ZÜNTI, W.: s. BOSSHARD, W., SCHERRER, P. und ZÜNTI, W.	XIV/136
ZÜNTI, W.: s. SCHERRER, P. und ZÜNTI, W.	XIV/111
ZVIRONAS, A.: Über den Zeemaneffekt der Hyperfeinstruktur der Hg-Linie 2536	VI/273
ZVIRONAS, A.: Über den anomalen Zeemaneffekt einzelner Hyperfeinstrukturkomponenten der Quecksilberresonanzlinie 2537 ÅE. I. Teil. Die π -Komponenten	VII/224
ZVIRONAS, A.: Über den anomalen Zeemaneffekt einzelner Hyperfeinstrukturkomponenten der Quecksilberresonanzlinie 2537 ÅE. II. Teil: Die σ -Komponenten	VII/684
ZWICKY, F.: Über das Thermodynamische Gleichgewicht im Universum	I/449
ZWICKY, F.: Zur Mosaikstruktur der Kristalle	III/269
ZWICKY, F.: Zur Physik der Kristalle	III/466
ZWICKY, F.: Ergänzungen zu meiner Arbeit „Zur Mosaikstruktur der Kristalle“	IV/ 49
ZWICKY, F.: Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln	VI/110
ZWICKY, F.: Zur Struktur der Realkristalle	VI/210
ZWICKY, F.: Zur Struktur der Realkristalle	VII/294
ZWICKY, F.: Extraterrestrische Wirkungen der Ultrastrahlung	VIII/515

